1969

УДК – 519.217

О ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ПОВЕРХНОСТЯХ ДЛЯ m-МЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Н. КАЛИНАУСКАЙТЕ

Рассматривается однородный m-мерный случайный гауссовский процесс $Z(t)=\{\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \ldots,\ \xi_m(t),\ 0\leqslant t<\infty\}$ с независимыми приращениями. Плотность распределения вектора $Z(t)$ имеет вид

$$\left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{m}{2}}\sqrt{\det C}\,\exp\left\{-\frac{xCx'}{2t}\right\},\tag{1}$$

где $x=\{x_1, x_2, \ldots x_m\}$, а C^{-1} – матрица ковариаций случайного вектора $Z(1)$, распределение которого не вырождается.

Обозначим

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m),\ |x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}x_i^2},$$

$$|Z(t)|^2=\zeta(t),\ P_{Z(t)}(A)=P\left(Z(t)\in A\right).$$

Далее будем рассматривать поверхности вида

$$xCx'=2t\varphi(t),\tag{2}$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная положительная выпуклая функция, неограниченно возрастающая при $t\to\infty$. Класс поверхностей вида (2) обозначим G.

Непрерывная выпуклая поверхность в $(m+1)$-мерном пространстве $F(x, t)=0$, принадлежащая классу G, называется верхней, если множество

$$M=\left\{t: F\left(z(t),\ t\right)>0\right)\right\}$$

с вероятностью 1 ограничено, и нижней, если множество M с вероятностью 1 не ограничено.

Теорема. *Поверхность, заданная уравнением* (2), *является верхней, если интеграл*

$$I\left(2t\varphi(t)\right)=\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{t}\,\varphi^{\frac{m}{2}}(t)\exp\{-\varphi(t)\}\,dt\tag{3}$$

сходится, и нижней, если расходится.

Не ограничивая общности, достаточно исследовать гауссовский процесс с плотностью

$$\left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{m}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2t}|x|^2\right\}.\tag{4}$$

Тогда поверхностями класса G будут поверхности

$$|x|^2=2t\varphi(t). \tag{5}$$

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(t)$ непрерывная монотонно возрастающая функция. Если поверхность $|x|^2=2t\varphi(t)$ не является верхней, то существует монотонная неограниченно возрастающая последовательность $\{t_n\}$ такая, что с положительной вероятностью множество*

$$\{t_k : \zeta(t_k)>2t_k\varphi(t_k)\}$$

не ограничено.

Доказательство. Пространство элементарных событий обозначим Ω. Пусть поверхность $|x|^2=2t\varphi(t)$ не верхняя. Тогда существует множество $\Omega^*\subset\Omega$ с $P(\Omega^*)>c>0$ такое, что для любого $T>0$ найдется $t(\omega)>T$ такое, что

$$\zeta(t, \omega)>2t\varphi(t) \text{ при } \omega\in\Omega^*.$$

Так как $\zeta(t, \omega)$ непрерывное по t, то найдется рациональное число r, для которого

$$\zeta(r, \omega)>2r\varphi(r) \text{ при } \omega\in\Omega^*.$$

Пусть $\{r_i\}$ – множество всех рациональных чисел. Определим множество $\Omega_n^{(1)}$ следующим образом:

$$\Omega_n^{(1)}=\{\omega\in R^*,\ \exists_{r_i\leqslant n}\zeta(r_i, \omega)>2r_i\varphi(r_i)\}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\exists_{r_i\leqslant n}$ означает, что существует хоть одно $r_i\leqslant n$. Тогда

$$\bigcup\Omega_n^{(1)}=\Omega^*,\ \Omega_1^{(1)}\subseteq\Omega_2^{(1)}\subseteq\ldots\subseteq\Omega_n^{(1)}\subseteq\ldots$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$, мы можем найти n_1, такое, что

$$P\{\Omega_{n_1}^{(1)}\}\geqslant c-\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Пусть

$$\Omega_{r_i}=\{\omega\in\Omega^*,\ \zeta(r_i, \omega)>2r_i\varphi(r_i)\}.$$

Тогда

$$\bigcup_{r_i\leqslant n}\Omega_{r_i}=\Omega_n^{(1)}$$

так, что, если i_1 достаточно большое, получаем

$$P\left\{\bigcap_{i\leqslant i_1}\Omega_{r_i}\right\}\geqslant P\{\Omega_{n_1}^{(1)}\}-\frac{\varepsilon}{2}>c-\varepsilon.$$

Упорядочим $\{r_i,\ i\leqslant i_1\}$ по росту. Получаем множество

$$\{t_1,\ \ldots,\ t_{i_1}\}.$$

Пусть

$$\Omega_n^{(2)}=\begin{cases}\omega\in\Omega^*,\ \exists_{r_i}\max(i_1,\ t_{i_1})<r_i\leqslant n \text{ и}\\ \zeta(r_i, \omega)>2r_i\varphi(r_i), \text{ если } n>\max(i_1,\ t_{i_1}),\\ \varnothing, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Тогда

$$\bigcup_n \Omega_n^{(2)} = \Omega^*, \quad \Omega_1^{(2)} \subseteq \Omega_2^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq \Omega_n^2 \subseteq \ldots$$

Следовательно, существует n_2 такое, что

$$P\{\Omega_{n_2}^{(2)}\} > c - \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ и } \bigcup_{\max(l_1 t_{i_1}) < r_j \leq n_2} \Omega_{r_j} = \Omega_{n_2}^{(2)}.$$

Поэтому при достаточно большом i_2 получаем

$$P\left\{\bigcup_{i_1 < i \leq i_2} \Omega_{r_i}\right\} \geq P(\Omega_{n_2}^{(2)}) - \frac{\varepsilon^2}{2} > c - \varepsilon^2.$$

Таким же образом, как и в предыдущем шаге, получим монотонную последовательность

$$t_{i_1+1}, \; t_{i_1+2}, \; \ldots, \; t_{i_2}.$$

Повторяя это рассуждение, построим неограниченную монотонную последовательность

$$t_1 < \ldots < t_{i_1} < \ldots < t_{i_j} < t_{i_j+1} < \ldots$$

такую, что

$$P\left\{\bigcup_{i_{j-1} < i \leq i_j} \Omega_{t_j}\right\} \geq c - \varepsilon^j.$$

Если $\varepsilon < \frac{c}{2}$, то

$$P\left\{\bigcap_j \bigcup_{t_{j-1} < t_i < t_j} \Omega_{t_i}\right\} > c - \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j = c - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} > 0,$$

т. е. с положительной вероятностью множество M не ограничено.

Из леммы 1 следует, что достаточно доказать теорему для любой последовательности $\{t_n\}$, возрастающей в бесконечность. Не уменьшая общности, можно брать последовательность с $t_n - t_{n-1} \leq 1$.

Нетрудно подсчитать, что

$$P\{\zeta(t) > 2t\varphi(t)\} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{|x|^2 > 2t\varphi(t)} \underset{\cdots}{(m)} \int \exp\left\{-\frac{1}{2t}|x|^2\right\} dx_1, \ldots, dx_n =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \varphi^{\frac{m-2}{2}}(t) \exp\{-\varphi(t)\} + (m-2) \int_{\sqrt{2\varphi(t)}}^{\infty} y^{m-3} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy.$$

Итак, при $t \to \infty$, имеем

$$P\{\zeta(t) > 2t\varphi(t)\} \sim \Gamma^{-1}\left(\frac{m}{2}\right) \varphi^{\frac{m}{2}-1}(t) \exp\{-\varphi(t)\}. \tag{6}$$

Знак „$\sim$“ означает, что соотношение величин, стоящих в правой и левой частях, стремится к единице.

В силу (6) для любой константы C при $t \to \infty$ имеет место соотношение

$$P\left\{\zeta(t) > 2t\varphi(t)\left(1 - \frac{C}{\varphi(t)}\right)\right\} \sim e^{C} P\left\{\zeta(t) > 2(t)\varphi(t)\right\}. \qquad (7)$$

Так как процесс $Z(t)$ однородный с независимыми приращениями, то распределение случайного вектора $\{Z(s), Z(t)\}$ при $t > s$ имеет плотность

$$\left(\frac{1}{4\pi^2 s(t-s)}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2s}|x|^2 - \frac{1}{2(t-s)}|y-x|^2\right\}.$$

Следовательно,

$$P\{\zeta(s) > 2z_1^2,\ \zeta(t) > 2z_1^2\} =$$

$$= \underset{\substack{|x|^2 > 2z_1^2 \\ |y|^2 > 2z_2^2}}{\int \overset{(2m)}{\cdots} \int} \left(4\pi^2 s(t-s)\right)^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{2s} - \frac{|y-x|^2}{2(t-s)}\right\} \times$$

$$\times dx_1 \ \ldots \ dx_m dy_1 \ \ldots \ dy_m.$$

Заменой переменных

$$x_j = \rho \prod_{i=1}^{j-1} \sin\varphi_i \cos\varphi_j \qquad \text{при } 1 \leqslant j \leqslant m-1,$$

$$x_m = \rho \prod_{i=1}^{m-1} \sin\varphi_i,$$

$$y_j = r \prod_{i=1}^{j-1} \sin\psi_i \cos\psi_j \qquad \text{при } 1 \leqslant j \leqslant m-1,$$

$$y_m = r \prod_{i=1}^{m-1} \sin\psi_i$$

с якобианом преобразования, равным

$$J = (\rho r)^{m-1} \prod_{j=2}^{m-1} (\sin\varphi_{j-1} \sin\psi_{j-1})^{m-j}$$

подынтегральное выражение приводится к виду

$$J \cdot \left(4\pi^2 s(t-s)\right)^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2s}\rho^2 - \frac{1}{2(t-s)}\left[\rho^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2r\rho\left(\sum_{j=1}^{m-1} \prod_{i=1}^{j-1} \sin\varphi_i \sin\psi_i \cos\varphi_j \cos\psi_j + \prod_{i=1}^{m-1} \sin\varphi_i \sin\psi_i\right) + r^2\right]\right\}.$$

Методом математической индукции нетрудно доказать, что коэффициент при $2r\rho$ по модулю не превосходит единицы. Следовательно

$$P\{\zeta(s)>2z_1^2,\ \zeta(s)>2z_2^2\}\leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2\left(4\pi^2 s(t-s)\right)^{-\frac{m}{2}}\int\limits_{\sqrt{2}z_1}^{\infty}\int\limits_{\sqrt{2}z_2}^{\infty}(\rho r)^{m-1}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2s}-\frac{(r-\rho)^2}{2(t-s)}\right\}\times$$

$$\times\prod_{j=2}^{m-1}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\sin\varphi_{j-1}\sin\psi_{j-1})^{m-j}\,d\psi_{j-1}\,d\varphi_{j-1}\,dr\,d\rho.$$

Так как

$$\int\limits_0^{\pi}\sin^{a-1}\varphi d\varphi=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi d\varphi=\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{a+1}{2}\right),$$

то после упрощений получим, что

$$P\{\zeta(s)>2z_1^2,\ \zeta(t)>2z_2^2\}<$$

$$<2^{m+2}\Gamma^{-2}\left(\frac{m}{2}\right)\left(s(t-s)\right)^{-\frac{m}{2}}\int\limits_{\sqrt{2}z_1}^{\infty}\int\limits_{\sqrt{2}z_2}^{\infty}(\rho r)^{m-1}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2s}-\right.$$

$$\left.-\frac{(r-\rho)^2}{2(t-s)}\right\}dr\,d\rho=I_1.$$

Заменой

$$\rho=x\sqrt{2s},\quad r-\rho=y\sqrt{2(t-s)},\quad J=2\sqrt{(t-s)s}$$

интеграл I_1 приводится к виду

$$\frac{4}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_{\frac{z_1}{\sqrt{s}}}^{\infty}\int\limits_{\frac{z_2-z_1}{\sqrt{t-s}}}^{\infty}\left(x\left(y+\frac{x\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}}\right)\right)^{m-1}\exp\{-x^2-y^2\}\,dx\,dy.$$

Известно ([2]), что

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b g(x,y)\,df(x,y)=g(0,0)\,[f(x,y)]_{0,0}^{a,b}+$$

$$+\int\limits_0^a\int\limits_0^b[f(x,y)]_{x,y}^{a,b}\,dg(x,y)+\int\limits_0^a[f(x,y)]_{x,0}^{a,b}\,dg(x,0)+$$

$$+\int\limits_0^b[\varphi(x,y)]_{0,y}^{a,b}\,dg(0,y),$$

где

$$[f(x,y)]_{0,0}^{a,b}=f(0,0)-f(a,0)-f(0,b)+f(a,b)$$

при условии, что $f(x,y)$ и $g(x,y)$ — непрерывные функции ограниченной вариации. Используя эту формулу путем предельного перехода, получаем, что

$$I_1=\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_{\frac{z_1}{\sqrt{s}}}^{\infty}\int\limits_{\frac{z_2-z_1}{\sqrt{t-s}}}^{\infty}\left(x\left(y+\frac{x\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}}\right)\right)^{m-1}\frac{1}{xy}\,d\exp\{-x^2-y^2\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{z_1}{\sqrt{s}}\cdot\frac{z_2}{\sqrt{t-s}}\right)^{m-2}\frac{z_1}{z_2-z_1}\exp\left\{-\frac{z_1^2}{s}-\frac{(z_2-z_1)^2}{t-s}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_{\frac{z_1}{\sqrt{s}}}^{\infty}\int\limits_{\frac{z_2-z_1}{\sqrt{t-s}}}^{\infty}\exp\{-x^2-y^2\}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}g(x,y)\,dx\,dy+$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_{\frac{z_1}{\sqrt{s}}}^{\infty}\exp\left\{-x^2-\frac{(z_2-z_1)^2}{t-s}\right\}dg\left(x,\frac{z_2-z_1}{\sqrt{t-s}}\right)+$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_{\frac{z_2-z_1}{\sqrt{t-s}}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{z_1^2}{s}-y^2\right\}dg\left(\frac{z_1}{\sqrt{s}},y\right),$$

где

$$g(x,y)=\frac{1}{xy}\,x\left(\left(y+\frac{x\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}}\right)\right)^{m-1}.$$

Так как $g(x,y)$ — степенная функция, то

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}g(x,y),\quad \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}g(x,y),\quad \frac{1}{xy}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}g(x,y)$$

будут степенными функциями, по крайней мере порядка на два ниже, чем функция $g(x,y)$. Повторно применяя формулы частного интегрирования как для двумерных, так и для одномерных интегралов, каждый раз будем выделять члены с степенным множителем меньшего порядка. Следовательно, при

$$\frac{z_1}{\sqrt{s}}\to\infty,\quad \frac{z_2-z_1}{\sqrt{t-s}}\to\infty$$

наибольшим членом будет

$$A=\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{z_1}{\sqrt{s}}\cdot\frac{z_2-z_1}{\sqrt{t-s}}\right)^{m-2}\frac{z_1}{z_2-z_1}\exp\left\{-\frac{z_1^2}{s}-\frac{(z_2-z_1)^2}{t-s}\right\}.$$

Поэтому, при достаточно больших $\frac{z_1}{\sqrt{s}}$, $\frac{z_2-z_1}{\sqrt{t-s}}$

$$P\{\zeta(t)>2z_2^2,\ \zeta(s)>2z_1^2\}<(1+\gamma_1)A<$$

$$<(1+\gamma_2)\cdot P\{\zeta(s)>2z_1^2\}\cdot P\{\zeta(t-s)>2(z_2-z_1)^2\}\cdot\left(\frac{z_1}{z_2-z_1}\right)^{m-1}. \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть имеется неограниченно возрастающая последовательность* $\{t_n\}$ *с* $t_n-t_{n-1}\leqslant 1$. *Выберем подпоследовательность* $\{t_{n_k}\}$, *удовлетворяющую условию*

$$t_{n_k}\left(1+\frac{a}{\varphi(t_{n_k})}\right)<t_{n_{k+1}}<t_{n_k}\left(1+\frac{b}{\varphi(t_{n_k})}\right), \tag{9}$$

где $0<a<b$ *— константы. Тогда интеграл* $I\left(2t\varphi(t)\right)$ *сходится или расходится одновеременно с суммой* $\sum\limits_k P_{n_k}$, *где*

$$P_{n_k}=\varphi^{\frac{m}{2}-1}(t_{n_k})\exp\{-\varphi(t_{n_k})\}. \tag{10}$$

Доказательство. При достаточно больших t

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{t_n-t_{n-1}}{t_n}\varphi^{\frac{m}{2}}(t_n)\exp\{-\varphi(t_n)\}\leqslant$$

$$\leqslant\int_{t_{n_0}}^{\infty}\frac{1}{t}\varphi^{\frac{m}{2}}(t)\exp\{-\varphi(t)\}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{t_n-t_{n-1}}{t_{n-1}}\varphi^{\frac{m}{2}}(t_{n-1})\exp\{-\varphi(t_{n-1})\}.$$

Так как при $0<x<\frac{1}{2}$ имеют место неравенства

$\frac{x}{2}<\ln(1+x)<x$ и $2x>-\ln(1-x)>x$, то

$$\frac{2(t_n-t_{n-1})}{t_n}>-\ln\left(1-\frac{t_n-t_{n-1}}{t_n}\right)=\ln\frac{t_n}{t_{n-1}}=\ln\left(1+\frac{t_n-t_{n-1}}{t_{n-1}}\right)\geqslant\frac{1}{2}\,\frac{t_n-t_{n-1}}{t_{n-1}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{t_n-t_{n-1}}{t_{n-1}}\leqslant 2\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\ln\frac{t_n}{t_{n-1}}=2\ln\frac{t_{n_{k+1}}}{t_{n_k}}<$$

$$<2\ln\left(1+\frac{b}{\varphi(t_{n_k})}\right)\leqslant\frac{2b}{\varphi(t_{n_k})}$$

и

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\frac{t_n-t_{n-1}}{t_n}\geqslant\frac{1}{2}\ln\frac{t_{n_{k+1}}}{t_{n_k}}\geqslant\frac{a}{2\varphi(t_{n_k})}.$$

Так как $P_n\downarrow 0$, $\varphi(t_n)\uparrow\infty$, $P_n\varphi(t_n)\downarrow 0$ при $n\to\infty$, то

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}P_{n_k}\varphi(t_{n_{k-1}})\cdot\sum_{n_{k-1}<n\leqslant n_k}\frac{t_n-t_{n-1}}{t_n}\leqslant\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{t_n-t_{n-1}}{t_n}P_n\varphi(t_n)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=n_0}^{\infty}f\,\frac{t_n-t_{n-1}}{t_{n-1}}P_{n-1}\varphi(t_{n-1})\leqslant\sum_{k=k_0+1}^{\infty}P_{n_{k-1}}\varphi(t_{n_{k-1}})\cdot\sum_{n_{k-1}<n\leqslant n_k}\frac{t_n-t_{n-1}}{t_{n-1}}.$$

Используя оценки для сумм

$$\sum_{n_{k-1}<n\leqslant n_k}\frac{t_n-t_{n-1}}{t_{n-1}},\qquad\sum_{n_{k-1}<n\leqslant n_k}\frac{t_n-t_{n-1}}{t_n},$$

получаем утверждение леммы.

Лемма 3. (см. [3]). *Рассматривается бесконечная последовательность событий $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, определенных на вероятностном поле (Ω, F, P), удовлетворяющих условиям:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(F_k)=\infty$.

2. *Для любого положительного целого числа h существует целочисленная функция $H(m)>h$ такая, что для каждого $k>H(m)$ и $n\geqslant h$ существуют ненулевые условные вероятности $P(F_k \mid \bar{F}_h, \ldots, \bar{F}_m)$ и имеет место неравенство*

$$P(F_k \mid \bar{F}_h \ldots \bar{F}_m)\geqslant C_3 P(F_k),$$

где константа C_3 зависит только от h и функции $H(m)$. Дополнение события F_k обозначаем $\bar{F}_k$.

3. *Существуют две константы $C_4>0$ и $C_5>0$ такие, что каждому событию F_j соответствует множество событий $\{F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_s}\}$ из последовательности $\{F_k\}$ таких, что*

$$\sum_{i=1}^{s} P(F_j, F_{j_i})<C_4 P(F_k),$$

и, если $k>j$, но F_k не принадлежит множеству $\{F_{j_i}\ i=1, 2, \ldots, s\}$, то

$$P(F_j, F_k)<C_5 P(F_j)\cdot P(F_k)$$

в этих условиях $P\{\limsup F_k\}=1$.

Доказательство теоремы. Сначала установим, что достаточно доказать теорему для тех поверхностей класса G, для которых

$$\ln\ln t<\varphi(t)<(1+\varepsilon)\ln\ln t. \tag{11}$$

Итак, пусть теорема верна для поверхностей класса G, для которых выполняется условие (11). Пусть $|x|^2=2t\varphi(t)$ — любая поверхность класса G, не удовлетворяющая условию (11). Обозначим

$$\varphi_1(t)=\ln\ln t,$$

$$\varphi_2(t)=(1+\varepsilon)\ln\ln t,$$

$$\varphi_3(t)=\min\Big\{\max\big(\psi(t), \varphi_1(t)\big), \varphi_2(t)\Big\}.$$

Ясно, что из того, что поверхность $|x|^2=2t\psi(t)$ — верхняя (нижняя), следует, что такова же поверхность $|x|^2=2t\varphi_3(t)$. Остается проверить, что $I\big(2t\varphi_3(t)\big)$ и $I\big(2t\psi(t)\big)$ сходятся или расходятся одновременно.

1. Пусть $I\big(t\psi(t)\big)<\infty$. Если существует монотонно возрастающая в бесконечность последовательность $\{t_n\}$, $n=1, 2 \ldots$ такая, что $\psi(t_n)<\varphi_1(t_n)$ при $t_n>t_0$, то

$$\int_{t_0}^{t_n}\frac{1}{t}\psi^{\frac{m}{2}}(t)\exp\{-\psi(t)\}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\varphi_1^{\frac{m}{2}}(t_n)\exp\{-\varphi_1(t_n)\}\int_{t_0}^{t_n}\frac{dt}{t}=\frac{(\ln\ln t_n)^{\frac{m}{2}}}{\ln t_n}(\ln t_n-\ln t_0),$$

что противоречит предположению о сходимости интеграла $I\left(2t\psi(t)\right)$. Следовательно, такой последовательности не существует, и для $t>t_1$ имеет место обратное неравенство $\psi(t)>\varphi_1(t)$ и $\varphi_3(t)=\min\left(\psi(t),\ \varphi_2(t)\right)$. Тогда

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t}\,\varphi_3^{\frac{m}{2}}(t)\exp\{-\varphi_3(t)\}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t}\,\psi^{\frac{m}{2}}(t)\exp\{-\psi(t)\}\,dt + \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t}\,\varphi_2^{\frac{m}{2}}(t)\exp\{-\varphi_2(t)\}\,dt < \infty.$$

Здесь t_0 подобран так, чтобы функция

$$\max\left(\varphi_i^{\frac{m}{2}}(t)\exp\{-\varphi_i(t)\},\quad i=1,\ 2,\ 3;\ \psi^{\frac{m}{2}}(t)\exp\{-\psi(t)\}\right)$$

монотонно убывала при $t>t_0$.

2. Рассмотрим случай $I\left(t\psi(t)\right)=\infty$. Если существует последовательность $\{t_n\}$, стремящаяся в бесконечность такая, что $\psi(t_n)<\varphi_1(t_n)$, то $\varphi_3(t_n)=\varphi_1(t_n)$, и, рассуждая как в случае 1, получаем

$$I\left(2t\varphi_3(t)\right) \geqslant (\ln\ln t_n)^{\frac{m}{2}}\,\frac{1}{\ln t_n}\left(\ln(t_n)-\ln t\right),$$

т. е. $I\left(2t\varphi_3(t)\right)=\infty$. Если такой последовательности нет, т. е. для достаточно больших t, $\varphi_2(t)\leqslant\psi(t)$, то $\varphi_3(t)\leqslant\psi(t)$ и

$$I\left(2t\varphi_3(t)\right) \geqslant \int_{t}^{\infty} \frac{1}{t}\,\psi^{\frac{m}{2}}(t)\exp\{-\psi(t)\}\,dt=\infty.$$

Функция $\varphi_3(t)$ удовлетворяет (11).

Итак, пусть $|x|^2=2t\varphi(t)$ — поверхность класса G, удовлетворяющая условию (11). Пусть $\{t_n\}$ любая монотонная неограниченно возрастающая последовательность с $t_n-t_{n-1}\leqslant 1$. Выберем из нее подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$, удовлетворяющую условию

$$\frac{at_{n_k}}{\varphi(t_{n_k})} \leqslant t_{n_{k+1}}-t_{n_k} \leqslant \frac{bt_{n_k}}{\varphi(t_{n_k})}, \tag{12}$$

где $0<a<b$ — константы.

1. Пусть $I\left(2t\varphi(t)\right)<\infty$. Тогда по лемме 2

$$\sum_k P\{\zeta(t_{n_k})>2t_{n_k}\varphi(t_{n_k})\}<\infty. \tag{13}$$

Обозначим

$$A_n=\{\zeta(t_n)>2t_n\varphi(t_n)\},$$

$$B_{n,k}=\{\zeta(t_{n_k})-\zeta(t_n)\geqslant 0\},$$

$$C_k=\left\{\zeta(t_{n_k})>t_{n_k}\varphi(t_{n_{k-1}})\left(1-\frac{b}{\varphi(t_{n_{k-1}})}\right)\right\},$$

где $n_{k-1}<n\leqslant n_k$. Заметим, что

$$B_{n,k}\supset\left\{\bigcap_{j=1}^{m}\{\xi_j(t_{n_k})-\xi(t_n)\geqslant 0\}\right\}=D_{n,k}.$$

Вследствие независимости компонент процесса $z(t)$ имеем

$$P(B_{n,k})>P(D_{n,k})=\left(\frac{1}{2}\right)^m. \tag{14}$$

Далее покажем, что для каждого n, $n_{k-1}<n\leqslant n_k$ имеет место соотношение $C_k\supset A_n\cap B_{n,k}$. Действительно, при условии, что имеют место события A_n и $B_{n,k}$, в силу (12), получаем

$$\zeta(t_{n_k})>2t_n\varphi(t_n)\geqslant 2t_{n_k}\varphi(t_{n_{k-1}})\left(1+\frac{b}{\varphi(t_{n_{k-1}})}\right)^{-1}\geqslant$$

$$\geqslant 2t_{n_k}\varphi(t_{n_{k-1}})\left(1-\frac{b}{\varphi(t_{n_{k-1}})}\right).$$

Отсюда, принимая во внимание (14), получаем

$$P(C_k)\geqslant P\left\{\bigcup_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}A_n\cap B_{n,k}\right\}\geqslant P\left\{\bigcup_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}A_n\cap D_{n,k}\right\}=$$

$$=\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_{k+1}}P\left\{A_n\cap D_{n,k}\backslash A_n\cap D_{n,k}\cap\bigcup_{r=n_{k-1}+1}^{n-1}(A_r\cap D_{r,k})\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}P\left\{A_n\cap D_{n,k}\backslash A_n\cap D_{n,k}\cap\bigcap_{r=n_{k-1}+1}^{n-1}A_r\right\}=$$

$$=\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}P\left\{\left(A_n\backslash A_n\cap\bigcup_{r=n_{k-1}+1}^{n-1}A_r\right)\cap D_{n,k}\right\}=$$

$$=\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}P\left\{A_n\backslash A_n\cap\bigcup_{r=n_{k-1}+1}^{n-1}A_r\right\}\cdot P(D_{n,k})=2^{-m}P\left\{\bigcup_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}A_n\right\},$$

т. е.

$$P\left\{\bigcup_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}A_n\right\}\leqslant 2^mP(C_k). \tag{15}$$

Так как $\limsup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$, то соотношение $P\{\limsup A_n\}=0$ имеет место, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что для всех $n>n_0(\varepsilon)$

$$P\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right\}>\varepsilon.$$

В силу (14) и (15) при $n>n_0(\varepsilon)$ имеем

$$P\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right\}\leqslant\sum_{j=j_0}^{\infty}P\left(\bigcup_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}A_k\right)\leqslant 2^m\sum_{j=j_0}^{\infty}P(C_k)<\varepsilon.$$

2. Пусть $I\left(2t\varphi(t)\right)=\infty$. Обозначим

$$B_k=\{\zeta(t_{n_k})>2t_{n_k}\varphi(t_{n_k})\}.$$

Покажем, что $P\{\limsup B_k\}=1$.

Далее будем работать только с подпоследовательностью $\{t_{n_k}\}$ и вместо t_{n_k} для простоты записи будем писать t_k.

Доказательство состоит в проверке условий леммы 5.

1. Сумма $\Sigma P\{\zeta(t_k)>2t_k\varphi(t_k)\}$ расходится в силу леммы 4.

2. Вероятности $P\{B_k \mid \bar{B}_h \dots \bar{B}_m\}$ существуют для любого h и k. Функцию $H(k)$ определим позже. Так как процесс $Z(t)$ марковский, то

$$P\{\zeta(t_k)>2t_k\varphi(t_k)\mid \bar{B}_h \dots \bar{B}_m\}\geqslant \int \overset{(m)}{\dots} \int_{|b|^2<2t_r-f(t_r,\,t_h)} P\{|Z(t_k-t_r)+$$

$$+b|^2>2t_k\varphi(t_k)\mid Z(t_r)=b,\ \bar{B}_h \dots \bar{B}_r\}PZ(t_r)(dx),$$

где

$$f(t_r,\ t_h)=t_r-\ln P(\bar{B}_h \dots \bar{B}_r).$$

Тогда

$$P\{\zeta(t_k)>2t_k\varphi(t_k)\mid \bar{B}_h \dots \bar{B}_r\}\geqslant P\{|Z(t_k-t_r)|>\sqrt{2t_k\varphi(t_k)}-$$

$$-\sqrt{2t_rf(t_r,\ t_h)}\}\ P\{\zeta(t_r)<2t_rf(t_r,\ t_h)\mid \bar{B}_h \dots \bar{B}_r\}. \qquad (16$$

Второй множитель в произведении (16) равен

$$1-\frac{P\{\zeta(t_r)>2t_rf(t_r,\ t_h),\ \bar{B}_h \dots \bar{B}_r\}}{P(\bar{B}_h \dots \bar{B}_r)}\geqslant$$

$$\geqslant 1-\frac{P\{\zeta(t_r)>2t_rf(t_r,\ t_h)\}}{P(\bar{B}_h \dots \bar{B}_r)}\geqslant 1-\frac{1+\delta'}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\ e^{-t_r}\left(f(t_r,\ t_h)\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Вследствие марковости процесса $Z(t)$, имеем

$$P\left\{\bigcap_{j=h}^{r}\{\zeta(t_j)<2t_j\varphi(t_j)\}\right\}\geqslant \prod_{j=h+1}^{r} P\{|Z(t_j-t_{j-1})|<$$

$$<\sqrt{2t_j\varphi(t_j)}-\sqrt{2t_{j-1}\varphi(t_{j-1})}\}\cdot P(\bar{B}_h).$$

Так как

$$\sqrt{t_j\varphi(t_j)}-\sqrt{t_{j-1}\varphi(t_{j-1})}\geqslant(\sqrt{t_j}-\sqrt{t_{j-1}})\sqrt{\varphi(t_j)}\geqslant\sqrt{\frac{a^2}{16b}\ (t_j-t_{j-1})},$$

то

$$P(\bar{B}_h,\ \dots\ \bar{B}_r)>C_0^{r-h}.$$

Повторно применяя (9), получаем

$$\frac{a(r-h)t_h}{\varphi(t_r)}\leqslant t_r-t_h,$$

откуда

$$(r-h)\leqslant a^{-1}t_r\varphi(t_r).$$

Следовательно, при больших t_r второй множитель в (16) больше

$$1-\frac{(1+\delta')}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\ e^{-t_r}\left(t_r-(r-h)\ln C_0\right)^{\frac{m}{2}}\geqslant C_1>0.$$

Если $H(r)$ выберем так, что

$$\sqrt{2t_k}-\sqrt{\frac{2t_r f(t_r, t_h)}{\varphi(t_k)}}\leqslant\sqrt{(t_k-t_r)\left(1+\frac{c}{\varphi(t_k)}\right)},$$

то в силу (7)

$$P\{|Z(t_k-t_r)|>\sqrt{2t_k\varphi(t_k)}-\sqrt{2t_r f(t_r, t_h)}\}\geqslant$$
$$\geqslant(1-\delta)e^{-C}P\{\zeta(t_k)>2t_k\varphi(t_k)\}.$$

Окончательно получаем

$$P(B_k|\bar{B}_h\ \dots\ \bar{B}_r)\geqslant(1-\delta)C_1e^{-c}P(B_k).$$

Остается проверить условие 3. Из (8) следует, что при $t_r>t_k$

$$P\{\zeta(t_r)>2t_r\varphi(t_r),\ \zeta(t_k)>2t_k\varphi(t_k)\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1+\delta}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\varphi^{\frac{m}{2}-1}(t_k)\left(\frac{t_r\varphi(t_r)}{t_r-t_k}\right)^{\frac{m}{2}-1}\frac{\sqrt{t_r\varphi(t_r)}}{\sqrt{t_r\varphi(t_r)}-\sqrt{t_k\varphi(t_k)}}\exp\left\{-\varphi(t_k)-\right.$$
$$\left.-\frac{(\sqrt{t_r\varphi(t_r)}-\sqrt{t_k\varphi(t_k)})^2}{t_r-t_k}\right\}. \tag{17}$$

Рассмотрим те t_r, для которых

$$t_r>t_k\varphi^2(t_r),\ \text{т. е.}\ \frac{t_k}{t_r}<\frac{1}{\varphi^2(t_r)}. \tag{18}$$

Тогда

$$\sqrt{t_r\varphi(t_r)}-\sqrt{t_k\varphi(t_k)}\geqslant\sqrt{t_r\varphi(t_r)}\left(1-\frac{1}{\varphi(t_r)}\right)$$

и

$$\exp\left\{-\frac{(\sqrt{t_r\varphi(t_r)}-\sqrt{t_k\varphi(t_k)})^2}{t_r-t_k}\right\}\leqslant e^2\exp\{-\varphi(t_r)\},$$

так как

$$\frac{t_r}{t_r-t_k}>1.$$

Далее

$$\frac{\sqrt{t_r\varphi(t_r)}}{\sqrt{t_r\varphi(t_r)}-\sqrt{t_k\varphi(t_k)}}\leqslant\frac{1}{1-\varphi^{-1}(t_r)}<C_2$$

и

$$\frac{\sqrt{t_r\varphi(t_r)}}{\sqrt{t_r-t_k}}<C_1\sqrt{\varphi(t_r)}.$$

Подставляя эти оценки в (17), получаем

$$P\{\zeta(t_r)>2t_r\varphi(t_r),\ \zeta(t_k)>2t_k\varphi(t_k)\}\leqslant$$
$$\leqslant(1+\delta_2)C_2e^2C_1^{\frac{m}{2}-1}P\{\zeta(t_r)>2t_r\varphi(t_r)\}\cdot P\{\zeta(t_k)>2t_k\varphi(t_k)\}.$$

Обозначим через Q_k множество тех t_r, для которых

$$t_r<t_k\varphi^2(t_r). \tag{19}$$

Оценим сверху число элементов данного множества. Повторно применяя (10), получаем

$$t_k\prod_{j=k}^{r}\left(1+\frac{a}{\varphi(t_j)}\right)<t_r<t_k\prod_{j=k}^{r}\left(1+\frac{b}{\varphi(t_j)}\right). \tag{20}$$

Так как $\frac{x}{2} < \ln(1+x) < x$ при $0 < x < \frac{1}{2}$, то

$$\ln \frac{t_r}{t_k} = \sum_{j=k}^{r} \ln \frac{t_{j+1}}{t_j} \geqslant \sum_{j=k}^{r} \ln \left(1 + \frac{a}{\varphi(t_j)}\right) \geqslant \frac{1}{2} \frac{(r-k)a}{\varphi(t_r)},$$

откуда при помощи (11) и (19) заключаем, что

$$(r-k) < C_4 (\ln\ln t_k)^{2+\delta_3}. \tag{21}$$

Используя (11) и (12), а также формулу Тейлора, нетрудно убедиться, что

$$\sqrt{t_k \varphi(t_k)} - \sqrt{t_{k-1}\varphi(t_{k-1})} \geqslant \frac{a}{4} \sqrt{\frac{t_{k-1}}{\varphi(t_{k-1})}}$$

и

$$\frac{a}{4} \sqrt{\frac{t_{k-1}}{\varphi(t_{k-1})}} \leqslant \sqrt{t_k \ln\ln t_k} - \sqrt{t_{k-1}\ln\ln t_{k-1}} \leqslant C_5 \sqrt{\frac{t_{k-1}}{\ln\ln t_{k-1}}}.$$

Тогда 1)

$$\sqrt{t_r\varphi(t_r)} - \sqrt{t_k\varphi(t_k)} \geqslant \frac{a}{4(1+\varepsilon)} \sum_{j=0}^{r-k} \sqrt{\frac{t_{k+j}}{\ln\ln t_{k+j}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a}{4(1+\varepsilon)C_6} \sum_{j=0}^{r-k-1} \left(\sqrt{t_{k+j+1}\ln\ln t_{k+j+1}} - \sqrt{t_{k+j}\ln\ln t_{k+j}}\right) \geqslant \sqrt{C_7 t_r \ln\ln t_r}$$

и

$$\exp\left\{-\frac{(\sqrt{t_r\varphi(t_r)} - \sqrt{t_k\varphi(t_k)})^2}{t_r - t_k}\right\} \leqslant \frac{C_8}{(\ln t_r)^{C_7}};$$

2)

$$\frac{\sqrt{t_r\varphi(t_r)}}{\sqrt{t_r\varphi(t_r)} - \sqrt{t_k\varphi(t_k)}} \leqslant \frac{1+\delta_4}{\sqrt{C_7}};$$

3)

$$\sqrt{\frac{t_r\varphi(t_r)}{t_r - t_k}} \leqslant C_9 \ln\ln t_r.$$

Подставляя оценки в (17) и принимая во внимание, что $(r-k) \leqslant \leqslant (\ln\ln t_k)^{2+\delta_3}$, получаем

$$\sum_{t_r \in Q_k} P\{\zeta(t_r) > 2t_r\varphi(t_r),\ \zeta(t_k) > 2t_k\varphi(t_k)\} \leqslant$$

$$\leqslant C_9 P\{\zeta(t_k) > 2t_k\varphi(t_k)\} \cdot \frac{(\ln\ln t_k)^{2+\delta_3+\frac{m}{2}}}{(\ln t_k)^{C_7}}.$$

Этим завершается доказательство теоремы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
27.XII.1968

Литература

1. K. L. Chung, P. Erdös. On the applications of the Borel-Cantelli lemma, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 72, 1952, p. 179.
2. W. H. Young, On multiple integration by parts of the second theorem of the mean, Proceedings of the London Math. Soc. second series, vol. 16, 1918, 237–293.
3. T. Sirao, On some asymptotic properties concerning homogeneous differential process, Nagoya, Math. J. No. 6, p. 95–107, 1953.
4. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3.

VIRŠUTINIAI IR APATINIAI PAVIRŠIAI m-MAČIAMS HOMOGENINIAMS GAUSO PROCESAMS

N. Kalinauskaitė

(Reziumė)

Sakykime $\{Z(t), 0<t<\infty\}$ m-matis homogeninis Gauso procesas su nepriklausomais pokyčiais Nemažindami bendrumo, apsiribojame proceso $Z(t)$ su tankiu

$$\left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}|x|^2\right\},$$

kur

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in R_m, \quad |x|^2=\sum_{i=1}^{m} x_i^2,$$

tyrimu.

Paviršius $|x|^2=2t\varphi(t)$, kur $\varphi(t)$ — teigiama tolydinė iškila neaprėžtai auganti monotoniška funkcija, vadinamas viršutiniu, kai aibė

$$M=\{t: |Z(t)|^2\geqslant 2t\,\varphi(t)\}$$

su tikimybe 1 aprėžta, ir apatiniu, kai ši aibė su tikimybe 1 neaprėžta.

Įrodoma, kad paviršius $|x|^2=2t\varphi(t)$ viršutinis, kai integralas

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t}\,\varphi^{\frac{m}{2}}(t)\exp\{-\varphi(t)\}\,dt$$

konverguoja, ir apatinis, kai šis integralas diverguoja.

ON THE UPPER AND LOWER SURFACES FOR THE m-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS GAUSSIAN PROCESSES WITH INDEPENDENT INCREMENTS

N. Kalinauskaitė

(Summary)

Let $\{Z(t), 0\leqslant t<\infty\}$ be a m-dimensional homogeneous Gaussian process with independen increments. With no loose of generality we restrict ourselves in considering the process $Z(t)$ wit the density of distribution

$$\left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}|x|^2\right\}$$

where

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in R_m, \quad |x|^2=\sum_{i=1}^{m} x_i^2.$$

The surface $|x|^2=2t\varphi(t)$, where $\varphi(t)$ is positive continuous convex monotone increasing function, is called the upper surface if the set

$$M=\{t: |Z(t)|^2\geqslant 2t\,\varphi(t)\}$$

is bounded with probability 1, and it is called the lower one if the set M is unbounded with probaility 1.

The following theorem is proved: The surface $|x|^2=2t\varphi(t)$ is upper if the integral

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t}\,\varphi^{\frac{m}{2}}(t)\exp\{-\varphi(t)\}\,dt$$

converges and lower if it diverges.