1969

УДК–519.21

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Б. Каминскене

Пусть имеется последовательность

$$\xi_1, \xi_2, \dots$$

независимых неотрицательных случайных величин с общей функцией распределения $\mathbf{F}(x)$, принимающих только целочисленные значения k с вероятностями

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\}, \qquad i=1, 2, \dots; \qquad k=0, 1, \dots$$

Обозначим

$$S_0 = 0, \qquad S_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i, \qquad m=1, 2, \dots$$

Случайный процесс

$$N(t) = \max\{m : S_m \leqslant t\}, \; t=0,1,\dots$$

принято называть процессом восстановления, а величины ξ_i $(i=1, 2, \dots)$ — временем восстановления.

Мы будем рассматривать последовательность

$$N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)$$

независимых неодинаково распределенных дискретных процессов восстановления.

В случае, когда процессы восстановления $N_l(t)$, $l=1, 2, \dots, n$, распределены одинаково, Б. Григелионисом [3] была доказана асимптотическая нормальность сумм $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$ при больших n и t в предположении, что распределение времени восстановления процесса $N_1(t)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту. В. Лютикас в работе [5] получил тот же результат для дискретного процесса восстановления (время восстановления имеет решетчатое распределение). Но в обеих работах, кроме других условий, предполагалось существование четвертого момента времени восстановления, т. е. предполагалось $\mathbf{M}\xi_1^4 < \infty$. А. Алешкявичене [6] получила асимптотическую нормальность сумм $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$ дискретных процессов восстановления при больших n и t предполагая, что существует второй момент времени восстановления, т. е. $\mathbf{M}\xi_1^2<\infty$. Асимптотическую нормальность сумм $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$, когда процессы восстановления $N_l(t)$, $l=1, 2, \ldots, n$, неодинаково распределены, показал В. Лютикас [5]. В этой работе одним из условий было предположение, что существует шестой момент времени восстановления. В настоящей заметке доказана асимптотическая нормальность сумм $\sum_{l=1}^{n} N_l(t)$ дискретных неодинаково распределенных процессов восстановления при менее жестких условиях, а именно, вместо существования шестого момента времени восстановления требуется существование третьего момента.

Пусть $\xi_i^{(l)}$, $i=1, 2, \ldots$; время восстановления процесса $N_l(t)$, т. е.

$$N_l(t)=\max\left\{m: \sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(l)}<t\right\}, \qquad l=1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим

$$\mu_{l,j}=\mathbf{M}(\xi_1^{(l)})^j, \qquad l=1, 2, \ldots; \qquad j=1, 2, 3;$$

$$\sigma_l^2=\frac{\mu_{l,2}-\mu_{l,1}^2}{\mu_{l,1}^3};$$

$$\bar{\sigma}_n^2=\sum_{l=1}^{n}\sigma_l^2;$$

$$\bar{N}_n(t)=\frac{1}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\sum_{l=1}^{n}\Big(N_l(t)-\Lambda_l(t)\Big),$$

где

$$\Lambda_l(t)=\mathbf{M}\,N_l(t);$$

$$F_{n,t}(x)=\mathbf{P}\{\bar{N}_n(t)<x\};$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Предположим, что существует

(а) $\mu=\inf_l \mu_{l,1}>0$;

(б) $\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\bar{\sigma}_n^2>0$;

(с) $\mathbf{M}=\sup_l \mu_{l,3}<\infty$;

(d) хотя для одного 1, $l\leqslant l\leqslant n$, $\xi_1^{(l)}$ имеет распределение с максимальным шагом распределения равным единице.

Теорема. *Если выполнены условия* (а)—(d) *и существуют такие достаточно большие конечные числа* t_0 и n_0, *то при* $t\geqslant t_0$ *и* $n\geqslant n_0$ *имеет место соотношение*

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F_{n,t}(x)-\Phi(x)|\leqslant C\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{nt}}\right),$$

где C — константа.

Доказательство. Пусть

$$\bar{f}_{l,t}(z) = \mathbf{M} e^{iz(N_l(t) - \Lambda_l(t))}.$$

В силу независимости процессов $N_l(t)$ имеем

$$f_{n,t}(z) = \mathbf{M} e^{iz \frac{1}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}} \sum_{l=1}^{n} [N_l(t) - \Lambda_l(t)]} =$$

$$= \prod_{l=1}^{n} \bar{f}_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}}\right) = e^{-iz \frac{1}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}} \sum_{l=1}^{n} \Lambda_l(t)} \prod_{l=1}^{n} M e^{iz \frac{1}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}} N_l(t)} =$$

$$= e^{-iz \frac{1}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}} \sum_{l=1}^{n} \Lambda_l(t)} \prod_{l=1}^{n} \varphi_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}}\right), \tag{1}$$

где $\varphi_{l,t}(z)$ является характеристической функцией величины $N_l(t)$, и

$$\ln f_{n,t}(z) = \sum_{l=1}^{n} \ln \bar{f}_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}}\right) =$$

$$= -iz \frac{1}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}} \sum_{l=1}^{n} \Lambda_l(t) + \sum_{l=1}^{n} \ln \varphi_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}}\right). \tag{2}$$

Но,

$$\ln \bar{f}_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}}\right) = -\mathbf{M}\left(N_l(t) - \Lambda_l(t)\right)^2 \frac{z^2}{2\bar{\sigma}_n^2 t} +$$

$$+ [\ln \bar{f}_{l,t}(z)]'''_{z = \Theta \frac{z}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}}} \cdot \frac{z^3}{6\bar{\sigma}_n^3 t \sqrt{t}}, \tag{3}$$

где $0 < \Theta < 1$.

Так как

$$\ln \bar{f}_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}}\right) = -iz \frac{1}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}} \Lambda_l(t) + \ln \varphi_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n(t)}\right), \tag{4}$$

то

$$[\ln \bar{f}_{l,t}(z)]''' = \frac{\varphi'''_{l,t}(z)\,\varphi^2_{l,t}(z) - 3\varphi''_{l,t}(z)\,\varphi'_{l,t}(z)\,\varphi_{l,t}(z) + 2\varphi'^3_{l,t}(z)}{\varphi^3_{l,t}(z)}. \tag{5}$$

Обозначим

$$P_l(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(l)} s^k, \qquad Q_l(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(l)} s^k,$$

где

$$p_k^{(l)} = \mathbf{P}\{\xi_1^{(l)} = k\}, \qquad q_k^{(l)} = \mathbf{P}\{\xi_1^{(l)} > k\} = \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j^{(l)}.$$

Характеристическая функция $\varphi_{l,t}(z)$ является коэффициентом при s^t в разложении выражения

$$\frac{1 - P_l(s)}{(1-s)[1 - e^{iz} P_l(s)]} = \frac{Q_l(s)}{1 - e^{iz} P_l(s)} \tag{6}$$

по степеням s (см. [1], теорема 8). Нетрудно видеть, что производные $\varphi'_{l,t}(iz)$, $\varphi''_{l,t}(iz)$ и $\varphi'''_{l,t}(iz)$ являются коэффициентами при s^t соответственно, в разложениях выражений

$$\left[\frac{Q_l(s)}{1-e^{iz}P_l(s)}\right]'_{iz}=\frac{e^{iz}P_l(s)Q_l(s)}{[1-e^{iz}P_l(s)]^2};$$

$$\left[\frac{Q_l(s)}{1-e^{iz}P_l(s)}\right]''_{iz}=\frac{e^{iz}P_l(s)Q_l(s)}{[1-e^{iz}P_l(s)]^2}+2\frac{e^{2iz}P_l^2(s)Q_l(s)}{[1-e^{iz}P_l(s)]^3}$$

и

$$\left[\frac{Q_l(s)}{1-e^{iz}P_l(s)}\right]'''_{iz}=\frac{e^{iz}P_l(s)Q_l(s)}{[1-e^{iz}P_l(s)]^2}+$$

$$+6\frac{e^{2iz}P_l^2(s)Q_l(s)}{[1-e^{iz}P_l(s)]^3}+6\frac{e^{3iz}P_l^3(s)Q_l(s)}{[1-e^{iz}P_l(s)]^4} \tag{7}$$

по степеням s. Но, так как нас будут интересовать только коэффициенты при s^t, вместо выражений (6) и (7) мы можем рассматривать выражения

$$\frac{Q_{l,t}(s)}{1-e^{iz}P_{l,t}(s)},\qquad \frac{e^{iz}P_{l,t}(s)Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^2},$$

$$2\frac{e^{2iz}P_{l,t}^2(s)Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^3}+\frac{e^{iz}P_{l,t}(s)Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^2}$$

и

$$\frac{e^{iz}P_{l,t}(s)Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^2}+6\frac{e^{2iz}P_{l,t}^2(s)Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^3}+6\frac{e^{3iz}P_{l,t}^3(s)Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^4}, \tag{8}$$

где

$$P_{l,t}(s)=\sum_{k=0}^{t}p_k^{(l)}s^k,$$

$$Q_{l,t}(s)=\sum_{k=0}^{t}q_k^{(l)}s^k.$$

Пусть $s_{l,t}(z)$ является корнем уравнения

$$1-e^{iz}P_{l,t}(s)=0, \tag{9}$$

т. е. $1-e^{iz}P_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)\equiv 0$. Нетрудно видеть, что при $z=0$ уравнение (9) имеет наименьший по модулю положительный корень $s_{l,t}(0)$, удовлетворяющий неравенству

$$1<s_{l,t}(0)=1+\delta_{l,t}\leqslant\frac{1}{\sum\limits_{l=1}^{t}p_k^{(l)}}=1+o\left(\frac{1}{t^2}\right). \tag{10}$$

Так как $P'_{l,t}\left(s_{l,t}(0)\right)\not\equiv 0$, то $s_{l,t}(0)$ явяется простым корнем. Согласно свойствам неявных функций (см. [8], стр. 95–101) существует такое число $\Delta_{l,t}>0$, что уравнение (9) определяет в интервале $[-\Delta_{l,t}, \Delta_{l,t}]$ однозначную, непрерывную и трехкратно дифференцируемую функцию $s=s_{l,t}(z)$, обращающую это уравнение в тождество и удовлятворяющую равенству $s_{l,t}(0)=1+\delta_{l,t}$. Вместо интервала $[-\Delta_{l,t}, \Delta_{l,t}]$ можно взять интервал, в котором

$$[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]_s'\neq 0.$$

Так как $P_{l,t}'(s)\neq 0$ для всех $s\in\{s: |s|<1+\frac{\bar{\Delta}_t^2}{2}, |\arg s|\leqslant\bar{\Delta}t\}$,
где

$$\bar{\Delta}_t=\frac{\sqrt{c\ln t}}{\sqrt{t}},\quad c=\min(1, \mu),$$

то вместо интервала $[-\Delta_{l,t}\ \Delta_{l,t}]$ можно взять интервал $[-\bar{\Delta}_t, \bar{\Delta}_t]$ при всех l. Тогда при всех $|z|\leqslant\bar{\Delta}_t$ справедливо разложение

$$s_{l,t}(z)=1+\delta_{l,t}+s_{l,t}'(0)z+s_{l,t}''(0)\frac{z^2}{2}+s_{l,t}'''(0)\frac{z^3}{6}+o(|z|^3)=$$

$$=1-\frac{1}{\mu_{l,1}}iz-\frac{\mu_{l,2}-\mu_{l,1}-\mu_{l,1}^2}{\mu_{l,1}^3}\frac{(iz)^2}{2}-$$

$$-\frac{1}{\mu_{l,1}^6}(\mu_{l,1}^2-\mu_{l,3}\mu_{l,1}-3\mu_{l,2}\mu_{l,1}+\mu_{l,1}^4+3\mu_{l,1}^2-3\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2+3\mu_{l,1}^3)\frac{(iz)^3}{6}+$$

$$+\delta_t+o\left(|z|^3+\frac{|z|}{t^2}\right),\quad l=1,\ \dots,\ n. \tag{11}$$

При $|z|\leqslant\bar{\Delta}_t$ имеем $P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)\neq 0$ и $Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)\neq 0$. При тех же z

$$\frac{Q_{l,t}(z)}{1-e^{iz}P_{l,t}(s)}=e^{-iz}\frac{Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)[s_{l,t}(z)-s]}+R_{l,t}(s,z), \tag{12}$$

где

$$R_{l,t}(s,z)=\frac{P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)Q_{l,t}(s)[s_{l,t}(z)-s]-Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)\left[P_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)-P_{l,t}(s)\right]}{\left[P_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)-P_{l,t}(s)\right]P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)[s_{l,t}(z)-s]}.$$

Теперь нетрудно найти $\varphi_{l,t}(z)$, как коэффициент при s^t в разложении правой части выражения (12) по степеням s, т. е.

$$\varphi_{l,t}(z)=e^{-iz}\frac{Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)}s_{l,t}^{-t}(z)+\Lambda_l(t,z).$$

Здесь

$$\Lambda_l(t,z)=\frac{3}{2\pi i}\int\limits_{|s|=r\leqslant 1}R_{l,t}(s,z)\frac{ds}{s^{t+1}} \tag{13}$$

$R_{l,t}(s,z)$ можно переписать в следующем виде:

$$R_{l,t}(s,z)=\frac{1}{\dfrac{P_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)-P_{l,t}(s)}{s_{l,t}(z)-s}\cdot P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)}\times$$

$$\times\left[\frac{Q_{l,t}(s)-Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{s_{l,t}(z)-s}P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{P_{l,t}(s)-P_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)+P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)[P_{l,t}(z)-s]}{[s_{l,t}(z)-s]^2}Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)\right]. \tag{14}$$

В интеграле (13) контур интегрирования $|s|=r\leqslant 1$ можно заменить на $|s|=1$, так как при $|s|=1$ выражение (14) не имеет особых точек. Тогда

$$\Lambda_l(t,z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\frac{1}{\dfrac{P_{l,t}(s_{l,t}(z))-P_{l,t}(s)}{s_{l,t}(z)-s}\;P'_{l,t}(s_{l,t}(z))}\times$$

$$\times\Bigg[-\frac{Q_{l,t}(s_{l,t}(z))-Q_{l,t}(s)}{s_{l,t}(z)-s}\;P'_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)+$$

$$+\frac{P_{l,t}(s)-P_{l,t}(s_{l,t}(z))-P'_{l,t}(s_{l,t}(z))[s-s_{l,t}(z)]}{[s_{l,t}(z)-s]^2}\;Q_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)\Bigg]\frac{ds}{s^{t+1}}.$$

После трехкратного интегрирования по частям получаем

$$\Lambda_l(t,z)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{(t-3)!}{t!}\int\limits_{|s|=1}\frac{d^3}{ds^3}\Bigg\{\frac{1}{\dfrac{P_{l,t}(s_{l,t}(z))-P_{l,t}(s)}{[s_{l,t}(z)-s}\;P'_{lt}\;(s_{l,t}(z))}\times$$

$$\times\Bigg[-\frac{Q_{l,t}(s_{l,t}(z))-Q_{l,t}(s)}{s_{l,t}(z)-s}\;P'_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)+$$

$$+\frac{P_{l,t}(s)-P_{l,t}(s_{l,t}(z))-P'_{l,t}(s_{l,t}(z))[s-s_{l,t}(z)]}{[s_{l,t}(z)-s]^2}\;Q_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)\Bigg]\Bigg\}\frac{ds}{s^{t-2}}. \qquad (15)$$

Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^3p_k^{(l)}$, эквивалентная сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}k^2q_k^{(l)}$, обеспечивает равномерную ограниченность производных функций $P_{l,t}(s)$ и $Q_{l,t}(s)$

$$|P_{l,t}^{(\nu)}(s)|\leqslant c_1,\qquad \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3;$$

$$|Q_{l,t}^{(\nu)}(s)|\leqslant c_2,\qquad \nu=0,\ 1,\ 2;$$

для всех l.

Здесь и в дальнейшем C_k, c_k, $k=1, 2, \ldots,$ обозначают постоянные, независящие от l, t и s. Для оценки подынтегральной функции в (15) нужно оценить величину

$$\left|\Big(s_{l,t}(z)-s\Big)Q_{l,t}^{(3)}(s)\right|.$$

Имея ввиду равенство (11) при

$$|z|\leqslant\bar{\Delta}_t=\frac{\sqrt{c\ln t}}{\sqrt{t}},$$

мы получаем

$$\left|\Big(s_{l,t}(z)-s\Big)Q_{l,t}^{(3)}(s)\right|\leqslant|(1-s)\,Q_{l,t}^{(3)}(s)|+c_3\,\frac{\sqrt{\ln t}}{\sqrt{t}}\,Q_{l,t}^{(3)}(s).$$

Используя преобразования Абеля [9] и тот факт, что

$$t^\nu q_t^{(l)}\leqslant\sum_{k\geqslant t}t^\nu p_k^{(l)};\qquad \nu\sum_{k\geqslant t}k^{\nu-1}q_k^{(l)}\leqslant\sum_{k\geqslant t}k^\nu p_k,$$

получаем (см. [7], стр. 330)

$$|(1-s)\,Q_{l,t}^{(3)}(s)|\leqslant 3!\,q_3^{(l)}+\frac{t!}{(t-3)}\;q_t^{(l)}+\sum_{4\leqslant k\leqslant t}\left(q_k^{(l)}\frac{k!}{(k-3)!}-q_{k-1}^{(l)}\frac{(k-1)!}{(k-3-1)!}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 3^3q_3^{(l)}+t^3q_3^{(l)}+\sum_{4\leqslant k\leqslant t}\left(p_{k+1}^{(l)}\frac{(k-1)!}{(k-3-1)!}+3q_k^{(l)}\frac{(k-1)!}{(k-3)!}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty}p_k^{(l)}k^3=c_4.$$

Аналогично получаем, что

$$|Q_{l,t}^{(3)}|\,(e^{i\varphi})|\leqslant c_5\left[\sum_{(1+t\,|\,\varphi\,|\,)\,k\leqslant t}k^3q_k^{(l)}+\frac{1}{\frac{1}{t}+|\,\varphi\,|}\sum_{(1+t\,|\,\varphi\,|\,)\,k\geqslant t}k^3p_k^{(l)}\right]+c_6.$$

Теперь

$$\left|\left(s_{l,t}(z)-e^{i\varphi}\right)Q_{l,t}^{3}(e^{i\varphi})\right|\leqslant c_7\,\frac{\psi(t\,|\,\varphi\,|)}{\frac{1}{t}+|\,\varphi\,|}\;\frac{\sqrt{\ln t}}{\sqrt{t}}+c_8, \tag{17}$$

где

$$\psi(t\,|\,\varphi\,|)=\left(\frac{1}{t}+|\,\varphi\,|\right)\sum_{(1+t\,|\,\varphi\,|)\,k\leqslant t}k^3q_k^{(l)}+\sum_{(1+t\,|\,\varphi\,|)\,k\geqslant t}k^3p_k^{(l)}.$$

Согласно (11), существует такое положительное число c_9 и такие достаточно большие конечные числа t_0 и n_0, что при всех $t\geqslant t_0$ и $n\geqslant n_0$ для всех

$$|\,z\,|\leqslant\frac{Z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\;,$$

где Z — любое положительное конечное число, будет иметь место неравенство

$$|\,s_{l,t}(z)\,|>1-\frac{1}{\mu_{l,1}}\;\frac{Z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}-2\;\frac{|\,\mu_{l,2}-\mu_{l,1}^2-\mu_{l,1}\,|}{\mu_{l,1}^3}\;\frac{Z}{\bar{\sigma}_n^2t}>c_9. \tag{18}$$

Соотношения (16)—(18) дают следующую оценку для подынтегральной функции в формуле (15)

$$\left|\frac{d^3}{ds^3}\,R_{l,t}(s,z)\right|\leqslant c_{10}\,\frac{\psi(t\,|\,\varphi\,|)}{\frac{1}{t}+|\,\varphi\,|}\;\frac{\sqrt{\ln t}}{\sqrt{t}}+c_{11}.$$

В силу последней оценки и (15) получаем, что

$$|\,\Lambda_l(t,z)\,|\leqslant c_{10}\,\frac{(t-3)!}{t!}\;\frac{\sqrt{\ln t}}{\sqrt{t}}\int_0^{\pi t}\frac{\psi(x)}{1+x}\,dx+c_{11}\,\frac{(t-3)!}{t!}$$

для всех l и

$$|\,z\,|\leqslant\frac{Z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\;.$$

Так как

$$\sup_{x\leqslant\pi t}\psi(x)=O(1),$$

то

$$|\,\Lambda_l(t,z)\,|=O\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Тогда

$$\varphi_{l,t}(z)=e^{-iz}\,\frac{Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}\,s_{l,t}^{-t}(z)+0\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Приступим к отысканию функций $\varphi'_{l,t}(iz)$; $\varphi''_{l,t}(iz)$ и $\varphi'''_{l,t}(iz)$. Для этой цели выражения (8) перепишем в следующем виде:

$$\frac{e^{iz}P_{l,t}(s)\,Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^2}=\frac{Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^2}-\frac{Q_{l,t}(s)}{1-e^{iz}P_{l,t}(s)}\ ;$$

$$\frac{e^{iz}P_{l,t}(s)\,Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^2}+2\,\frac{e^{2iz}P^2_{l,t}(s)\,Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^3}=$$

$$=2\,\frac{Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^3}-3\,\frac{Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^2}+\frac{Q_{l,t}(s)}{1-e^{iz}P_{l,t}(s)}$$

и

$$\frac{e^{iz}P_{l,t}(s)\,Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^2}+6\,\frac{e^{2iz}P^2_{l,t}(s)\,Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^3}+6\,\frac{e^{3iz}P^3_{l,t}(s)\,Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^4}=$$

$$=6\,\frac{Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^4}-12\,\frac{Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^3}+$$

$$+7\,\frac{Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^2}-\frac{Q_{l,t}(s)}{1-e^{iz}P_{l,t}(s)}\,. \tag{20}$$

При всех $|z|\leqslant\overline{\Delta}_t$

$$\frac{Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^2}=e^{-2iz}\,\frac{Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P'^2_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)[s_{l,t}(z)-s]^2}+$$

$$+e^{-2iz}\,\frac{Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P''_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)-Q'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P'^3_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)[s_{l,t}(z)-s]}+R_{1_{l,t}}(s,z),$$

где $R_{1_{l,t}}(s,z)$-функция от $P_{l,t}(s)$, $Q_{l,t}(s)$, $P^{\nu}_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)$, $\nu=0,\ 1,\ 2$, $Q^{(\nu)}_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)$, $\nu=0{,}1$ и от $s_{l,t}(z)-s$;

$$\frac{Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz})P_{l,t}(s)]^3}=e^{-3iz}\,\frac{Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P'^3_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)[s_{l,t}(z)-s]^3}+$$

$$+e^{-3iz}\,\frac{-Q'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)+\frac{3}{2}\,Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P''_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P'^4_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)[s_{l,t}(z)-s]^2}+$$

$$+e^{3-iz}\,\frac{1}{P'^5_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)[s_{l,t}(z)-s]}\left[\frac{1}{2}\,Q''_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'^2_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)-\right.$$

$$-\frac{3}{2}\,Q'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P''_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\,Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)\,P'''_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)+$$

$$\left.+\frac{3}{2}\,O_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P''^2_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)\right]+R_{2_{l,t}}(s,z);$$

здесь $R_{2l,t}(s,z)$ — функция от $P_{l,t}(s)$, $Q_{l,t}(s)$, $P_{l,t}^{(\nu)}\left(s_{l,t}(z)\right)$, $\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3$, $Q_{l,t}^{(\nu)}\left(s_{l,t}(z)\right)$, $\nu=0,\ 1,\ 2$ и от $s_{l,t}(z)-s$;

$$\frac{Q_{l,t}(s)}{[1-e^{iz}P_{l,t}(s)]^4}=e^{-4iz}\frac{Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P_{l,t}'^4\left(s_{l,t}(z)\right)[s_{l,t}(z)-s]^4}+$$
$$+e^{-4iz}\frac{-Q_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)+2Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}''\left(s_{l,t}(z)\right)}{P_{l,t}'^5\left(s_{l,t}(z)\right)[s_{l,t}(z)-s]^3}+$$
$$+e^{-4iz}\frac{1}{P'^6\left(s_{l,t}(z)\right)[s_{l,t}(z)-s]^2}\left[\frac{1}{2}Q_{l,t}''\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}'^2\left(s_{l,t}(z)\right)-\right.$$
$$-2Q_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}''\left(s_{l,t}(z)\right)+\frac{5}{2}Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}''^2\left(s_{l,t}(z)\right)-$$
$$\left.-\frac{2}{3}Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}'''\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)\right]+R_{3l,t}(s,z), \qquad (21)$$

где $R_{3l,t}(s,z)$ — функция от $P_{l,t}(s), Q_{l,t}(s)$, $P_{l,t}^{(\nu)}\left(s_{l,t}(z)\right)$, $\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3$, $Q_{l,t}^{(\nu)}\left(s_{l,t}(z)\right)$, $\nu=0,\ 1,\ 2$ и от $s_{l,t}(z)-s$.

Теперь можно найти производные характеристической функции, т. е. $\varphi_{l,t}'(iz)$, $\varphi_{l,t}''(iz)$, и $\varphi_{l,t}'''(iz)$.

Из (12), (20) и (21) получаем, что при всех $|z|\leqslant\overline{\Delta}t$

$$\varphi_{l,t}'(iz)=e^{-2iz}\frac{Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P_{l,t}'^2\left(s_{l,t}(z)\right)}ts_{l,t}^{-t-1}(z)+$$
$$+\left[e^{-2iz}\frac{-Q_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)+Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}''\left(s_{l,t}(z)\right)}{P_{l,t}'^3\left(s_{l,t}(z)\right)}-\right.$$
$$\left.-e^{-iz}\frac{Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)}\right]s_{l,t}^{-t}(z)+\Lambda_l(t,z)+\Lambda_{1l}(t,z),$$

где

$$\Lambda_{1l}(t,z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=z\leqslant 1}R_{1l,t}(s,z)\frac{ds}{s^{t+1}}. \qquad (22)$$

После двукратного интегрирования по частям (22) и соображений аналогичных для $\Lambda_l(t,z)$, получаем, что для всех l и $|z|\leqslant\frac{Z}{\delta\sqrt{t}}$

$$\Lambda_{1l}(t,z)=0\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

и

$$\varphi_{l,t}'(iz)=e^{-2iz}\frac{Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)}ts_{l,t}^{-t-1}(z)+$$
$$+\left[e^{-2iz}\frac{-Q_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)+Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P_{l,t}''\left(s_{l,t}(z)\right)}{P_{l,t}'^3\left(s_{l,t}(z)\right)}-\right.$$
$$\left.-e^{-iz}\frac{Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)}{P_{l,t}'\left(s_{l,t}(z)\right)}\right]s_{l,t}^{-t}(z)+0\left(\frac{1}{t^3}\right). \qquad (23)$$

Далее, аналогично получаем, что

$$\varphi''_{l,t}(iz)=e^{-3iz}\,\frac{Q_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'^{3}_{l,t}(s_{l,t}(z))}\,t(t+1)\,s_{l,t}^{-t-2}(z)+$$

$$+\left[2e^{-3iz}\,\frac{-Q'_{l,t}(s_{l,t}(z))P'_{l,t}(s_{l,t}(z))+\frac{3}{2}\,Q_{l,t}(s_{l,t}(z))P''_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'^{4}_{l,t}(s_{l,t}(z))}-\right.$$

$$\left.-3e^{-2iz}\,\frac{Q_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'^{2}_{l,t}(s_{l,t}(z))}\right]ts_{l,t}^{-t-1}(z)+$$

$$+\left\{2e^{-3iz}\,\frac{1}{P'^{5}_{l,t}(s_{l,t}(z))}\left[\frac{1}{2}\,Q''_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'^{2}_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)-\right.\right.$$

$$-\frac{3}{2}\,Q'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P''_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\,Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'''_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)+$$

$$\left.+\frac{3}{2}\,Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P''^{2}_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)\right]-$$

$$-3e^{-2iz}\,\frac{-P'_{l,t}(s_{l,t}(z))P'_{l,t}(s_{l,t}(z))+Q_{l,t}(s_{l,t}(z))P''_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'^{3}_{l,t}(s_{l,t}(z))}+$$

$$\left.+e^{-iz}\,\frac{Q_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'_{l,t}(s_{l,t}(z))}\right\}s_{l,t}^{-t}(z)+0\left(\frac{1}{t}\right). \qquad (24)$$

и

$$\varphi'''_{l,t}(iz)=e^{-4iz}\,\frac{Q_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'^{4}_{l,t}(s_{l,t}(z))}\,t(t+1)(t+2)\,s_{l,t}^{-t-3}(z)+$$

$$+\left(6e^{-4iz}\,\frac{-Q'_{l,t}(s_{l,t}(z))P'_{l,t}(s_{l,t}(z))+2Q_{l,t}(s_{l,t}(z))P''_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'^{5}_{l,t}(s_{l,t}(z))}-\right.$$

$$\left.-12e^{-3iz}\,\frac{Q_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'^{3}_{l,t}(s_{l,t}(z))}\right)\frac{t(t+1)}{2}\,s^{-t-2}(z)+$$

$$+\left[6e^{-4iz}\,\frac{1}{P'^{6}_{l,t}(s_{l,t}(z))}\left(\frac{1}{2}\,Q''_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'^{2}_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)-\right.\right.$$

$$-2Q'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P''_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)+\frac{5}{2}\,Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P''^{2}_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)-$$

$$\left.-\frac{2}{3}\,Q_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'''_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)P'_{l,t}\left(s_{l,t}(z)\right)\right)-$$

$$-12e^{-3iz}\,\frac{-Q'_{l,t}(s_{l,t}(z))P'_{l,t}(s_{l,t}(z))+\frac{3}{2}\,Q_{l,t}(s_{l,t}(z))P''_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'^{4}_{l,t}(s_{l,t}(z))}+$$

$$\left.+7e^{-2iz}\,\frac{Q_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'^{2}_{l,t}(s_{l,t}(z))}\right]ts_{l,t}^{-t-1}(z)+$$

$$+\Bigg[-12e^{-3iz}\frac{1}{P'^{5}_{l,t}(s_{l,t}(z))}\Bigg(\frac{1}{2}Q''_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)P'^{2}_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)-$$

$$-\frac{3}{2}Q'_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)P'_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)P''_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)-$$

$$-\frac{1}{2}Q_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)P'''_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)P'_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)+$$

$$+\frac{3}{2}Q_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)P''^{2}_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)\Bigg)+$$

$$+7e^{-2iz}\frac{Q_{l,t}(s_{l,t}(z))P''_{l,t}(s_{l,t}(z))-Q'_{l,t}(s_{l,t}(z))P'_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'^{3}_{l,t}(s_{l,t}(z))}-$$

$$-\frac{Q_{l,t}(s_{l,t}(z))}{P'_{l,t}(s_{l,t}(z))}\Bigg]s^{-t}_{l,t}(z)+O(1). \tag{25}$$

Из (5), (19), (23)—(25) получаем, что при всех $|z|\leqslant\frac{Z}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}$

$$\Big(\ln\bar{f}_{l,t}(iz)\Big)'''=\frac{1}{P'^{5}_{l,t}(s_{l,t}(z))}s^{-3}_{l,t}(z)\Bigg[\Bigg(2e^{-3iz}P'^{2}_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)+$$

$$+3e^{-3iz}P''_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)P'_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)s^{2}_{l,t}(z)-3e^{-2iz}P'^{3}_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)s_{l,t}(z)+$$

$$+3e^{-3iz}P''^{2}_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)s^{2}_{l,t}(z)-e^{-3iz}P'''_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)P'_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)s^{2}_{l,t}(z)-$$

$$-3e^{-2iz}P''_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)P'^{2}_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)s^{2}_{l,t}(z)+$$

$$+e^{-iz}P'^{4}_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)s^{2}_{l,t}(z)\Bigg]t+O\Big(s^{t}_{l,t}(z)\Big)\Bigg]. \tag{26}$$

При $|z|\leqslant\bar{\Delta}_t$

$$P'_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)=\mu_{l,1}+(\mu_{l,2}-\mu_{l,1})\,iz-(\mu_{l,3}-3\mu_{l,2}+2\mu_{l,1})\frac{z^2}{2}+o\left(\frac{1}{t}+z^2\right);$$

$$P''_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)P'_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)=(\mu_{l,2}-\mu_{l,1})\,\mu_{l,1}+(\mu_{l,3}\mu_{l,1}+5\mu_{l,2}\mu_{l,1}+$$

$$+5\mu^{2}_{l,1}+\mu^{2}_{l,2})\,iz+o(|z|);$$

$$P'''_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)P'_{l,t}\Big(s_{l,t}(z)\Big)=(\mu_{l,3}-3\mu_{l,2}+2\mu_{l,1})\,\mu_{l,1}+o(1);$$

$$\frac{1}{P'^{5}_{l,t}(s_{l,t}(z))}=\frac{1}{\mu^{5}_{l,1}}+5\,\frac{\mu_{l,2}-\mu_{l,1}}{\mu^{6}_{l,1}}\,iz-$$

$$-5\,\frac{\mu_{l,3}-3\mu_{l,2}-2\mu_{l,1}-6\,(\mu_{l,2}-\mu_{l,1})^2}{\mu^{7}_{l,1}}\frac{z^2}{2}+o(z^2). \tag{27}$$

Из (18) следует, что для всех $t \geqslant t_0$, $n \geqslant n_0$ и $|z| \leqslant \frac{Z}{\sigma_n \sqrt{t}}$ $s_{l,t}(z)$ отлична от нуля и

$$s_{l,t}^t(z) = e^{t \ln s_{l,t}(z)} = \exp\left\{ t \ln \left[1 + \delta_{l,t} - \frac{1}{\mu_{l,1}} iz - \frac{\mu_{l,2} - \mu_{l,1}^2 - \mu_{l,1}}{\mu_{l,1}^3} \frac{(iz)^2}{2} - \right.\right.$$

$$- \frac{1}{\mu_{l,1}^5} \left(\mu_{l,1}^4 - 3\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2 + 3\mu_{l,1}^3 - \mu_{l,3}\mu_{l,1} + 3\mu_{l,2}\mu_{l,1} - \right.$$

$$\left.\left.\left. - 3\mu_{l,2}^2 + \mu_{l,1}^2 \right) \frac{(iz)^3}{6} + o\left(|z|^3 + \frac{|z|}{t^3} \right) \right] \right\} = 1 - \frac{t}{\mu_{l,1}} iz -$$

$$- t \frac{\mu_{l,2} - \mu_{l,1}^2 - \mu_{l,1}}{\mu_{l,1}^3} \frac{(iz)^2}{2} - \frac{1}{\mu_{l,1}^5} (\mu_{l,1}^4 - 3\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2 + 3\mu_{l,1}^3 -$$

$$- \mu_{l,3}\mu_{l,1} + 3\mu_{l,2}\mu_{l,1} - 3\mu_{l,1}^2 + \mu_{l,1}^2) \, t \, \frac{(iz)^3}{6} + o\left(t\,|z|^3 + \frac{|z|}{t} \right). \tag{28}$$

При предположениях нашей теоремы

$$\mathbf{M}\left(N_l(t) - \Lambda_l(t) \right)^3 = \frac{\mu_{l,2} - \mu_{l,1}^2}{\mu_{l,1}^3} \, t + \frac{1}{12\mu_{l,1}^4} \left(-8\mu_{l,3}\mu_{l,1} - 6\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2 + \right.$$

$$\left. + 15\mu_{l,2}^2 + 6\mu_{l,2}\mu_{l,1} - 6\mu_{l,1}^3 - 6\mu_{l,1}^2 \right) + o(1). \tag{29}$$

В силу соотношений (26)—(29), для всех $|z| \leqslant \frac{Z}{\sigma_n \sqrt{t}}$ и достаточно больших t и n имеем, что

$$\left(\ln \tilde{f}_{l,t}(z) \right)''' = \frac{3\mu_{l,2}^2 + \mu_{l,1}^4 - 3\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2 - \mu_{l,3}\mu_{l,1}}{\mu_{l,1}^5} \, t +$$

$$+ g(\mu_{l,1}, \mu_{l,2}, \mu_{l,3}) \, tiz + o(t\,|z|) + O(t), \tag{30}$$

где $g(\mu_{l,1}, \mu_{l,2}, \mu_{l,3})$ — функция от моментов $\mu_{l,1}$, $\mu_{l,2}$, $\mu_{l,3}$. Из (2), (3), (29) и (30) получаем, что для всех z, лежащих в конечном интервале $|z| \leqslant Z$ и достаточно больших t и n,

$$\ln f_{nt}(z) = -\frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{\sigma_n^2 t} \sum_{l=1}^{n} \times$$

$$\times \frac{-8\mu_{l,3}\mu_{l,1} - 6\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2 + 15\mu_{l,2}^2 + 6\mu_{l,2}\mu_{l,1} - 6\mu_{l,1}^3 - 6\mu_{l,1}^2}{12\mu_{l,1}^4} +$$

$$+ \frac{z^3}{\sigma_n^3 \sqrt{t}} \sum_{l=1}^{n} \frac{3\mu_{l,2}^2 + \mu_{l,1}^4 - 3\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2 - \mu_{l,3}\mu_{l,1}}{\mu_{l,1}^5} + o\left(\frac{z^2}{t} + \frac{|z|^3}{\sqrt{nt}} \right).$$

Тогда

$$f_{n,t}(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} \left(1 + \frac{z^2}{\sigma_n^2 t} \sum_{l=1}^{n} g_1(\mu_{l,1}, \mu_{l,2}, \mu_{l,3}) + \right.$$

$$\left. + \frac{z^3}{\sigma_n^3 \sqrt{t}} \sum_{l=1}^{n} g_2(\mu_{l,1}, \mu_{l,2}, \mu_{l,3}) + o\left(\frac{z^2}{t} + \frac{|z|^3}{\sqrt{nt}} \right) \right), \tag{31}$$

где $\quad g_1(\mu_{l,1},\ \mu_{l,2},\ \mu_{l,3})=\frac{1}{12\mu_{l,1}^4}(-8\mu_{l,3}\mu_{l,1}-6\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2+$

$$+15\mu_{l,2}^2+6\mu_{l,2}\mu_{l,1}-6\mu_{l,1}^3-6\mu_{l,1}^2);$$

$$g_2(\mu_{l,1},\ \mu_{l,2},\ \mu_{l,3})=\frac{1}{\mu_{l,1}^5}(3\mu_{l,2}^2+\mu_{l,1}^4-3\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2-\mu_{l,3}\mu_{l,1}).$$

Из (31) получаем, что при $|z|\leqslant Z$

$$|f_{n,t}(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}|\leqslant e^{-\frac{z^2}{2}}\left[C_1\frac{z^2}{t}+C_2\frac{z^3}{\sqrt{nt}}+o\left(\frac{z^2}{t}+\frac{|z|^3}{\sqrt{nt}}\right)\right]\leqslant$$

$$\leqslant C_3\left(\frac{z^2}{t}+\frac{z^3}{\sqrt{nt}}\right)e^{-\frac{z^2}{3}}, \tag{32}$$

где

$$C_1=\max_l g_1(\mu_{l,1},\ \mu_{l,2},\ \mu_{l,3})\frac{1}{\min\limits_l \bar\sigma_l^2},$$

$$C_2=\max_l g_2(\mu_{l,1},\ \mu_{l,2},\ \mu_{l,3})\frac{1}{\min\limits_l \sigma_l}.$$

По теореме Эссеена (см., например. [2] стр. 211) имеем

$$|\bar F_{n,t}(x)-\Phi(x)|\leqslant c_{12}\delta+c_{15}\frac{1}{T},$$

где

$$\delta=\int\limits_{-T}^{T}\frac{|f_{n,t}(z)-\varphi(z)|}{z}dz.$$

Оценим δ

$$\delta=\int\limits_{-T}^{T}\frac{|f_{n,t}(z)-\varphi(z)|}{z}dz=I_1+I_2.$$

Здесь

$$I_1=\int\limits_{-Z}^{Z}\frac{|f_{n,t}(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}|}{z}dz,$$

$$I_2=\int\limits_{Z\leqslant|z|\leqslant T}\frac{|f_{n,t}(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}|}{z}dz.$$

В силу (32)

$$I_1=\int\limits_{-Z}^{Z}\frac{|f_{n,t}(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}|}{|z|}dz=C_4\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{nt}}\right). \tag{34}$$

Оценим интеграл I_2 при $T=(2\pi-\varepsilon)\bar\sigma_n\sqrt{t}$. Имеем

$$f_{n,t}(z)=e^{-iz\frac{1}{\sigma_n\sqrt{t}}\sum\limits_{l=1}^{n}\Lambda_l(t)}\prod_{l=1}^{n}\varphi_{l,t}\left(\frac{z}{\bar\sigma_n\sqrt{t}}\right).$$

Для оценки $\varphi_{l,t}\left(\frac{z}{\bar\sigma_n\sqrt{t}}\right)$ нам понадобится.

Лемма (см. [4]). *Если функция распределения времени ожидания дискретного процесса восстановления N_t имеет второй конечный момент и* *ее максимальный шаг распределения равен единице, то для любого* $\varepsilon>0$ *существует постоянное* $c(\varepsilon)$ *такое, что*

$$|\mathrm{M}e^{izN_t}|<\frac{c(\varepsilon)}{t},$$

для $\varepsilon\leqslant z\leqslant(2\pi-\varepsilon)$.

В нашем случае получаем, что

$$\left|\varphi_{l,t}\left(\frac{z}{\bar\sigma\sqrt{t}}\right)\right|<\frac{c_l(\varepsilon)}{t}, \tag{35}$$

если $\varepsilon\bar\sigma_n\sqrt{t}\leqslant|z|\leqslant(2\pi-\varepsilon)\bar\sigma_n\sqrt{t}$.

Осталось оценить $\varphi_{l,t}\left(\frac{z}{\bar\sigma_n\sqrt{t}}\right)$, когда $Z\leqslant|z|<\varepsilon\bar\sigma_n\sqrt{t}$.

Имеем

$$\varphi_{l,t}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{Q_l(s)}{1-e^{iz}P_l(s)}\,s^{-t-1}ds,$$

где L — окружность единичного радуиса с центром в начале координат. Пусть

$$\varphi_{l,t}(z)=J_1+J_2,$$

где

$$J_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\arg s|<\frac{1}{\sqrt{nt}}}\frac{Q_l(s)}{1-e^{iz}Pe(s)}\,\frac{ds}{s^{t+1}},$$

$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\arg s|\geqslant\frac{1}{\sqrt{nt}}}\frac{Q_l(s)}{1-e^{iz}P_l(s)}\,\frac{ds}{s^{t+1}}.$$

Имеем

$$J_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\arg s|<\frac{1}{\sqrt{nt}}}\frac{Q_l(s)-Q_l(1)}{1-e^{iz}P_l(s)}\,\frac{ds}{s^{t+1}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\arg s|<\frac{1}{\sqrt{nt}}}\frac{\mu_{l,1}e^{iz}[P_l(s)-P_l(1)-P'(1)(s-1)]\,s^{-t-1}}{[1-e^{iz}P_l(s)]\,[1-e^{iz}-\mu_{l,1}(s-1)]}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\arg s|<\frac{1}{\sqrt{nt}}}\frac{\mu_{l,1}^2(s-1)(e^{iz}-1)\,s^{-t-1}}{\left(1-e^{iz}P_l(s)\right)\left(1-e^{iz}-\mu_{l,1}(s-1)\right)}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\arg s|<\frac{1}{\sqrt{nt}}}\frac{\mu_{l,1}s^{-t-1}}{1-e^{iz}-\mu_{l,1}(s-1)}\,ds.$$

С другой стороны имеем, что

$$|Q_l(s)-Q_l(1)|=\left|Q_l'\left(1+\Theta_1(s-1)\right)(s-1)\right|\leqslant P_l'(1)|s-1|,\quad 0<\Theta_1<1;$$

$$|P_l(s)-P_l(1)-P_l'(1)(s-1)|=\left|\frac{1}{2}P_l''[1+\Theta_2(s-1)](s-1)^2\right|\leqslant$$

$$\leqslant P_l''(1)|s-1|^2,\quad 0<\Theta_2<1.$$

Теперь оценим снизу величины $|1-e^{iz}P_t(s)|$ и $|1-e^{it}-\mu_{l,1}(s-1)|$ для всех

$$\frac{Z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}<|z|<\varepsilon$$

и

$$s\in\left\{s:|s|=1,\ |\arg s|<\frac{1}{\sqrt{nt}}\right\}.$$

Имеем

$$1-e^{iz}P_t(s)=1-e^{iz}+(1-s)e^{iz}Q_t(s)$$

и

$$|1-e^{iz}P_t(s)|\geqslant|1-e^{iz}|+|1-s||Q_t(s)|.$$

При достаточно малом ε и достаточно больших n и t

$$|1-e^{iz}P_t(s)|>\frac{1}{4}|z|.$$

Аналогично получаем, что

$$|1-e^{iz}\mu_{l,1}(s-1)|\geqslant|1-e^{iz}|-\mu_{l,1}|s-1|>\frac{1}{2}|z|.$$

В силу последних оценок следует, что

$$|J_1|<c_{15}\frac{1}{\sqrt{nt}}.$$

Далее

$$|1-e^{iz}P_t(s)|^2=2(1-\cos z)+2(1-\cos\varphi)[\operatorname{Re}Q(s)]^2+$$

$$+2(1+\cos\varphi)[\operatorname{Im}Q(s)]^2+2[\cos z-1)(1-\cos\varphi)+\sin z\sin\mu]\operatorname{Re}Q(s)+$$

$$+2[(1-\cos z)\sin\varphi+(1-\cos\varphi)\sin z]\operatorname{Im}Q(s).$$

При достаточно малом ε для $\frac{1}{\sqrt{nt}}\leqslant|\varphi|\leqslant4\varepsilon$, $|\operatorname{Im}Q_t(s)|>c_{18}|\varphi|$ и для $\pi-4\varepsilon\leqslant|\varphi|\leqslant\pi$, $|\operatorname{Im}Q_t(s)|>c_{16}(\pi-\varphi)$, где $c_{18}=p_1^{(l)}+p_2^{(l)}+\ldots+p_m^{(l)}$ и m определяется неравенставами $m\varphi<\pi$ и $(m+1)\varphi\geqslant\pi$, для тех же φ $\operatorname{sign}\operatorname{Im}Q_t(s)=\operatorname{sign}\varphi$.

Тогда для всех $\frac{Z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}<z<\varepsilon$ и $\frac{1}{\sqrt{nt}}\leqslant\varphi\leqslant\pi$ имеет место соотношение

$$|1-e^{iz}P_t(s)|^2>(1-\cos z)+(1+\cos\varphi)|Q_t(s)|^2.$$

Аналогично оценивается $|1-e^{iz}P_t(s)|^2$ во всех других случаях. Окончательно получаем

$$|J_2|\leqslant c_{17}\frac{1}{\sqrt{nt}}.$$

Значит, при

$$\frac{Z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}<z<\varepsilon$$

$$|\varphi_{l,t}(z)|\leqslant c_{18}\frac{1}{\sqrt{nt}}. \tag{36}$$

Оценки (35) и (36) дают нам, что

$$|f_{n,t}(z)|\leqslant c_5\left(\frac{1}{\sqrt{nt}}+\frac{1}{t}\right).$$

Теперь

$$J_2 = \int\limits_{Z\leqslant|z|\leqslant T} \frac{|f_{n,t}(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}|}{z}\,dz \leqslant C_8\left(\frac{1}{\sqrt{nt}}+\frac{1}{t}\right). \tag{37}$$

Из (33), (34) и (37) получаем, что

$$\sup_{-\infty<X<\infty} |F_{n,t}(x)-\Phi(x)| \leqslant C\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{nt}}\right).$$

Теорема доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю А. Алешкявичене за постановку задачи и ценные указания при выполнении этой работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
31.I.1969

Литература

1. W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer, Math. Soc., 67(1949), 98–119.
2. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., Гостехиздат, 1949.
3. Б. Григелионис, О центральной предельной теореме для сумм процессов восстановления, Лит. матем. сб., IV, № 2 (1964), 197–201.
4. А. Алешкявичене, Локальная предельная теорема для рекуррентных событий, Лит. матем. сб., V, № 3 (1965), 373–380.
5. В. Лютикас, О центральной предельной теореме для сумм дискретных процессов восстановления, Лит. матем. сб., VI № 3, (1966), 361–390.
6. А. Алешкявичене, Центральная предельная теорема для сумм дискретных процессов восстановления, Лит. матем. сб., VIII, № 3 (1967), 373–387.
7. А. О. Гельфонд, Оценка остаточного члена в предельной теореме для рекуррентных событий, Теория вероятностей и ее прим., 2 (1964), 327–331.
8. Справочная математическая библиотека, Математический анализ, дифференцирование и интегрирование, Физматгиз, 95–102.
9. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Физматгиз, II ,307–309.

CENTRINĖ RIBINĖ TEOREMA DISKRETINIŲ ATSTATYMO PROCESŲ SUMOMS

B. Kaminskienė

(*Reziumė*)

Sakykime, turime nepriklausomų neneigiamų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių, priimančių tik sveikas reikšmes k su tikimybėmis $p_k=P\{\xi_i=k\}$, $i=1, 2, \ldots$: $k=0, 1, 2, \ldots$ seką

$$\xi_1, \xi_2, \ldots$$

Tarkime, kad

$$S_0=0, \qquad S_m=\sum_{i=1}^{m} \xi_i, \qquad m=1, 2, \ldots$$

Atsitiktinį procesą

$$N(t)=\max\{m: S_m<t\}$$

priimta vadinti atstatymo procesu.

Darbe nagrinėjama nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių diskretinių atstatymo procesų seka $\{N_l(t)\}$;

$$N_l(t)=\max\left\{m:\sum_{i=1}^{m}\xi_i^{(l)}<t\right\},\qquad l=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

Žymėsime

$$\mu_{l,j}\,\mathrm{M}\,(\xi_1^{(l)})^j;\qquad \bar{\sigma}_n^2=\sum_{l=1}^{n}\frac{\mu_{l,2}-\mu_{l,1}^2}{\mu_{l,1}^3};$$

$$\Lambda_l(t)=\mathrm{M}\,N_l(t);\qquad \overline{N_n}(t)=\frac{1}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\sum_{l=1}^{n}[N_l(t)-\Lambda_l(t)];$$

$$\mathrm{F}_{n,t}(x)=\mathrm{P}\,\{\overline{N_n}(t)<x\};\qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Įrodoma: jei

$$\inf_l \mu_{l,1}>0;\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\bar{\sigma}_n^2>0;\qquad \sup_l \mu_{l,3}<\infty$$

ir bent vienam l, $l=1,2,\ldots,n$, $\xi_i^{(l)}$ – pasiskirstymo maksimalus žingsnis lygus vienetui, tai

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|\mathrm{F}_{n,t}(x)-\Phi(x)|\leqslant c\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{nt}}\right),$$

kur C -konstanta.

THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR THE SUMS OF THE DISCRETE RENEVAL PROCESSES

B. Kaminskienė

(Summary)

Let we have a sequence (ξ_i) of the independant nonnegative identically distributed random variables, having only integer values k with probabilities

$$p_k=\mathrm{P}\,\{\xi_i=k\},\qquad k=0,\,1,\,\ldots;\qquad i=1,\,2,\,\ldots$$

Let

$$S_0=0,\qquad S_m=\sum_{i=1}^{m}\xi_i,\qquad l=1,\,2,\,\ldots$$

The stochastic process $N(t)=\max\,(m:S_m\leqslant t)$ is called the renewal process.

In the paper a sequence $\{N_l(t)\}$ of the independant nonequally distributed renewal processes

$$N_l(t)=\max\left\{m:\sum_{i=1}^{m}\xi_i^{(l)}<t\right\},\qquad l=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

is examined.

Let

$$\mu_{l,j}=\mathrm{M}\,(\xi_i^{(l)})^j;\qquad \bar{\sigma}_n^2=\sum_{l=1}^{n}\frac{\mu_{l,2}-\mu_{l,2}^2}{\mu_{l,1}^3};$$

$$\Lambda_l(t)=\mathrm{M}\,N_l(t);\qquad \overline{N}_n(t)=\frac{1}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\sum_{l=1}^{n}[N_l(t)-\Lambda_l(t)];$$

$$F_{n,t}(x) = P\{\bar{N}_n(t) < x\}; \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

We prove that under conditions

$$\inf_l \mu_{l,1} > 0; \qquad \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \bar{\sigma}_n^2 > 0; \qquad \sup_l \mu_{l,3} < \infty,$$

and the maximal step of $\xi_1^{(l)}$ is equal to one for some l ($l=1, 2, \ldots, n$), the following inequality is valid:

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F_{n,t}(x) - \Phi(x)| \leqslant c\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{nt}}\right),$$

C being the constant.