1969

УДК–51:330.115

РЕПРЕЗЕНТАТИВНЫЕ ПОЛЕЗНОСТИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

А. И. Моркелюнас

1. Редуцированное множество полезностей

Имеется конечное множество альтернатив $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которых задан транзитивный порядок предпочтения $a_i \succ a_j$ или $a_i \sim a_j$ для $i, j = 1, \ldots, n = \{N\}$. Назовем порядок предпочтения между a_j, $j \in \{N\}$ профилем.

Предположим, что существуют нам неизвестные полезности $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ альтернатив $a_1, \ldots, a_n$ (E_n – n-мерное евклидово пространство). Так как нам известен только порядок предпочтений между альтернативами a_j, $j \in \{N\}$, то мы можем говорить, что вектор полезностей должен принадлежать множеству $X(A)$, индуцируемому заданным упорядочением альтернатив A. Определим это множество.

Пусть отношение R между числами x_i и x_j соответствует отношению порядка „$\geqslant$“, и, если $a_i R a_j$ в A, то следует $x_i R x_j$, где R между x_i и x_j означает „$>$“ или „$=$“, если $a_i \succ a_j$ или $a_i \sim a_j$. Обозначим:

$$X(a_i R a_j) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i R x_j, \ x \in E_n\},$$

$$X(A) = \bigcap_{i, j} X(a_i R a_j).$$

Множество $X(A)$, как видно из его определения, равно множеству образов всех монотонных преобразований какого-то $\mathbf{x}_0 \in X(A)$. Монотонность здесь означает, что преобразование не меняет естественное упорядочение $x_1, \ldots, x_n$. Так как каждый набор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X(A)$ полезностей эквивалентен любому своему линейному образу $a\mathbf{x} + b$, где $a > 0$, то с точностью до линейной эквивалентности множество $X(A)$ можно заменить множеством $\overline{X}(A) \subset X(A)$:

$$\overline{X}(A) = \left\{ \mathbf{x} \in X(A) : \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geqslant 0 \right\}.$$

Профиль может быть задан не только упорядочением $a_1, \ldots, a_n$, но может указываться и порядок „разностей“ $a_i^j = a_i - a_j$, где $a_i \succ a_j$, $i, j \in 1, \ldots, n$. Альтернатива a_i^j может быть интерпретирована как переход от a_j к a_i. В общем случае, наряду с порядком альтернатив $a_1, \ldots, a_n$, можно рассматривать порядок разностных альтернатив:

$$a_{i_1 \ldots i_l}^{j_1 \ldots j_k} = a_{i_1} + \ldots + a_{i_l} - a_{j_1} - \ldots - a_{j_k}$$

$$i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_k \in \{N\}$$

и соответствующие полезности

$$x_{i_1\ldots i_l}^{j_1\ldots j_k}=x_{i_1}+\ldots+x_{i_l}-x_{j_1}-\ldots-x_{j_k}.$$

Подробнее об интерпретации можно найти в [1].

Мы полагаем, что порядок разностных альтернатив задается исходя из порядка $a_1, \ldots, a_n$ и поэтому допускаем, что полезность $x_{i_1\ldots i_l}^{j_1\ldots j_k}$ альтернативы $a_{i_1\ldots j_l}^{j_1\ldots j_k}$ принадлежит множеству $\{x_{i_1}+\ldots+x_{i} \quad x_{j_1}-\ldots-x_{jk}\}$, где x_{i_1}, $\ldots, x_{i_l}\ x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ координаты $x\in\bar{X}(A)$.

2. Репрезентативные полезности. Дискретный случай

Предположим сначала, что в $\bar{X}(A)$ имеется конечное число точек, что естественно, ввиду возможности существования уровня чувствительности Тогда $\bar{X}(A)$ можно представить в виде таблицы:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\
\hline
a_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\
a_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_m & a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn}
\end{array} \qquad (1$$

где a_{ij} — полезность i-ой альтернативы в j-ой точке $(i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, n)$.

На множестве всех конечномерных матриц определим вектор-функционал $f[\bar{X}(A)]=\left(f_1[\bar{X}(A)], \ldots, f_m[\bar{X}(A)]\right)$, ставящий в соответствие вектор репрезентативных полезностей альтернатив. Ниже мы сформулируем четыре требования к функционалу f, служащих впоследствии его определением.

Аксиома 1. *Значения $f_i(X)$ не зависят от перестановки столбцов.*

Аксиома 2. *Если i-я строка имеет вид $(a, a, \ldots, a)$, то $f_i(X)=a$.*

Аксиома 3. *Если имеем $f(C)=0$, то $f(X+C)=f(X)$.*

Аксиома 4. $f(-X)=-f(X)$.

В случае, если мы хотим, чтобы $f_i(A)$ выражала полезность альтернативы a_i, исходя из матрицы полезностей (1), то аксиомы 1—4 выражают те интуитивные предпосылки, которым, возможно, руководствуется индивид при оценке полезностей альтернатив.

Теорема 1. *Существует единственное f, удовлетворяющее аксиомам 1—4 и $f_i[\bar{X}(A)]=\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}}{n}$, где a_{ij} — элементы матрицы A, $i=1, \ldots, m$;*

Доказательство. Заметим сначала, что аксиомы 1, 3, 4 позволяют прибавлять к любому столбцу и одновременно вычитать из другого столбца любой вектор. Действительно, пусть матрица C имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_2 & -c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_m & -c_m & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда по аксиоме 1:

$$f(-C)=f\left[\begin{pmatrix} -c_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -c_m & c_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right]=f\left[\begin{pmatrix} c_1 & -c_1 & \dots & 0 \\ c_2 & -c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_m & -c_m & \dots & 0 \end{pmatrix}\right]=f(C).$$

Отсюда $f(-C)-f(C)=0$, и на основании аксиомы 4 $f(-C)=f(C)=0$. По аксиоме 3 матрицу C можно добавлять к A не изменяя значения функционала f.

Из доказанного следует:

$$f\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\right]=f\left[\begin{pmatrix} a_{11}+a_{1n} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21}+a_{2n} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+a_{mn} & a_{m2} & \dots & a_{m,n-1} & 0 \end{pmatrix}\right]=\dots=$$

$$=f\left[\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right]=f\left[\begin{pmatrix} \Sigma a_{1j}-\frac{\Sigma a_{1j}}{n} & \frac{\Sigma a_{1j}}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \Sigma a_{2j}-\frac{\Sigma a_{2j}}{n} & \frac{\Sigma a_{2j}}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \Sigma a_{mj}-\frac{\Sigma a_{mj}}{n} & \frac{\Sigma a_{mj}}{n} & 0 & & 0 \end{pmatrix}\right]=\dots$$

$$\dots=f\left[\begin{pmatrix} \frac{\Sigma a_{1j}}{n} & \frac{\Sigma a_{1j}}{n} & \dots & \frac{\Sigma a_{1j}}{n} \\ \frac{\Sigma a_{2j}}{n} & \frac{\Sigma a_{2j}}{n} & \dots & \frac{\Sigma a_{2j}}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\Sigma a_{mj}}{n} & \frac{\Sigma a_{mj}}{n} & \dots & \frac{\Sigma a_{nj}}{n} \end{pmatrix}\right],$$

что по аксиоме 2 равно

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{2j}}{n}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{mj}}{n}\right)=(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m). \tag{2}$$

Единственность, очевидно, следует из хода доказательства.

То же самое получим, если вместо аксиом 3, 4 принять более сильную аксиому.

Аксиома 3′. *Если X и Y матрицы $m\times n$, то $f(X+Y)=f(X)+f(Y)$.*

3. Непрерывный случай

Вследствие предположения существования уровня чувствительности индивид на множестве $\bar{X}(A)$ различает конечное число точек $a_j\in\bar{X}(A)$, или наборов полезностей $(\bar{a}_{1j}, \dots, \bar{a}_{mj})$, ни одной из которых он не предпочитает перед остальными. Если он указывает эти точки явно, то репрезентативные полезности $f(A)=(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ можно определить на основании аксиом 1–4, как средние величины (2).

В общем случае точки $a_j \in \bar{X}(A)$ при заданном профиле не указываются. Предположим, что различаемые индивидом точки $a_j=(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ размещаются на $\bar{X}(A)$ равномерно и мера различаемых $a_j \in \bar{X}(A)$ равна объему $\bar{X}(A)$. Конечно, выбор подходящего неравномерного распределения лучше бы соответствовал действительности, но имеющаяся информация не дает для этого никаких оснований.

Теорема 2. *При неограниченном увеличении числа различаемых точек a_j, равномерно распределяемых на $\bar{X}(A)$, имеем $\bar{a}=(\bar{a}^1{}_{1j}, \ldots, \bar{a}_{mj})=x^c=(x^c_1, \ldots, x^c{}_m)$,* где *$x^c$ – центр тяжести $\bar{X}(A)$.*

Доказательство. Имеем:

$$\bar{X}(A) \subset \{\mathbf{x} : x_1+\ldots+x_m=1\}.$$

Разобьем отрезки изменения x_i, $i=1, \ldots, m$ на отрезки равной длины ε. В результате часть m-мерного евклидова пространства будет разбита на „куби ки“ Δ_r с объемами $\alpha\varepsilon^{m-1}$, $\alpha>0$. Пусть $X_\varepsilon(A)$ – множество Δ_r, полностью помещающихся в $\bar{X}(A)$. Объемы множеств $\bar{X}(A)$, $X_\varepsilon(A)$ обозначим V и V_ε. Очевидно, $V_\varepsilon \to V$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть в каждом Δ_j находится единственная точка a_j. Для $X_\varepsilon(A)$ согласно определению $\bar{a}$ (2) имеем:

$$\bar{a}_i=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}}{n}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{\frac{V_\varepsilon}{\Delta_j}} a_{ij}}{\frac{V_\varepsilon}{\Delta_j}}=\frac{\sum\limits_{j} a_{ij}\,\Delta_j}{V_\varepsilon}. \tag{3}$$

Переход к пределу $\varepsilon \to 0$ в (3) нам дает:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum\limits_{j} a_{ij}\,\Delta_j}{V_\varepsilon}=\frac{\int a_i\,dV}{V}. \tag{4}$$

Последнее выражение (4) и определяет координаты центра тяжести $\bar{X}(A)$. Заметим, что если в определении множества

$$\bar{X}(A)=\left\{x \in X(A) : \sum_{i=1}^{m} x_i=1,\ x_i \geq 0\right\}$$

вместо единицы возьмем какое-то другое число $a>0$, то координаты $(x^c_1, \ldots, x^c_m)=x^c$ центра тяжести $\bar{X}(A)$ станут $ax^c=(ax^c_1, \ldots, ax^c_m)$, иными словами, выбор числа a определяет масштаб полезностей.

Предполагаемый вид репрезентативных полезностей позволяет учесть дополнительную информацию (может быть, субъективную) о важности или весе альтернатив. Тогда в соответствии с весами изменится центр тяжести – репрезентативные полезности. Существование весов, очевидно, эквивалентно заданию неравномерного распределения различимых точек.

Приведем два примера, предполагая равномерное распределение.

Пример 1. Дан профиль:

$$a_1 \succ a_2 \succ \ \dots \ \succ a_m.$$

Найдем репрезентативные полезности. Имеем:

$$\widetilde{X}(A) = \left\{ \mathbf{x} : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_m \geqslant 0 \right\}$$

или·

$$\overline{X}(A) = \left\{ \mathbf{x} : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_1 - x_2 > 0, \ \dots, \ x_{m-1} - x_m > 0, \ x_m \geqslant 0 \right\}.$$

Известно, что для любого k-симплекса S_k в m-мерном евклидовом пространстве, где $1 \leqslant k \leqslant m+1$ и

$$S_k = \left\{ \mathbf{x} : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geqslant 0, \ x^i - \text{крайние точки } S_k \right\}$$

центр тяжести $x^c = \frac{1}{k}(x^1 + \ \dots \ + x^k)$. Множество $X(A)$ является m-мерным симплексом в E_m. Найдем его крайние точки. Для этого надо решить системы уравнений:

$$\begin{array}{l} x_1 + \dots + x_m = 1, \\ x_1 - x_2 \qquad = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m-1} - x_m = 0, \\ \hline \mathbf{x}^1 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right), \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 + \dots + x_m = 1, \\ x_1 - x_2 \qquad = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m-2} - x_{m-1} = 0 \\ x_m = 0 \\ \hline \mathbf{x}^2 = \left(\frac{1}{m-1}, \dots, \frac{1}{m-1}, 0\right), \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 + \dots + x_m = 1, \\ x_2 - x_3 \qquad = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m-1} - x_m = 0, \\ x_m = 0, \\ \hline \mathbf{x}^m = (1, \ 0, \dots, 0). \end{array}$$

Отсюда:

$$\mathbf{x}_1^c = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right),$$

$$\mathbf{x}_2^c = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbf{x}_m^c = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}\right).$$

Пример 2. Имеется профиль:

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3,$$

$$a_3 \succ a_2^3 \succ a_1^2.$$

Отсюда $\overline{X}(A)$ определяются системой неравенств

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_3 \geqslant x_2 - x_3 \geqslant x_1 - x_2 \geqslant 0.$$

Заменим $\overline{X}(A)$ на $\overline{Y}(A)$:

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 1,$$

$$y_1 - y_2 \geqslant 0, \ y_2 - y_1 \geqslant 0, \ y_1 \geqslant 0,$$

где

$$x_3=y_3,\ x_2=y_2+y_3,\ x_1=y_1+y_2+y_3. \tag{5}$$

Имеем, что центр тяжести $\overline{Y}(A)$ $y^c=(5, 11, 21)$ (с точностью до множителя) и поэтому, возвращаясь к $\widetilde{X}(A)$ по формулам (5), получим, что

$$\mathbf{x}^c=\left(\frac{37}{90}, \frac{32}{90}, \frac{21}{90}\right).$$

Для сравнения можно сказать, что в примере 1 при $m=3$

$$\mathbf{x}^c=\left(\frac{55}{90}, \frac{25}{90}, \frac{10}{90}\right).$$

Пользуясь случаем, я хочу поблагодарить Э. И. Вилкаса за советы.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
24.XII.1968

Литература

1. P. C. Fishburn, Decision and Value Theory, New York, Willey, 1964.

INDIVIDUALIŲ VERTINIMO PROFILIŲ REPREZENTATYVINIAI NAUDINGUMAI

A. Morkeliūnas

(*Reziumė*)

Siūlomas alternatyvų $a_1, \ldots, a_m$ vertinimo profilio atvaizdavimas į vektorių $(x_1, \ldots, x_m)=$ $=x\in E_m$, kur x priklauso nuo $a_1, \ldots, a_m$ vertinimo ir taip pat nuo alternatyvų „sumų“ arba „skirtumų“ vertinimo, kai tai duota.

THE REPRESENTATIVE UTILITIES OF INDIVIDUAL PREFERENCE CHAIN

A. Morkeliūnas

(*Summary*)

The representation of the preference chain of alternatives $a_1a_2 \ldots a_n$ to vector $(x_1 \ldots x_n)$ is proposed. The vector X depends on the preference of alternatives $a_1 \ldots a_n$ and also upon the preference of the „sums“ of alternatives or „differences“ of alternatives. if given.