УДК–519.21

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Л. Саулис

Рассматривается последовательность

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \dots \tag{1}$$

независимых одинаково распределенных случайных величин со средними $\mathbf{M}\xi_k=0$ и дисперсиями $\mathbf{D}\xi_k=\sigma^2<\infty$, $k=1, 2, \dots$

Пусть F_ξ, f_ξ, $\Gamma_k\{\xi\}$ означают функцию распределения, характеристическую функцию и семиинвариант порядка k случайной величины ξ соответственно. Введем еще следующие обозначения:

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j, \quad Z_n=\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}, \quad \varphi_{\xi_1}(z)=\mathbf{M}e^{z\xi_1},$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

$$p_x(y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}, & y\geqslant x,\\ 0, & y<x,\end{cases}$$

$$\mu_{xk}=\int_{-\infty}^{\infty}y^k p_x(y)\,dy=\frac{\int_x^\infty y^k e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}{\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}$$

Мы будем предполагать, что для последовательности (1) выполняются следующие условия Г. Крамера:

1)

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}\,|f_{\xi_1}(t)|<1; \tag{C}$$

2) существуют положительные постоянные A и C такие, что

$$|\ln\varphi_{\xi_1}(z)|_{|z|<A}\leqslant C \tag{A}$$

(имеется в виду главное значение логарифма).

Теорема 1. *Пусть для последовательности* (1) *выполнены условия* (A) *и* (C); *тогда существует постоянная* $\varepsilon>0$*) *такая, что в интервале* $1\leqslant x\leqslant \leqslant\varepsilon\sqrt{n}$ *для любого целого* $s\geqslant 2$ *имеет место соотношение*:

$$\frac{1-F_{Z_n}(x)}{1-\Phi(x)}=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[1+\sum_{\nu=1}^{s-1}\frac{x^\nu N_\nu(x)+K_\nu(x)}{(\sqrt{n})^\nu}+O\left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s\right)\right]. \tag{1}$$

Здесь

$$N_\nu(x)=\sum_{\lambda^{(1)}+\dots+\lambda^{(q)}=\nu}\frac{1}{q!}\prod_{p=1}^{q}\left(-b_{\lambda^{(p)}}\right)x^q\,\omega_q(x),$$

$$K_\nu(x)=\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}c_{ml,\nu-l}\,x^{\nu-l}\omega_{3l-2m}(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\nu-2}\sum_{l=1}^{j}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}\sum_{\lambda^{(1)}+\dots+\lambda^{(q)}=\nu-j}c_{ml,\nu-l}\frac{1}{q!}\prod_{p=1}^{q}\left(-b_{\lambda^{(p)}}\right)x^{\nu-l+q}\,\omega_{3l-2m+q}(x),$$

где $\sum\limits_{\lambda^{(1)}+\dots+\lambda^{(q)}=\nu}$ *означает суммирование по всем упорядоченным наборам целых* $\lambda^{(p)}>1$, *дающих в сумме* ν,

$$\omega_k(x)=\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\binom{k}{n}x^n\mu_{xk-n}\leqslant\frac{k!}{x^k},$$

$c_{ml,\nu-l}$ и $b_{\lambda^{(p)}}$ — *коэффициенты, зависящие только от семиинвариантов случайной величины* ξ_1,

$\lambda(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k t^k$ — *степенной ряд Крамера, сходящийся при достаточно малых значениях* $|t|$.

Из теоремы 1 следует, что при $s=2$

$$\frac{1-F_{Z_n}(x)}{1-\Phi(x)}=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[1+\frac{\frac{\gamma_3}{3!\,\sigma^3}\left(\omega_3(x)-3\,\omega_1(x)\right)}{\sqrt{n}}+O\left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right], \tag{2}$$

---

*) $\varepsilon=\varepsilon\left(A,\ C,\ \max|f_{\xi_1}(t)|\right)$ и определяется по отношениям (16), (22) и (29).

где

$$\omega_2(x)-3\omega_1(x)=(x^2-1)\ \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\left(1-\Phi(x)\right)}-x^3=$$

$$=-\frac{3}{x}+\frac{12}{x^3}-\frac{84}{x^5}+\ldots$$

Если не требовать выполнения условия (С), то в этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнено условие* (А) *и величины* (1) *не решетчаты, то в интервале* $1\leqslant x\leqslant \varepsilon\sqrt{n}$ *имеет место соотношение*

$$1-F_{Z_n}(x)=\exp\left\{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{\gamma_3}{3!\,\sigma^3}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)-x^3e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)\right)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{x}{n}\right)+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]. \quad (3)$$

Заметим, что вместо условия (А) иногда удобно пользоваться условием С. Н. Бернштейна

$$|\mathbf{M}\xi_1^k|\leqslant k!\,H_2K^{k-2}\sigma^2, \quad (4)$$

при всех $k\geqslant 3$, где H_2 и К — некоторые положительные числа.

В этом случае (см. [2] стр. 135) можно положить

$$A=\left(\max\left\{\mathrm{K}(1+2H_2),\quad \sqrt{2}\,\sigma\right\}\right)^{-1} \quad (5)$$

и

$$C=\frac{3}{2}A^2\sigma^2. \quad (6)$$

Доказательство. Следуя Г. Крамеру [5], введем вспомогательную последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_j(h)\}$, $j=1, 2, \ldots$ с функцией распределения

$$F_{\xi_1(h)}(x)=e^{-\ln\varphi_{\xi_1}(h)}\int_{-\infty}^{x}e^{hy}\,dF_{\xi_1}(y), \quad (7)$$

где h — произвольное действительное число из интервала $(-A, A)$. Положим

$$m(h)=\mathbf{M}\,\xi_1(h),\quad \sigma^2(h)=\mathbf{M}\left(\xi_1(h)-m(h)\right)^2.$$

$$S_n(h)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j(h),\quad Z_n(h)=\frac{S_n(h)-nm(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}}.$$

Для любого $0\leqslant h<A$ (см. [5] стр. 169)

$$1-F_{Z_n}(x)=\exp\left\{n\left(\ln\varphi_{\xi_1}(h)-hm(h)\right)\right\}\int_{\frac{\sigma x-\sqrt{n}\,m(h)}{\sigma(h)}}^{\infty}e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\,dF_{Z_n(h)}(y). \quad (8)$$

Пусть

$$\gamma_k=\Gamma_k\{\xi_1\} \text{ и } \gamma_k(h)=\Gamma_k\{\xi_1(h)\}, \quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Очевидно

$$\varphi_{\xi_1(h)}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\,dF_{\xi_1(h)}(x)=\frac{\varphi_{\xi_1}(h+z)}{\varphi_{\xi_1}(h)},$$

так что производящая функция $\ln\varphi_{\xi_1(h)}(z)$ семиинвариантов случайной величины $\xi_1(h)$ существует при всех достаточно малых значениях z, и

$$\gamma_s(h)=\frac{d^s\ln\varphi_{\xi_1}(h)}{dh^s}=\sum_{k=s}^{\infty}\frac{\gamma_k h^{k-s}}{(k-s)!}, \tag{9}$$

так как

$$\ln\ \varphi_{\xi_1}(h)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_k h^k}{k!}.$$

Полагая здесь $s=1$ и $s=2$, находим, что

$$m(h)=\frac{d}{dh}\ln\varphi_{\xi_1}(h)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_k h^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{10}$$

$$\sigma^2(h)=\frac{d^2}{dh^2}\ln\varphi_{\xi_1}(h)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_k h^{k-2}}{(k-2)!}. \tag{11}$$

Ряды (9), (10) и (11) сходятся при $|h|<A$.

В силу равенства $\gamma_k=[d^k\ln\varphi_{\xi_1}(z)/dz^k]_{z=0}$, неравенств Коши и условия (A) имеем

$$|\gamma_k|\leqslant\frac{k!\,C}{A^k}. \tag{12}$$

Отсюда и (9) получаем, что

$$\gamma_s(h)=\sum_{k=s}^{\infty}\frac{\gamma_k h^{k-s}}{(k-s)!}=\frac{\Theta C}{A^s}\sum_{k=s}^{\infty}k(k-1)\ \ldots\ (k-s+1)\left(\frac{h}{A}\right)^{k-s}=$$

$$=\frac{\Theta C}{A^s}\cdot\frac{s!}{\left(1-\frac{h}{A}\right)^{s+1}}. \tag{13}$$

Здесь и везде далее Θ обозначает величину, не превосходящую единицы по модулю.

Характеристическая функция $f(t,\ h)$ случайной величины $\xi_1(h)$ равна

$$\frac{\varphi_{\xi_1}(h+it)}{\varphi_{\xi_1}(h)}.$$

Положим

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}\,|f(t,\ h)|=g(h). \tag{14}$$

Из условия (С) следует, что $g(0)<1$, а из непрерывности функции $g(h)$ в окрестности точки 0 получаем, что существует $\delta_1>0$, что

$$\varlimsup_{|t|\to\infty} |f(t,\ h)|<1, \tag{15}$$

при

$$|h|\leqslant\delta_1. \tag{16}$$

Следовательно, существуют γ и c такие, что для $|t|>\gamma$, $|h|\leqslant\delta_1$

$$\sup_{\substack{|t|>\gamma\\ |h|\leqslant\delta_1}} |f(t,\ h)|\leqslant c<1. \tag{17}$$

Приведем некоторые известные оценки для $\sup\limits_{|t|>\gamma} |f_\xi(t)|$. Пусть $\bar{p}_\xi(x)$ плотность абсолютно непрерывной компоненты функции распределения $F_\xi(x)$

$$F_\xi(x)=\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{p}_\xi(x)\,dx+\beta S(x),\quad \alpha+\beta=1.$$

Следуя В. А. Статулявичусу, введем $\mathfrak{M}=\{\Delta_i,\ C_i,\ i=1,2,\ldots\}$ – произвольный набор непересекающихся прямоугольников, с основаниями Δ_i и высотами $C_i\leqslant\infty$. Тогда при $|t|>\gamma$ имеет место оценка

$$\sup_{|t|>\gamma}|f_\xi(t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{\alpha}{3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q_i^3|}{(\Delta_i+2\pi\gamma^{-1})\,C_i^2}\right\},$$

где

$$Q_i'=\int\limits_{\Delta_i}\min\left(C_i,\ \bar{p}_\xi(x)\right)dx,\quad p_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{p}_\xi(x-y)\,\bar{p}_\xi(y)\,dy.$$

Если

$$\bar{p}_\xi\leqslant C\leqslant\infty\ \text{ и }\ \sigma^2=\mathbf{D}\xi<\infty,$$

то

$$\sup_{|t|>\gamma}|f_\xi(t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{\alpha}{96}\ \frac{1}{(2\sigma+\pi\gamma^{-1})\,C^2}\right\}.$$

Нам понадобится асимптотическое разложение для функции распределения $F_{Z_n(h)}(y)$. С этой целью воспользуемся асимптотическим разложением для характеристической функции $f_{Z_n(h)}(t)$ (см. [9]). В интервале

$$|t|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{\sigma^{s+2}(h)}{\nu_{s+2}(h)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$f_{Z_n(h)}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-1}\frac{P_{\nu h}(it)}{(\sqrt{n})^{\nu}}\right)+$$

$$+\frac{2^{s+1}\nu_{s+2}(h)\,|t|^{s+2}\,e^{-\frac{t^2}{4}}}{0{,}99^s\,\sigma^{s+2}(h)\,(\sqrt{n})^s}, \tag{18}$$

где $\nu_{s+2}(h)=\mathbf{M}\,|\,\xi_1(h)-m(h)\,|^{s+2}$ — абсолютный центральный момент $(s+2)$-ого порядка случайной величины $\xi_1(h)$.

Здесь

$$P_{\nu h}(it)=\sum_{r=1}^{\nu} d_{r\nu h}(it)^{\nu+2r} \tag{19}$$

— многочлен степени 3ν с коэффициентами, зависящими от h.

Пусть

$$\varkappa_\nu(h)=\frac{\gamma_\nu(h)}{\sigma^\nu(h)}=\frac{\sum\limits_{k=\nu}^{\infty}\frac{\gamma_k h^{k-\nu}}{(k-\nu)!}}{\left(\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_k h^{k-2}}{(k-2)!}\right)^{\frac{\nu}{2}}}. \tag{20}$$

Нетрудно показать, что

$$\varkappa_3(h)=\frac{\gamma_3}{\sigma^3}+\frac{2\gamma_2\gamma_4-3\gamma_3^2}{2\sigma^6}\,\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{21\gamma_3^3+4\gamma_2^2\gamma_5-22\gamma_2\gamma_3\gamma_4}{8\sigma^9}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2+\dots,$$

$$\varkappa_4(h)=\frac{\gamma_4}{\sigma^4}+\frac{\gamma_2\gamma_5-2\gamma_3\gamma_4}{\sigma^7}\,\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{4\gamma_3^2\gamma_4-3\gamma_2\gamma_3\gamma_5-2\gamma_2\gamma_4^2}{2\sigma^{10}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2+\dots,$$

$$\varkappa_3^2(h)=\frac{\gamma_3^2}{\sigma^6}+\frac{2\gamma_2\gamma_3\gamma_4-3\gamma_3^3}{\sigma^9}\,\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{15\gamma_3^4-17\gamma_2\gamma_3^2\gamma_4+2\gamma_2^2\gamma_4^2+2\gamma_2^2\gamma_3\gamma_5}{2\sigma^{12}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2+\dots$$

Легко показать, что

$$P_{\nu h}(\omega)=\frac{\varkappa_{\nu+2}(h)}{(\nu+2)!}\,\omega^{\nu+2}+\sum_{r=1}^{\nu-1}\frac{(\nu-r)\,\varkappa_{\nu-r+2}(h)}{\nu\,(\nu-r+2)!}\,\omega^{\nu-r+2}P_{rh}(\omega). \tag{21}$$

Положим

$$H=\frac{C}{A^2\sigma^2}.$$

Тогда, как нетрудно заметить, при выполнении условии (4) $H=\frac{3}{2}$.

Пусть в дальнейшем

$$0\leqslant h\leqslant\delta A, \tag{22}$$

где $0<\delta<\delta_H$, а δ_H выбрано так, чтобы оно удовлетворяло условию

$$\frac{6H\delta_H}{(1-\delta_H)^3}=1.$$

При $H=\frac{3}{2}$, $\delta_H=0{,}0851$.

Вычислим $\sigma^2(h)$:

$$\sigma^2(h)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_k h^{k-2}}{(k-2)!}=\sigma^2+\frac{\Theta Ch}{A^3}\sum_{k=3}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{h}{A}\right)^{k-3}=$$

$$=\sigma^2\left(1+\frac{6\Theta Hh}{A\left(1-\frac{h}{A}\right)^3}\right)=\sigma^2(1+\Theta\rho), \tag{23}$$

где

$$\rho = \frac{6H\delta}{(1-\delta)^3} \,. \tag{24}$$

Из (20), (23) и (13) имеем:

$$|\varkappa_\nu(h)|_{|h|=\delta A} \leqslant \frac{\nu!\,H}{(1-\delta)^{\nu+1}(1+\Theta\rho)^{\frac{\nu}{2}}} \left(\frac{1}{\sigma A}\right)^{\nu-2}. \tag{25}$$

Отсюда, вспомнив (21), получаем

$$|P_{\nu h}(\omega)|_{|h|=\delta A} \leqslant \frac{|\omega|^\nu}{\left((1-\delta)(1+\Theta\rho)^{\frac{1}{2}}\right)^\nu} \left(\frac{1}{\sigma A}\right)^\nu \cdot \sum_{r=1}^{\nu} \left(\frac{H\omega^3}{(1-\delta)^3(1+\Theta\rho)}\right)^r. \tag{26}$$

Далее,

$$P_{\nu h}(\omega) = P_{\nu 0}(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{\nu k}(\omega)\,h^k, \tag{27}$$

где

$$P_{\nu k}(\omega) = \frac{\left(P^{(k)}_{\nu h}(\omega)\right)_{h=0}}{k!}.$$

Из формулы Коши и (26) находим, что

$$|P_{\nu k}(\omega)| \leqslant \left(\frac{1}{\delta A}\right)^k \frac{|\omega|^\nu}{\left((1-\delta)(1+\Theta\rho)^{\frac{1}{2}}\right)^\nu} \left(\frac{1}{\sigma A}\right)^\nu \cdot \sum_{r=1}^{\nu} \left(\frac{H\omega^3}{(1-\delta)^3(1+\Theta\rho)}\right)^r.$$

Рассмотрим уравнение

$$x = \frac{\sqrt{n}\,m(h)}{\sigma}\,. \tag{28}$$

Из (10) для $m(h)$, находим

$$x = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k h^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\sigma^2 h + \frac{\Theta H\sigma^3 h^2}{A} \sum_{k=3}^{\infty} k\left(\frac{h}{A}\right)^{k-3}\right) =$$

$$= \sigma\sqrt{n}\,h\left(1 + \frac{\Theta Hh}{A}\,\frac{3}{\left(1-\frac{h}{A}\right)^2}\right) = \sigma\sqrt{n}\,h\left(1 + \frac{\Theta\rho}{2}(1-\delta)\right), \tag{29}$$

где как и ранее,

$$\rho = \frac{6H\delta}{(1-\delta)^3}\,.$$

Отсюда и (27) получаем:

$$P_{\nu k}(\omega)=P_{\nu 0}(\omega)+\sum_{k=1}^{\infty} P^*_{\nu k}(\omega)\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k. \tag{30}$$

где

$$|P^*_{\nu k}(w)|=\left|\frac{P_{\nu k}(w)}{\sigma^k\left(1+\frac{\Theta\rho}{2}(1-\delta)\right)^k}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{\sigma A}\right)^{\nu+k}\frac{|\omega|^\nu}{\bar\delta^k\left((1-\delta)(1+\Theta\rho)^{\frac{1}{2}}\right)^\nu}\sum_{r=1}^{\nu}\left(\frac{H\omega^2}{(1-\delta)^2(1+\Theta\rho)}\right)^r, \tag{31}$$

$$\bar\delta=\frac{\delta}{2}(2-\rho+\rho\delta). \tag{32}$$

Итак, имеем

$$P_{\nu h}(\omega)=P_{\nu 0}(\omega)+\sum_{k=1}^{j} P^*_{\nu k}(\omega)\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k+\sum_{k=j+1}^{\infty} P^*_{\nu k}(\omega)\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k. \tag{33}$$

Оценим

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} P^*_{\nu k}(w)\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k:$$

$$\left|\sum_{k=j+1}^{\infty} P^*_{\nu k}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\omega|^\nu}{\left((1-\delta)(1+\Theta\rho)^{\frac{1}{2}}\right)^\nu}\left(\frac{1}{\sigma A}\right)^\nu\sum_{r=1}^{\nu}\left(\frac{H\omega^2}{(1-\delta)^2(1+\Theta\rho)}\right)^r\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\frac{x}{\bar\delta A\sigma\sqrt{n}}\right)^k=$$

$$=\frac{|\omega|^\nu}{\left((1-\delta)(1+\Theta\rho)^{\frac{1}{2}}\right)^\nu}\left(\frac{1}{\sigma A}\right)^\nu\sum_{r=1}^{\nu}\left(\frac{H\omega^2}{(1-\delta)^2(1+\Theta\rho)}\right)^r\frac{\left(\frac{x}{\bar\delta A\sigma\sqrt{n}}\right)^{j+1}}{\left(1-\frac{x}{\bar\delta A\sigma\sqrt{n}}\right)}, \tag{34}$$

при

$$|x|<\bar\delta A\sigma\sqrt{n}.$$

Как и в (19),

$$P^*_{\nu k}(it)=\sum_{r=1}^{\nu} d_{r\nu k}(it)^{\nu+2r} \tag{35}$$

– многочлены степени 3ν с коэффициентами, независящими от h. Из (31) следует, что

$$|d_{r\nu k}|\leqslant\left(\frac{1}{\sigma A}\right)^{\nu+k}\frac{1}{\bar\delta^k\left((1-\delta)(1+\Theta\rho)^{\frac{1}{2}}\right)^\nu}\left(\frac{H}{(1-\delta)^2(1+\Theta\rho)}\right)^r. \tag{36}$$

Из (18), (33), и оценки (34) вытекает, что

$$f_{Z_n(h)}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-1}\sum_{l=1}^{\nu}\frac{P^*_{l,\nu-l}(it)\,x^{\nu-l}}{(\sqrt{n})^{\nu}}\right)+$$

$$+O\left(\frac{|t|^{s+2}}{(\sqrt{n})^{s}}e^{-\frac{t^2}{4}}\right)+O\left(\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-1}\sum_{r=1}^{\nu}|t|^{\nu+2r}x^{s-\nu}}{(\sqrt{n})^{s}}\right), \tag{37}$$

для

$$|t|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{\sigma^{s+2}(h)}{\nu_{s+2}(h)}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Здесь

$$P^*_{l0}(it)=P_{l0}(it),$$

$$P^*_{l,\nu-l}(it)=\sum_{r=1}^{l}d_{rl,\nu-l}(it)^{l+2r},$$

$$|d_{rl,\nu-l}|\leqslant\left(\frac{1}{A\sigma}\right)^{\nu}\frac{1}{\delta^{\nu-l}\left((1-\delta)(1+\Theta\rho)^{\frac{1}{2}}\right)^{l}}\left(\frac{H}{(1-\delta)^{3}(1+\Theta\rho)}\right)^{r}. \tag{38}$$

Под символом O здесь и далее понимается постоянная, зависящая лишь от s, δ, A и C, и не зависящая от n и h.

Вспомнив (21), (30) и выражения для $\varkappa_\nu(h)$, имеем:

$$P_{10}(it)=\frac{\gamma_3}{3!\,\sigma^3}(it)^3,\quad P^*_{11}(it)=\frac{2\gamma_2\gamma_4-3\gamma_3^2}{12\sigma^6}(it)^3,$$

$$P^*_{12}(it)=\frac{21\gamma_3^3+4\gamma_2^2\gamma_5-22\gamma_2\gamma_3\gamma_4}{3!\,8\sigma^9}(it)^3,\ \ldots;$$

$$P_{20}(it)=\frac{\gamma_4}{4!\,\sigma^4}(it)^4+\frac{10\gamma_3^2}{6!\,\sigma^6}(it)^6,$$

$$P^*_{21}(it)=\frac{\gamma_2\gamma_5-2\gamma_3\gamma_4}{4!\,\sigma^7}(it)^4+\frac{\gamma_2\gamma_3\gamma_4-3\gamma_3^3}{2(3!)^2\sigma^9}(it)^6,\ \ldots$$

Для получения асимптотического разложения для $F_{Z_n(h)}(y)$ воспользуемся теоремой 1.5.2 (см. [8] стр. 24). В соответствии с этой теоремой

$$|F_{Z_n(h)}(y)-G(y)|\leqslant\frac{24}{\pi}\frac{A}{T}+\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f_{Z_n(h)}(t)-g(t)}{t}\right|dt, \tag{39}$$

где

$$G(y)=\Phi(y)+\sum_{\nu=1}^{s-1}\sum_{l=1}^{\nu}\frac{P^*_{l,\nu-l}\left(-\Phi(y)\right)x^{\nu-l}}{(\sqrt{n})^{\nu}},$$

$A=\max|G'(y)|<\infty$, $g(t)$ — характеристическая функция $G(y)$, $T=n^s$. Оценим интеграл

$$\varepsilon=\int_{-T}^{T}\left|\frac{f_{Z_n(h)}(t)-g(t)}{t}\right|dt.$$

Пусть

$$T_{sn}=\frac{\sqrt{n}}{10}\left(\frac{\sigma^{s+2}(h)}{\nu_{s+2}(h)}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

В силу (37) имеем:

$$\int_{-T_{sn}}^{T_{sn}}\left|\frac{f_{Z_n(h)}(t)-g(t)}{t}\right|dt=O\left(\frac{x^{s-1}}{(\sqrt{n})^s}\right)$$

для $x\geqslant 1$.

Далее, из (15) следует, что существует такое $c>0$, что при

$$|t|>\frac{1}{10}\left(\frac{\sigma^{s+2}(h)}{\nu_{s+2}(h)}\right)^{\frac{1}{s}}\frac{1}{\sigma(h)} \text{ и } |h|\leqslant\delta_1, |f(t,h)|<e^{-c}.$$

Тогда при $|t|>T_{sn}$

$$|f_{Z_n(h)}(t)|=\left|f^n\left(\frac{t}{B_n(h)},h\right)\right|<e^{-cn}.$$

Но,

$$\int_{T_{sn}\leqslant|t|\leqslant T}\left|\frac{f_{Z_n(h)}(t)-g(t)}{t}\right|dt\leqslant\int_{T_{sn}\leqslant|t|\leqslant T}\left|\frac{f_{Z_n(h)}(t)}{t}\right|dt+$$

$$+\int_{T_{sn}\leqslant|t|\leqslant T}\left|\frac{g(t)}{t}\right|dt\leqslant 2e^{-cn}\log\frac{T}{T_{sn}}+o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^s\right).$$

Итак, при $x\geqslant 1$

$$\varepsilon=O\left(\frac{x^{s-1}}{(\sqrt{n})^s}\right)$$

при достаточно больших n.

Теперь согласно (39) получаем, что равномерно относительно y и $x\geqslant 1$

$$F_{Z_n(h)}(y)=\Phi(y)+\sum_{\nu=1}^{s-1}\sum_{l=1}^{\nu}\frac{P^*_{l,\nu-l}(-\Phi(y))x^{\nu-l}}{(\sqrt{n})^\nu}+O\left(\frac{x^{s-1}}{(\sqrt{n})^s}\right)=$$

$$=\Phi(y)+\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\nu=1}^{s-1}\sum_{l=1}^{\nu}\frac{Q_{l,\nu-l}(y)x^{\nu-l}}{(\sqrt{n})^\nu}+O\left(\frac{x^{s-1}}{(\sqrt{n})^s}\right). \tag{40}$$

Здесь

$$Q_{l,\nu-l}(y)=\sqrt{2\pi}\,e^{+\frac{y^2}{2}}P^*_{l,\nu-l}\left(-\Phi(y)\right)-$$

многочлены от y, а

$$P^*_{l,\nu-l}(-\Phi)=\sum_{r=1}^{l}(-1)^{l+2r}d_{rl,\nu-l}\frac{d^{l+2r}}{dy^{l+2r}}\Phi(y).$$

Оценка коэффициентов $d_{rl,\nu-l}$ дана в (30).

Вспомнив (4) и (28), имеем:

$$1-F_{Z_n}(x)=\exp\left\{n\left(\ln\varphi_{\xi_1}(h)-hm(h)\right)\right\}\int_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\,dF_{Z_n(h)}(y).$$

Пусть

$$I=\int\limits_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\,dF_{Z_n(h)}(y)\,. \tag{41}$$

Интеграл I разобьем на два:

$$\left.\begin{aligned} I_1&=\int\limits_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\,d\Phi(y),\\ I_2&=\int\limits_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\Big(F_{Z_n(h)}(y)-\Phi(y)\Big)\,. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Вычислим величину $h\sigma(h)\sqrt{n}$. Из (7) находим, что

$$h^2\sigma^2(h)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_k h^k}{(k-2)!}\,. \tag{43}$$

В свою очередь из уравнения $x=\dfrac{\sqrt{n}\,m(h)}{\sigma}$ и (6) получаем, что

$$h=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k, \tag{44}$$

где

$$a_1=\frac{1}{\sigma},\quad a_2=-\frac{\gamma_3}{2\sigma^4},\quad a_3=-\frac{\gamma_2\gamma_4-3\gamma_3^2}{6\sigma^7},\quad a_4=-\frac{\gamma_2^2\gamma_5-10\gamma_2\gamma_3\gamma_4+15\gamma_3^3}{24\sigma^{10}}\,.$$

Коэффициенты a_k из (44) определяются первыми $(k+1)$ семиинвариантами. Кроме того, из неравенств Коши для коэффициентов степенного ряда (44) находим, что

$$|a_k|\leqslant\frac{\delta_H}{\bar\delta_H^k A^{k-1}\sigma^k},\quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{45}$$

поскольку $|h(z)|_{|z|=\bar\delta_H A\sigma\sqrt{n}}<\delta_H A$. Ряд (44) сходится для $|x|<\bar\delta\,A\sigma\sqrt{n}$. Из определения $\bar\delta=\dfrac{\delta}{2}(2-\rho+\rho\delta)$ вытекает, что $\bar\delta>\dfrac{\delta(1+\delta)}{2}$ и лишь при $\delta=\delta_H$, т.е. при $\rho=1$ достигается равенство $\bar\delta_H=\dfrac{\delta_H(1+\delta_H)}{2}$.

При $H=\dfrac{3}{2}$, $\bar\delta_H=0{,}046$. Из (43) и (44) получаем, что

$$h\sigma(h)\sqrt{n}=x\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}b_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k\right), \tag{46}$$

где

$$b_2=\frac{2\gamma_2\gamma_4-3\gamma_3^2}{24\sigma^6},\qquad b_3=\frac{\gamma_2^2\gamma_5-6\gamma_2\gamma_3\gamma_4+6\gamma_3^2}{24\sigma^9},\ \ldots$$

Вспомнив (23) и (29), имеем

$$|h\sigma(h)\sqrt{n}|_{|z|=\bar\delta_H A\sigma\sqrt{n}}\leqslant\sqrt{2}\,\delta_H A\sigma\sqrt{n}.$$

Коэффициенты b_k определяются первыми $(k+2)$ семиинвариантами, причем

$$|b_k| \leqslant \frac{\sqrt{2}\,\delta_H}{\delta_H^{k+1}(\sigma A)^k}, \quad k=2,\ 3,\ \ldots \tag{47}$$

Положим

$$\tau=\sum_{k=2}^{\infty} b_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k.$$

Тогда $h\sigma(h)\sqrt{n}=x(1+\tau)$. Нетрудно заметить, что

$$|\tau|< c_1\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2,$$

где c_1 — некоторая положительная постоянная.

Легко показать, что для

$$1\leqslant x\leqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\bar{\delta}_H A\sigma\sqrt{n}$$

$$|\tau|\leqslant c_1\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}. \tag{47}$$

Далее,

$$\tau=\sum_{k=2}^{\infty} b_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k=\sum_{k=1}^{s-1} b_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k+\sum_{k=s}^{\infty} b_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k. \tag{48}$$

Пользуясь (47), получаем

$$\sum_{k=s}^{\infty} b_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k\leqslant\frac{9\delta_H}{8\,\bar{\delta}_H^{s+1}(\sigma A)^s}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s \tag{49}$$

при

$$1\leqslant x\leqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}\bar{\delta}_H A\sigma\sqrt{n}.$$

Прейдем к вычислению интеграла I_1:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y-\frac{y^2}{2}}\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^{\infty} e^{-x(1+\tau)\,y-\frac{y^2}{2}}\,dy=$$

$$=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(-1)^k\tau^k}{k!}\,x^k\int_0^{\infty} e^{-xy-\frac{y^2}{2}}\,y^k\,dy+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{(-1)^k\tau^k}{k!}\,x^k\int_0^{\infty} e^{-xy-\frac{y^2}{2}}\,y^k\,dy,$$

где $l=\frac{s}{2}$, при s четном $l=\left[\frac{s}{2}\right]+1$ при s-нечетном. Далее,

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{(-1)^k\tau^k}{k!}\,x^k\int_0^{\infty} e^{-xy-\frac{y^2}{2}}\,y^k\,dy\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{|\tau|^k}{k!}\,\frac{x^k\,k!}{x^{k+1}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}\sum_{k=l}^{\infty}|\tau|^k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}\,\frac{|\tau|^l}{1-|\tau|},$$

так как

$$\int_0^\infty e^{-xy} y^k\,dy = \frac{k!}{x^{k+1}}\,.$$

Если $x \geqslant 1$, то

$$\max\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right),\ \frac{3}{4}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}\right\} \leqslant \left(1-\Phi(x)\right)e^{\frac{x^2}{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}\,. \tag{50}$$

Тогда из (47) и (50) получаем, что

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(-1)^k \tau^k}{k!}\, x^k e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{\frac{t^2}{2}} (t-x)^k\,dt +$$

$$+ e^{\frac{x^2}{2}} \left(1-\Phi(x)\right) O\left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s\right). \tag{51}$$

Вспомнив выражения для μ_{xk} и используя тот факт, что при $x>0$

$$1-\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{1}{x} + \sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^l (2l-1)!!}{x^{2l+1}} + \Theta\left(\frac{(2k+1)!!}{x^{2k+3}}\right)\right),$$

где $|\Theta|<1$, находим, что

$$\mu_{x1} = x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{10}{x^5} - \frac{74}{x^7} + \dots,$$

$$\mu_{x2} = x^2 + 2 - \frac{2}{x^2} + \frac{10}{x^4} - \frac{74}{x^6} + \dots,$$

$$\mu_{x3} = x^3 + 3x + 0 \cdot \frac{1}{x} + \frac{6}{x^3} - \frac{54}{x^5} + \dots,$$

$$\mu_{x4} = x^4 + 4x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} - \frac{44}{x^4} + \dots,$$

$$\mu_{x5} = x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} - \frac{50}{x^3} + \dots$$

Пусть

$$\omega_q(x) = \sum_{l=0}^{q} (-1)^l \binom{q}{l} x^l \mu_{xq-l} \leqslant \frac{q!}{x^q}\,, \tag{52}$$

Отсюда следует, что

$$I_1 = e^{\frac{x^2}{2}} \left(1-\Phi(x)\right) \left[1 + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(-1)^k \tau^k}{k!}\, x^k \omega_k(x) + O\left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s\right)\right]. \tag{53}$$

Для установления коэффициента при $\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^\nu$ в разложении $e^{-xy\tau}$ по степеням $xy\tau$ воспользуемся соотношениями между моментами и семиинвариантами (см. [4] стр. 344):

$$m_k = \sum_{\lambda^{(1)}+\dots+\lambda^{(q)}=k} \frac{1}{q!}\,\frac{k!}{\lambda^{(1)}!\dots\lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^{q} (\gamma_{\lambda^{(p)}}), \tag{54}$$

где $\sum\limits_{\lambda^{(1)}+\dots+\lambda^{(q)}=k}$ означает суммирование по всем упорядоченным наборам целых неотрицательных $\lambda^{(p)}$, дающих в сумме k. Используя это соотношение и (48), (49), и (53), окончательно получаем, что

$$I_1=e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)\left[1+\sum_{\nu=2}^{s-1}\frac{x^\nu N_\nu(x)}{(\sqrt{n})^\nu}+O\left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s\right)\right], \tag{55}$$

где

$$N_\nu(x)=\sum_{\lambda^{(1)}+\dots+\lambda^{(q)}=\nu}\frac{1}{q!}\prod_{p=1}^{q}\left(-b_{\lambda^{(p)}}\right)x^q\,\omega_q(x),$$

$\sum\limits_{\lambda^{(1)}+\dots+\lambda^{(q)}=\nu}$ означает суммирование по всем упорядоченным наборам целых $\lambda^{(p)}>1$, дающих в сумме ν,

$$N_1(x)=0,\quad N_\nu(x)=O(1),\quad \text{для}\quad \nu=2,\ \dots,\ s-1.$$

Приступим к вычислению интеграла I_2. Принимая во внимание (42), имеем:

$$I_2=\int_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\,d\left(F_{Z_n(h)}(y)-\Phi(y)\right)=I_2^{(1)}+I_2^{(2)}.$$

Здесь

$$I_2^{(1)}=\int_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\,dq_n(y),$$

$$I_2^{(2)}=\int_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\,dQ_n(y),$$

$$q_n(y)=\sum_{\nu=1}^{s-1}\sum_{l=1}^{\nu}\frac{P^*_{l,\nu-l}\left(-\Phi(y)\right)x^{\nu-l}}{(\sqrt{n})^\nu},$$

$\sup\limits_y|Q_n(y)|\leqslant B\dfrac{x^{s-1}}{(\sqrt{n})^s}$, где постоянная B не зависит от n и h.

Далее,

$$I_2^{(2)}=\int_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\,dQ_n(y)=-Q_n(0)+h\sigma(h)\sqrt{n}\int_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\,Q_n(y)dy=$$

$$=O\left(\frac{x^{s-1}}{(\sqrt{n})^s}\right)=e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)O\left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^s\right). \tag{56}$$

Остается вычислить $I_2^{(1)}$. Заметим, что

$$\frac{d}{dy}P^*_{l,\nu-l}(-\Phi)=P^*_{l,\nu-l}(-\varphi),$$

где

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

$P^*_{l,\nu-l}(-\varphi)$ получается из многочлена $P^*_{l,\nu-l}(it)$, если вместо степеней $(it)^j$ подставить

$$(-1)^j \frac{d^j}{dy^j}\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}H_j(y),$$

где

$$H_j(y)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\frac{(-1)^k j!}{k!\,(j-2k)!\,2^k}y^{j-2k}.$$

Тогда, вспомнив (38), получаем, что

$$dq_n(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-1}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{l}\frac{d_{rl,\nu-l}\,x^{\nu-l}H_{l+2r}(y)}{(\sqrt{n})^{\nu}}\,dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-1}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{l}\sum_{j=0}^{\left[\frac{l+2r}{2}\right]}\frac{d_{jrl,\nu-l}\,x^{\nu-l}y^{l+2r-2j}}{(\sqrt{n})^{\nu}}\,dy, \tag{57}$$

где

$$d_{jrl,\nu-l}=d_{rl,\nu-l}\frac{(-1)^j(l+2r)!}{j!\,(l+2r-2j)!\,2^j}. \tag{58}$$

Равенство (57) можно переписать и в таком виде:

$$dq_n(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-1}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}\frac{c_{ml,\nu-l}\,y^{3l-2m}x^{\nu-l}}{(\sqrt{n})^{\nu}}\,dy, \tag{59}$$

где коэффициенты $c_{ml,\nu-l}$ выражаются через $d_{jrl,\nu-l}$. Привлекая (59), имеем:

$$I_2^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\nu=1}^{s-1}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}\frac{c_{ml\,\nu-l}\,x^{\nu-l}}{(\sqrt{n})^{\nu}}\int_0^{\infty}e^{-x(1+\tau)y-y^2/2}y^{3l-2m}\,dy. \tag{60}$$

Таким же образом, как и в (49), получаем, что

$$\tau=\sum_{k=2}^{s-1-\nu}b_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k+\frac{9\delta_H}{8\,\delta_H^{s+1-\nu}(\sigma A)^{s-\nu}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{s-\nu}, \tag{61}$$

для всех $\nu=1,2,\dots s-3$. Вычислим интеграл

$$\int_0^{\infty}e^{-x(1+\tau)y-y^2/2}y^{3l-2m}\,dy:$$

$$\int_0^{\infty}e^{-x(1+\tau)y-y^2/2}y^{3l-2m}\,dy=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k\tau^k}{k!}x^k\int_0^{\infty}e^{-xy-y^2/2}y^{k+3l-2m}\,dy+$$

$$+\sum_{k=p}^{\infty}\frac{(-1)^k\tau^k}{k!}x^k\int_0^{\infty}e^{-xy-y^2/2}y^{k+3l-2m}\,dy,$$

где $p=\frac{s-\nu}{2}$, если $(s-\nu)$ — четно, и $p=\left[\frac{s-\nu}{2}\right]+1$, если $(s-\nu)$ — нечетно. Имеем:

$$\left|\sum_{k=p}^{\infty}\frac{(-1)^k\tau^k}{k!}x^k\int_0^{\infty}e^{-xy-y^2/2}y^{k+3l-2m}\,dy\right|\leqslant\sum_{k=p}^{\infty}\frac{|\tau|^k(k+3l-2m)!}{x^{3l-2m+1}}=$$

$$=\frac{1}{x^{3l-2m+1}}\sum_{k=p}^{\infty}(k+3l-2m)(k+3l-2m-1)\ldots(k+1)|\tau|^k.$$

Пусть

$$S(\tau)=\sum_{k=p+3l-2m}^{\infty}|\tau|^k=\frac{|\tau|^{p+3l-2m}}{(1-|\tau|)}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{k=p}^{\infty}(k+3l-2m)\ldots(k+1)|\tau|^k$$

есть $(3l-2m)$-ая производная суммы $S(\tau)$. Используя формулу Лейбница, получаем:

$$\left(S(\tau)\right)^{(3l-2m)}=\sum_{i=0}^{3l-2m}\binom{3l-2m}{i}\left(\tau^{p+3l-2m}\right)^{(3l-2m-i)}\left((1-\tau)^{-1}\right)^{(i)}. \tag{62}$$

Учитывая (62) и (50), получаем, что

$$\left|\sum_{k=p}^{\infty}\frac{(-1)^k\tau^k}{k!}x^k\int_0^{\infty}e^{-xy-y^2/2}y^{k+3l-2m}\,dy\right|=$$

$$=O\left(\frac{1}{x^{3l-2m+1}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{2p}\right)=e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)O\left(\frac{1}{x^{3l-2m}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{2p}\right). \tag{63}$$

Из (50), (61) находим, что

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k\tau^k}{k!}x^k\int_0^{\infty}e^{-xy-y^2/2}y^{k+3l-2m}\,dy=$$

$$=e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k\tau^k}{k!}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}(t-x)^{k+3l-2m}\,dt=$$

$$=e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\left[\omega_{3l-2m}(x)+\sum_{k=2}^{s-1-\nu}\sum_{\lambda^{(1)}+\cdots+\lambda^{(q)}=k}\frac{1}{q!}\prod_{p=1}^{q}(-b_{\lambda^{(p)}})\times\right.$$

$$\left.\times x^q\omega_{q+3l-2m}(x)\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k\right]+e^{+\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)O\left(\frac{1}{x^{3l-2m}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{s-\nu}\right). \tag{64}$$

Соотношения (63), (64) и (60) позволяют утверждать, что

$$I_2^{(1)}=e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)\left[\sum_{\nu=1}^{s-1}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}c_{ml,\nu-l}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}x^{\nu-l}\,\omega_{3l-2m}(x)+\right.$$
$$+\sum_{\nu=1}^{s-3}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}\sum_{k=2}^{s-1-\nu}\sum_{\lambda^{(1)}+\dots+\lambda^{(q)}=k}\frac{1}{q!}\prod_{p=1}^{q}(-b_{\lambda^{(p)}})\times$$
$$\left.\times\frac{x^{\nu-l+k+q}}{(\sqrt{n})^{k+\nu}}\,\omega_{q+3l-2m}(x)+O\left(\frac{x^{s-2}}{(\sqrt{n})^{s}}\right)\right],\tag{65}$$

так как при $\nu=s-2$

$$\int_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\,d\left(\sum_{l=1}^{s-2}\frac{P^*_{l,s-2-l}\left(-\Phi(y)\right)x^{s-2-l}}{(\sqrt{n})^{s-2}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{l=1}^{s-2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}c_{ml,s-2-l}\frac{x^{s-2-l}}{(\sqrt{n})^{s-2}}\int_0^\infty e^{-xy-y^2/2}\,e^{-xy\tau}\,y^{3l-2m}\,dy=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{l=1}^{s-2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}c_{ml,s-2-l}\frac{x^{s-2-l}}{(\sqrt{n})^{s-2}}\int_0^\infty e^{-xy-y^2/2}\,y^{3l-2m}\,dy+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{l=1}^{s-2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}c_{ml,s-2-l}\frac{x^{s-2-l}}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-(1)^k\tau^k}{k!}x^k\int_0^\infty e^{-xy-y^2/2}\,y^{k+3l-2m}\,dy.$$

Используя (63) при $p=1$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{l=1}^{s-2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}c_{ml,s-2-l}\frac{x^{s-2-l}}{(\sqrt{n})^{s-2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\tau^k}{k!}x^k\int_0^\infty e^{-xy-y^2/2}\,y^{k+3l-2m}\,dy=$$
$$=e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)O\left(\sum_{l=1}^{s-2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}\frac{x^{s-2-l+2}}{(\sqrt{n})^{s}\,x^{3l-2m}}\right)=$$
$$=e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)O\left(\frac{x^{s-2}}{(\sqrt{n})^{s}}\right),\quad x\geqslant 1.$$

Аналогично для $\nu=s-1$

$$\int_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}\,y}\,d\left(\sum_{l=1}^{s-1}\frac{P^*_{l,s-1-l}\left(-\Phi(x)\right)x^{s-1-l}}{(\sqrt{n})^{s-1}}\right)=$$
$$=e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)\left(\sum_{l=1}^{s-1}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}c_{ml,s-1-l}\frac{x^{s-1-l}}{(\sqrt{n})^{s-1}}\,\omega_{3l-2m}(x)+\right.$$
$$+e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)O\left(\frac{x^{s-2}}{(\sqrt{n})^{s}}\right).$$

Положим

$$\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}c_{ml,\nu-l}\,x^{\nu-l}\,\omega_{3l-2m}(x)=M_\nu(x).$$

Нетрудно показать, что

$$\sum_{\nu=1}^{s-3}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}\sum_{k=2}^{s-l-\nu}\sum_{\lambda^{(1)}+\dots+\lambda^{(q)}=k}\frac{1}{q!}\prod_{p=1}^{q}\left(-b_{\lambda^{(p)}}\right)c_{ml,\,\nu-l}\times$$

$$\times\frac{x^{\nu-l+k+q}}{(\sqrt{n})^{k+\nu}}\,\omega_{q+3l-2m}(x)=\sum_{\nu=3}^{s-1}\frac{L_\nu(x)}{(\sqrt{n})^{\nu}},$$

где

$$L_\nu(x)=\sum_{j=1}^{\nu-2}\sum_{l=1}^{j}\sum_{m=0}^{\left[\frac{3l}{2}\right]}\sum_{\lambda^{(1)}+\dots+\lambda^{(q)}=\nu-j}\frac{1}{q!}\prod_{p=1}^{q}\left(-b_{\lambda^{(p)}}\right)c_{ml,\,\nu-l}\times$$

$$\times x^{\nu-l+q}\,\omega_{3l-2m+q}(x).$$

Согласно (65), имеем

$$I_2^{(1)}=e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)\left[\sum_{\nu=1}^{s-1}\frac{K_\nu(x)}{(\sqrt{n})^{\nu}}+O\left(\frac{x^{s-2}}{(\sqrt{n})^{s}}\right)\right], \tag{66}$$

где

$$K_\nu(x)=M_\nu(x)+L_\nu(x),\quad L_1(x)=L_2(x)=0,$$

$K_\nu(x)=O(x^{\nu-2})$. Из (55), (56) и (66) вытекает, что

$$I=e^{\frac{x^2}{2}}\left(1-\Phi(x)\right)\left[1+\sum_{\nu=1}^{s-1}\frac{x^{\nu}N_\nu(x)+K_\nu(x)}{(\sqrt{n})^{\nu}}+O\left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{s}\right)\right]. \tag{67}$$

Остается рассмотреть $n\left(\ln\varphi_{\xi_1}(h)-hm(h)\right)$ из (8). Имеем

$$n\left(\ln\varphi_{\xi_1}(h)-hm(h)\right)=n\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_k h^k}{k!}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_k h^{k-1}}{(k-1)!}\right)=-n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{k!}\gamma_k h^k=$$

$$=-\frac{x^2}{2}+\sum_{k=3}^{\infty}d_k\frac{x^k}{(\sqrt{n})^{k-2}}=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{k}.$$

Нетрудно заметить, что

$$d_k=-\frac{a_{k-1}}{k}\sigma,$$

где a_k — коэффициенты ряда $h=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{k}$.

Итак, имеем, что

$$n\left(\ln\varphi_{\xi_1}(h)-hm(h)\right)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right), \tag{68}$$

где

$$\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{k},$$

а

$$\lambda_k=-\frac{a_{k+2}}{k+3}\sigma.$$

Из (45) получаем

$$\lambda_k = \Theta \frac{\delta_H}{(k+3)\,\bar{\delta}_H^{k+2}} \left(\frac{1}{\sigma A}\right)^{k+1}.$$

Ряд $\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$ сходится при $|t| < \bar{\delta}_H$. Соотношения (67) и (68) дают соотношение (1).

Перейдем к доказательству теоремы 2. С этой целью нам понадобится лемма, аналогичная 3.3.1 (см. [8] стр. 118).

Лемма. *Если функция распределения $F_{\xi_1(h)}(y)$ нерешетчата, то каково бы ни было число $\omega > 0$, существует $\delta_1 > 0$ и такая функция $\lambda(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$, что*

$$I = \int_{\omega}^{\lambda(n)} \frac{\sup\limits_{|h|<\delta_1} |f^n|(t, h)}{t}\, dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{69}$$

Доказательство. Если $\lim |f_{\xi_1}(t)| < 1$, то, как уже заметили ранее, существуют числа δ_1, γ и c такие, что

$$\sup_{\substack{|t|>\gamma \\ |h|<\delta_1}} |f(t, h)| \leqslant c < 1.$$

В этом случае соотношение (69) очевидно выполняется. Если же

$$\overline{\lim}\, |f_{\xi_1}(t)| = 1,$$

то

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}} \sup_{|h|<\delta_1} |f(t, h)| = 1$$

и $|f(t, h)| < 1$, для $|t| < \infty$, $|h| < \delta_1$, так как распределение $\xi_1(h)$ не решетчато. Следовательно, можно определить функцию $b(t)$ посредством равенства

$$b(t) = \frac{1}{1 - \max\limits_{\substack{\omega \leqslant \tau < t \\ |h| \leqslant A_1}} |f(\tau, h)|},$$

где $A_1 < A$. Функция $b(t)$ непрерывна, не убывает и $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = \infty$. В дальнейшем, дословно повторяя доказательство соотношения (69) при $h=0$, данное Б. В. Гнеденко (см. [1] стр. 223), имеем, что

$$I = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Лемма доказана.

С помощью настоящей леммы докажем, что равномерно по y

$$F_{Z_n(h)}(y) - \Phi(y) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{n}}\, \frac{\gamma_3(h)}{3!\,\sigma^3(h)}\, (1 - y^2)\, e^{-y^2/2} =$$

$$= F_{Z_n(h)}(y) - G(y) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{70}$$

В соответствии с теоремой 1.5.2. (см. [8] стр. 25)

$$|F_{Z_n(h)}(y)-G(y)|\leqslant\frac{24}{\pi}\frac{A}{T}+\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f_{Z_n(h)}(t)-g(t)}{t}\right|dt$$

при $|h|\leqslant A_1$, $A_1<A$, где $A=\max|G'(y)|<\infty$, $g(t)$ — характеристическая функция $G(y)$, а $T=\lambda(n)\sqrt{n}$ и $\lambda(n)$ определяются из леммы. Осталось показать, что

$$\int_{-T}^{T}\left|\frac{f_{Z_n(h)}(t)-g(t)}{t}\right|dt=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{71}$$

Интеграл (71) не превосходит суммы интегралов

$$I_1+I_2+I_3=\int_{-T_{3n}}^{T_{3n}}\left|\frac{f_{Z_n(h)}(t)-g(t)}{t}\right|dt+\int_{T_{3n}\leqslant|t|\leqslant T}\left|\frac{f_{Z_n(h)}(t)}{t}\right|dt+$$

$$+\int_{T_{3n}\leqslant|t|\leqslant T}\left|\frac{g(t)}{t}\right|dt,$$

где

$$T_{3n}=\frac{\sigma^3(h)\sqrt{n}}{24\gamma_3(h)},\quad g(t)=\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{\gamma_3(h)(it)^3}{3!\,\sigma^3(h)\sqrt{n}}\right).$$

Привлекая для оценки этих интегралов теорему 3.2.1. (см. [8] стр. 114) и доказанную выше лемму, находим, что

$$I_1=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\quad I_2=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\quad I_3=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{72}$$

Оценка (72), вместе с (71), доказывает (70). Далее, проведя доказательство аналогичное, доказательству теоремы 1, получим соотношение (3).

Пользуясь случаем, искренне благодарю В. А. Статулявичуса за постоянное внимание и ценные указания при выполнении этой работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
5.II.1969

Литература

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949.
2. В. А. Статулявичус, On large deviations, Z. Wahrschein-lichkeitstheorie verw, Geb. 6. (1966), 133–144.
3. В. А. Статулявичус, Докторская диссертация, 1967.
4. В. П. Леонов и А. Н. Ширяев, К технике вычисления семиинвариантов, Теория вероят. и ее примен., IV в. 3(1959), 342–355.
5. Г. Крамер, Об одной новой предельной теореме теории вероятностей, Успехи математических наук, т. X (1944), 166–178.
6. В. В. Петров, Асимптотическое поведение вероятностей больших уклонений, Теория вероят. и ее применен., XIII, т. 3(1968), 432–443.
7. И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.

8. И. А. Ибрагимов, Ч. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, М., Изд.-во „Наука", 1965.
9. А. Бикялис, Об остаточных членах в асимптотических разложениях для характеристических функций и их производных, Лит. матем. сб., VII, № 4 (1967), 571–581.
10. Л. Саулис, О больших уклонениях для плотностей, Лит. матем. сб., VIII, № 1 (1968), 153–162.

DIDELIŲ NUKRYPIMŲ TIKIMYBIŲ ASIMPTOTINIS IŠDĖSTYMAS

L. Saulis

(*Reziumė*)

Straipsnyje nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių (1) sekai, tenkinančia (A) ir (C) sąlygas, duotas normuotos sumos tikimybinio pasiskirstymo didelių nukrypimų asimptoninis išdėstymas.

Be to, duotas asimptoninis išdėstymas nerėtiniams atsitiktiniams dydžiams, tenkinantiems A) sąlygą.

ON THE ASYMPTOTIC EXPANSIONS FOR THE PROBABILITIES OF LARGE DEVIATIONS

L. Saulis

(*Summary*)

The paper deals with the asymptotic expansions for the large deviations of the distribution function of the normed sum of independent identically distributed random variables (1) satisfyin the conditions (A) and (C).

The asymptotic expansion in the case of non-lattice random variables, satisfying the condition (A) is obtained as well.