IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–511

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МАЛЕРА–СПРИНДЖУКА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Р. Слесорайтене

К. Малер в 1932 г. [1] высказал предположение, что при любом $n \geqslant 1$ и любом фиксированном $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n| > h^{-n-\varepsilon},$$

$h = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|)$, $h \neq 0$, для почти всех вещественных x (в смысле лебеговской меры) имеет только конечное число решений в целых $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

В. Спринджук [2], обобщая ряд предыдущих работ Малера, Коксмы, Левека, Кубилюса, Фолькмана и Каша, доказал справедливость этого предположения. Естественно напрашивается следующее обобщение этого результата на полиномы от нескольких переменных. Пусть m и k – произвольные целые положительные числа, n – целое положительное число,

$$n \leqslant \binom{m+k}{k}$$

$i_{1l}, i_{2l}, \ldots i_{kl}$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ – системы целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенству $i_{1l} + i_{2l} + \ldots + i_{kl} \leqslant m$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – независимые вещественные переменные. Можно предположить [2], что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left| \sum_{l=1}^{n} a_l x_1^{i_{1l}} x_2^{i_{2l}} \ldots x_k^{i_{kl}} \right| < h^{-n+1-\varepsilon},$$

$h = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)$, $h \neq 0$, почти для всех $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ в смысле k-мерной лебеговской меры имеет только конечное число решений в целых $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

В случае $m = 1$ это утверждение действительно имеет место для любого k в силу известной теоремы Хинчина [3]. В. Спринджук [4] доказал справедливость этого предположения для $m = 2$ и любого k с помощью метода тригонометрических сумм.

Цель настоящей заметки состоит в доказательстве предположения для $m = 2$ и $k = 2$ без использования тригонометрических сумм.

В дальнейшем нам понадобится следующий известный результат.

Лемма. *При любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *неравенство*

$$|a_1 x + a_2 y + a_3| < h^{-n+1-\varepsilon}$$

$h = \max |a_1|, |a_2|, |a_3|)$, *почти для всех* (x, y) *имеет лишь конечное число решений в целых* a_1, a_2, a_3 *в предположении, что среди них* $3-n$ $(1 \leqslant n \leqslant 3)$ *фиксированных чисел постоянно равны нулю.*

Переходим к рассмотрению полиномов второй степени от двух переменных. Для краткости обозначим через R класс полиномов второй степени

$$P(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}$$

$(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0)$ с целыми коэффициентами a_{ij}, причем среди них $6-n$ $(1 \leqslant n \leqslant 6)$ фиксированных равны нулю, иными словами, соответствующие члены полинома отсутствует Через R_r будем обозначать множество приводимых в поле рациональных чисел полиномов из R. Черес $\| P \|$ будем обозначать высоту полинома P. Q_h (O) означает меру множество тех $(x, y) \in T$ (T — квадрат: $k \leqslant x < k+1$, $l \leqslant y < l+1$, где $k, l > 0$ — целые числа), для которых неравенство

$$|P(x, y)| < h^{-n+1-\varepsilon}, \tag{1}$$

удовлетворено хотя бы одним полиномом из O высоты h.

Теорема 1. *При любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *неравенство* (1) *почти для всех* (x, y) *имеет лишь конечное число решений в полиномах* $P \in R_r$.

Доказательство. Каждый полином $P \in R_r$ мы можем представить в виде

$$P(x, y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2),$$

где α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2)$ являются целыми числами.

1. Если $n \geqslant 3$, то в силу леммы почти для всех (x, y)

$$|\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i| \geqslant h_i^{-2-\varepsilon} \geqslant h^{-n+1-\varepsilon},$$

$h_i = \max (|\alpha_i|, |\beta_i|, |\gamma_i|)$, $(i = 1, 2)$ при достаточно больших h_i. Известно, что $h \geqslant h_1 h_2$ [5], поэтому почти для всех (x, y)

$$|P(x, y)| \geqslant h^{-n+1-\varepsilon} \tag{2}$$

при достаточно больших h.

2. Предположим, что $n=2$. Тогда хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33} тождественно равен нулю. Следовательно, полином $P(x, y)$ имеет хотя бы один из следующих трех видов

$$P(x, y) = (\beta_1 y + \gamma_1)(\beta_2 y + \gamma_2),$$

$$P(x, y) = (\alpha_1 x + \gamma_1)(\alpha_2 x + \gamma_2),$$

$$P(x, y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y).$$

Во всех трех случаях рассуждаем аналогично.

Рассмотрим, например, первый случай. Из леммы следует, что почти для всех y, а тем самым и почти для всех (x, y).

$$|\beta_i y + \gamma_i| > h_i^{-1-\varepsilon} = h_i^{-n+1-\varepsilon},$$

$h_i = \max (|\beta_i|, |\gamma_i|)$, $i = 1, 2$, при достаточно больших h_i. Следовательно, почти для всех (x, y) имеет место (2) .

3. В случае $n=1$ неравенство (2) почти для всех (x, y) тривиально.

Теорема 2. *При любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *неравенство* (1) *почти для всех* (x, y) *имеет лишь конечное число решений в полиномах* $P \in R^*$ $(R^* = R - R_r)$.

Доказательство. Утверждение теоремы достаточно доказать почти для всех $(x, y) \in T$. Для любого $P \in R^*$ обозначим через q_P меру множества тех $(x, y) \in T$, для которых выполнено (1).

1. Пусть $S_1 \in R^*$ класс полиномов с условием $a_{22} \neq 0$. Для любого $x_0 \in [k, k+1)$ пусть $\sigma_P(x_0)$ обозначает линейную меру множества точек y на прямой $x = x_0$, удовлетворяющих условиям $l \leqslant y < l+1$, $|P(x_0, y)| < h^{-n+1-\varepsilon}$. Очевидно,

$$q_P = \int\limits_k^{k+1} \sigma_P(x)\, dx. \tag{3}$$

Оценим $\sigma_P(x)$. Помимо тривиальной оценки $\sigma_P(x) \leqslant 1$ нам понадобится еще другая оценка, которую сейчас докажем.

Для фиксированного $x_0 \in [k, k+1)$ положим $P_1(y) = P(x_0, y)$.

Обозначим через $D(x_0)$ дискриминант полинома $P_1(y)$

$$D(x_0) = A_{33}x_0^2 + 2A_{13}x_0 + A_{11},$$

где

$$A_{33} = a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}, \qquad A_{13} = a_{12}a_{23} - 2a_{22}a_{13}, \qquad A_{11} = a_{23}^2 - 4a_{22}a_{33}.$$

$D(x_0)$ не равен тождественно нулю, так как в противном случае $P(x, y)$ принадлежал бы к классу R_r. Пусть y_1 и y_2 — корни полинома $P_1(y)$, w — любое вещественное число. Положим для определенности

$$\min(|w - y_1|, \quad |w - y_2|) = |w - y_1|.$$

Умножая неравенство

$$|y_1 - y_2| \leqslant |y_1 - w| + |w - y_2| \leqslant 2|w - y_2|$$

на $2|a_{22}|$ получаем

$$\sqrt{|D(x_0)|} \leqslant 4|a_{22}(w - y_2)|.$$

Умножаем еще на $|w - y_1|$. Тогда

$$|w - y_1| \sqrt{|D(x_0)|} \leqslant 4|P_1(w)|.$$

Отсюда

$$\min(|w - y_1|, \quad |w - y_2|) \leqslant \frac{4|P_1(w)|}{\sqrt{|D(x_0)|}} \tag{4}$$

в предположении, что $D(x_0) \neq 0$. Совершенно очевидным образом это верно и в случае, когда $\min(|w - y_1|, |w - y_2|) = |w - y_2|$. Следовательно, (4) всегда справедливо, если только $D(x_0) \neq 0$.

Отсюда заключаем, что

$$\sigma_P(x_0) \leqslant \frac{16h^{-n+1-\varepsilon}}{\sqrt{|D(x_0)|}}, \tag{5}$$

если $D(x_0) \neq 0$.

1.1. Пусть $U_1 \subset S_1$ класс полиномов, удовлетворяющих условию $A_{33} \neq 0$. Обозначаем через Θ_1, Θ_2 корни полинома $D(x) = 0$.

Разобъем интервал $[k, k+1)$ на два множества B и $B^* = [k, k+1) - B$, где B состоит из тех x, для которых

$$\min(|x - \Theta_1|, \quad |x - \Theta_2|) > h^{-n-\varepsilon}.$$

Очевидно, мера множества B^*

$$mB^* \leqslant 4h^{-n-\varepsilon}. \tag{6}$$

Оценим теперь q_P по формуле (3). Для оценки $\sigma_P(x)$ на множестве B^* используем тривиальную оценку $\sigma_P(x) \leqslant 1$, а на множестве B – оценку (5):

$$q_P \leqslant mB^* + \int\limits_B \sigma_P(x)\,dx \leqslant 4h^{-n-\varepsilon} + \frac{h^{-n+1-\varepsilon}\ln h}{\sqrt{|A_{33}|}}, \quad h > 1. \tag{7}$$

Пусть $V_1 \subset U_1$ множество тех $P \in U_1$, для которых ни один из a_{11}, a_{12}, a_{22}, не равен нулю. Известно [6], что

$$\sum{}' \frac{1}{\sqrt{|a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}|}} \ll h, \tag{8}$$

где Σ' означает, что суммирование берется по всем a_{11}, a_{12}, a_{22}, удовлетворяющим условиям; $\max(|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{22}|) = h$, $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} \neq 0$. Отсюда следует, что

$$\sum{}'' \frac{1}{\sqrt{|a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}|}} = \sum{}''' \frac{1}{\sqrt{|a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}|}} \ll h^2, \tag{9}$$

где в первой сумме суммирование производится по всем a_{11}, a_{12}, a_{22}, удовлетворяющим условиям: $|a_{11}| \leqslant h$, $|a_{12}| \leqslant h$, $|a_{22}| \leqslant h$, $A_{33} \neq 0$, а во второй сумме суммирование ведется по a_{ij}, удовлетворяющим следующим условиям: $\max(|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{22}|) = h_1$, $h_1 \leqslant h$, $A_{33} \neq 0$.

Оценим меру

$$Q_h(V_1) \leqslant \sum_{\substack{P \in V_1 \\ \|P\| = h}} q_P = \sum{}^{*} q_P + \sum{}^{**} q_P,$$

где первая сумма берется по всем $P \in V_1$, удовлетворяющим условию $\max|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{22}|) = h$, а вторая сумма – по всем остальным $P \in V_1$, $\|P\| = h$. Так как в силу (7) и (8)

$$\sum{}^{*} q_P \ll h^{-n-\varepsilon} \cdot h^{n-1} + h^{-n-1-\varepsilon} \ln h \cdot h \cdot h_{n-3} \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}, \qquad h > 1,$$

и согласно (7) и (9)

$$\sum{}^{**} q_P \ll h^{-n-\varepsilon} \cdot h^{n-1} + h^{-n+1-\varepsilon} \ln h\, h^2 \cdot h^{n-4} \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}, \qquad h > 1,$$

$$Q_h(V_1) \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Но этих оценок недостаточно, если хотя бы один из a_{11}, a_{12}, a_{22} равен нулю. Так как $a_{22} \neq 0$, $A_{33} \neq 0$, то нам предстоит разобрать следующие случаи:

а) $a_{12} = 0$, $\quad a_{11} \neq 0$,

в) $a_{11} = 0$, $\quad a_{12} \neq 0$.

Обозначим через $V_2 \subset U_1$ множество полиномов P, удовлетворяющих условию а), а через $V_3 \subset U_1$ – множество P, удовлетворяющих условию в).

а) Оценки (8), (9), заменим следующими:

$$\Big|\sum_{\substack{a_{11},\, a_{22} \\ \max(|a_{11}|,\, |a_{22}|)=h}} \frac{1}{\sqrt{|a_{11}a_{22}|}} \ll 1, \tag{8'}$$

$$\sum_{\substack{a_{11},\, a_{22} \\ \max(|a_{11}|,\, |a_{22}|)\leq h}} \frac{1}{\sqrt{|a_{11}a_{22}|}} \ll h. \tag{9'}$$

в) В этом случае для доказательства достаточно оценки:

$$\sum_{|a_{22}|<h} \frac{1}{|a_{22}|} \ll \ln h, \qquad h>1.$$

Нетрудно показать, что

$$Q_h(V_2)\leq h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}, \qquad Q_h(V_3)\leq h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}},$$

отсюда следует, что

$$Q_h(U_1)\ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{10}$$

1.2. Обозначим через $U_2\subset S_1$ класс полиномов, удовлетворяющих условию $A_{33}=0$, $A_{13}\neq 0$. В этом случае полином $D(x)=0$ имеет один корень Θ_1.

Аналогично случаю 1.1 вводим множества B и B^*. Повторяя те же рассуждения, получаем, что

$$q_P\ll h^{-n-\varepsilon}+\frac{h^{-n+1-\varepsilon}}{\sqrt{|A_{13}|}}\int_B \frac{dx}{\sqrt{|x-\Theta_1|}}\ll h^{-n-\varepsilon}+\frac{h^{-n+1-\varepsilon}}{\sqrt{|A_{13}|}}.$$

Пусть $W_1\subset U_2$ множество тех P, для которых $a_{11}=a_{12}=0$, а W_2 — множество всех остальных $P\in U_2$.

В силу условия $A_{33}=0$ для числа полиномов $P\in W_2$ высоты h справедлива оценка $\ll h^{n-2}$. Получаем:

$$Q_h(W_2)\leq \sum_{\substack{P\in W_2 \\ \|P\|=h}} q_P\ll h^{-n+1-\varepsilon}\cdot h^{n-2}=h^{-1-\varepsilon}.$$

Оценим $Q_h(W_1)$. Так как $A_{13}\neq 0$, обязательно $a_{13}\neq 0$ и, пользуясь относительно a_{22}, a_{13} оценками, аналогичными (8'), (9'), получаем, что

$$Q_h(W_1)\ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Отсюда

$$Q_h(U_2)\leq Q_h(W_1)+Q_h(W_2)\ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{11}$$

1.3. Пуста $U_3\subset S_1$ класс полиномов с условиями $A_{33}=0$, $A_{13}=0$, $A_{11}\neq 0$. Из (5) следует, что

$$q_P\ll \frac{h^{-n+1-\varepsilon}}{\sqrt{|A_{11}|}}\ll h^{-n+1-\varepsilon}.$$

Рассматривая этот случай аналогично случаю 1.2, получаем

$$Q_h(U_3) \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Из (10), (11) и последней оценки следует, что

$$Q_h(S_1) \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{12}$$

2. Пусть S_2 — класс полиномов $P \in R^*$, для которых $a_{22}=0$, $a_{11} \neq 0$. Аналогично случаю $a_{22} \neq 0$ доказывается, что мера

$$Q_h(S_2) \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{13}$$

3. Остается рассмотреть класс полиномов $S_3 \subset R^*$ с условием $a_{11}=a_{22}=0$, $a_{12} \neq 0$. Обозначим через y_1 корень полинома $P_1(y)=0$. Из неравенства

$$|(a_{12}x_0+a_{23})(y-y_1)| < h^{-n+1-\varepsilon}$$

следует, что

$$\sigma_P(x_0) \leqslant \frac{2h^{-n+1-\varepsilon}}{|a_{12}x_0+a_{23}|}$$

при условии, что $a_{12}x_0+a_{23} \neq 0$. Обозначим через ϑ корень уравнения $a_{12}x+$ $+a_{23}=0$. Аналогично предыдущему

$$q_P \ll h^{-n-\varepsilon} + \frac{h^{-n+1-\varepsilon}}{|a_{12}|} \int\limits_B \frac{dx}{|x-\vartheta|} \ll$$

$$\ll h^{-n-\varepsilon} + \frac{h^{-n+1-\varepsilon}}{|a_{12}|} \ln h \ll \frac{h^{-n+1-\varepsilon} \ln h}{|a_{12}|}, \qquad h>1,$$

и

$$Q_h(S_3) \ll \sum_{\substack{P \in S_3 \\ \|P\|=h}} q_P \ll \sum_{\substack{a_{12} \\ |a_{12}|<h}} \frac{1}{|a_{12}|} \ln h \cdot h^{n-2} \cdot h^{-n+1-\varepsilon} +$$

$$+h^{-1-\varepsilon} \ln h \ll h^{-1-\varepsilon} \ln^2 h \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{14}$$

В силу (12), (13) и (14) ,

$$Q_h(R^*) \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Используя теперь лемму Бореля-Кантелли на плоскости [2] можем утверждать, что почти для всех $(x, y) \in T$ (1) имеет конечное число решений в полиномах $P(x, y) \in R^*$. А из последнего непосредственно следует утверждение теоремы.

Работа написана под руководством профессора И. Кубилюса, которому я выражаю искреннюю благодарность.

Каунасский Политехнический институт

Поступило в редакцию 1.XII.1968

Литература

1. K. Mahler, Über das Mass der Menge aller S-Zahlen, Math. Ann., 106, 1932.
2. В. Г. Спринджук, Проблема Малера в метрической теории чисел. Издат. „Наука и техника", Минск, 1967.
3. A. Khintchine, Zur Metrischen Teorie der Diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr., 24, 1926.
4. В. Г. Спринджук, О теоремах А. Я. Хинчина и И. П. Кубилюса, Лит. матем. сб., II, № 1 (1962), 147–152.
5. В. Г. Спринджук. Метрическая теорема о наименьших значениях целочисленных полиномов от многих переменных, Докл. Ак. наук БССР, т. XI, № 1, 1967.
6. F. Kasch, Über eine metrische Eigenschaft der S-Zahlen, Math. Zeitschr.,Bd. 70, 1958.

MALERIO – SPRINDŽIUKO TEOREMOS ANALOGAS ANTROS EILĖS DVIEJŲ KINTAMŲJŲ POLINOMAMS

R. Sliesoraitienė

(*Reziumė*)

K.Maleris [1] 1932 metais iškėlė hipotezę, kad bet kuriam $n \geqslant 1$ ir fiksuotam $\varepsilon > 0$ nelygybė

$$|a_0+a_1x+ \dots +a_nx^n| < h^{-n-\varepsilon},$$

$$h = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|), \quad h \neq 0$$

beveik visiems x (Lebego mato prasme) turi tik baigtinį sprendinių skaičių sveikais $a_0, a_1, \dots, a_n$.

V. Sprindžiukas [2], apibendrindamas eilę Malerio, Koksmos, Leveko, Kubiliaus, Folkmano ir Kašo darbų, įrodė šios hipotezės teisingumą. Galima spėti, kad galioja šios teoremos apibendrinimas kelių kintamųjų polinomams. Sakykime, m ir k – bet kurie sveiki teigiami skaičiai, n – sveikas teigiamas skaičius

$$n \leqslant \binom{m+k}{k}$$

$i_{1l}, i_{2l}, \dots, i_{kl}$ $(l=1, 2, \dots, n)$ – sveikų neneigiamų skaičių sistemos. Tarkime, kad galioja $i_{1l}+ +i_{2l}+ \dots +i_{kl} \leqslant m$. Toliau, $x_1, x_2, \dots, x_k$ – nepriklausomi realūs kintamieji. Spėjama [2], kad bet kuriam fiksuotam $\varepsilon > 0$ nelygybė

$$\left| \sum_{l=1}^{n} a_l x_1^{i_{1l}} x_2^{i_{2l}} \cdots x_k^{i_{kl}} \right| < h^{-n+1-\varepsilon}, \qquad h = \max(|a_1|, \dots, |a_n|),$$

beveik visiems $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ (k-mačio Lebego mato prasme) turi tik baigtinį sprendinių skaičių sveikais $a_1, a_2, \dots, a_n$:.

Kai $m=1$, hipotezės teisingumas seka iš žinomos Chinčino teoremos [3]. V. Sprindžiukas [4] įrodė šią hipotezę, kai $m=2$, bet kuriam k, naudodamasis trigonometrinių sumų metodu.

Šio straipsnelio tikslas – įrodyti hipotezę, kai $m=2$, $k=2$, nesinaudojant trigonometrinių sumų metodu.

ANALOGUE OF THE MAHLER – SPRINDŽUK'S THEOREM FOR POLYNOMIALS OF THE SECOND DEGREE IN TWO VARIABLES

R. Sliesoraitienė

(*Summary*)

K. Mahler [1] in 1932 conjectured that, given $n \geqslant 1$ and $\varepsilon > 0$, for almost all real x (in the sense of Lebesgue measure) there exists only finite number of systems of integers $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ satisfying the inequality

$$|a_0+a_1x+ \dots +a_nx^n| < h^{-n-\varepsilon}, \qquad h = \max(|a_0|, \dots, |a_n|), \qquad h \neq 0.$$

V. Sprindžuk [2], generalizing a number of results of Mahler, Koksma Leveque, Kubilius, Volmann and Kasch, proved this conjecture. It is natural to generalize Mahler-Sprindžuk's theorem for polynomials in several variables. Let m, k and n be positive integers and

$$n \leqslant \binom{m+k}{k}$$

Denote by $i_{1l}, i_{2l}, \ldots, i_{kl}$ $(l=1, 2, \ldots, n)$ systems of non-negative integeres, satisfying the inequality

$$i_{1l}+i_{2l}+ \ldots +i_{kl} \leqslant m.$$

Let further $x_1, \ldots, x_k$ be independent real variables. It is supposed [2], that to any fixed number $\varepsilon > 0$ for almost all $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ (in the sense of Lebesgue measure) there exists only finite number of systems of integers $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ satisfying the inequality

$$\left| \sum_{l=1}^{m} a_l x_1^{i_{1l}} x_2^{i_{2l}} \cdots x_k^{i_{kl}} \right| < h^{-n+1-\varepsilon}, \qquad h = \max(|a_1|, \ldots, |a_n|).$$

For $m=1$ this conjecture follows from Khintchine's theorem [3] V. Sprindžuk [4] proved it in case $m=2$ and arbitrary k. His proof was based on the method of trigonometric sums.

In this note we prove this conjecture for $m=2$ and $k=1$ without using the method of trigonometric sums.