IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
1969

УДК–518.9

ВИД СПЕКТРОВ РАВНОВЕСНЫХ СТРАТЕГИЙ НЕКОТОРЫХ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР ДВУХ ЛИЦ НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ

Д. П. Суждюте

Рассматривается неантагонистическая игра двук лиц на единичном квадрате. При предположении, что ядра игры обладают некоторыми свойствами монотонности, доказывается совпадение спектров равновесных стратегий внутри интервала [0, 1], а при некотором дополнительном условии спектры равновесных стратегий внутри интервала [0, 1] имеют вид $[a, 1)$.

Игра, как обычно, определяется множеством стратегий игроков и функциями выигрышей. Стратегиями игроков являются функции распределен $x(\xi)$ и $y(\eta)$ на интервале [0, 1]. При выборе первым игроком стратегии $x(\xi)$, а вторым – $y(\eta)$, первый выигрывает

$$\int_0^1 \int_0^1 K_1(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy(\eta),$$

а второй

$$\int_0^1 \int_0^1 K_2(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy(\eta),$$

где

$$K_i(\xi, \eta) = \begin{cases} L_i(\xi, \eta), & \xi < \eta, \\ \Phi_i(\xi), & \xi = \eta, \quad i = 1, 2. \\ M_i(\xi, \eta), & \xi > \eta. \end{cases}$$

Ограниченные функции $K_i(\xi, \eta)$, называемые ядрами, определены на замкнутом квадрате $0 \leqslant \xi, \eta \leqslant 1$, причем $L_i(\xi, \eta)$ определены и ограничены на замкнутом треугольнике $0 \leqslant \xi \leqslant \eta \leqslant 1$, $M_i(\xi, \eta)$ определены и ограничены на замкнутом треугольнике $0 \leqslant \eta \leqslant \xi \leqslant 1$, и имеют смысл вышеупомянутые интегралы.

Спектром функции распределения назовем наименьшее замкнутое множество, вне которого мера функции равна 0.

Парой равновесных стратегий назовем пару стратегий $x^0(\xi)$, $y^0(\eta)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^1 \int_0^1 K_1(\xi, \eta)\, dx(\xi)\, dy^0(\eta) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 K_1(\xi, \eta)\, dx^0(\xi)\, dy^0(\eta) = v_1, \qquad (1)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 K_2(\xi, \eta)\, dx^0(\xi)\, dy(\eta) \leqslant \int_0^1 \int_0^1 K_2(\xi, \eta)\, dx^0(\xi)\, dy^0(\eta) = v_2. \qquad (2)$$

Обозначим: S_1 — спектр функции $x^0(\xi)$,
S_2 — спектр функции $y^0(\eta)$,

$$V_1(\xi)=\int_0^1 K_1(\xi,\ \eta)\,dy^0(\eta),\quad V_2(\eta)=\int_0^1 K_2(\xi,\ \eta)\,dx^0(\xi).$$

По определению пары равновесных стратегий

$$V_1(\xi)\leqslant v_1,\ \ V_2(\eta)\leqslant v_2,\ \ (0\leqslant\xi,\ \eta\leqslant 1). \tag{3}$$

Пусть $A=\{x\}$ множество точек из интервала $[0,\ 1]$. Назовем точку x_0 предельной точкой для A слева (справа) или левой (правой) предельной точкой, если x_0 является предельной точкой множества $A\cap(0,\ x_0)$ $\Big($соответственно, множества $A\cap(x_0,\ 1)\Big)$.

Соответствующую последовательность $x_n\in A$, $\lim x_n=x_0$, $x_n<x_0$ $(x_n>x_0)$ для $n=1,\ 2,\ \ldots$, будем называть левой (правой) последовательностью точки x_0.

Лемма 1. *Если $\xi_0\in S_1$ является точкой скачка для $x^0(\xi)$, то $V_1(\xi_0)=v_1$. Если ξ_0 левая (правая) предельная точка для S_1, то существует левая (правая) последовательность ξ_n точки ξ_0 такая, что $V_1(\xi_n)=v_1$, $n=1,\ 2,\ \ldots$*

Доказательство. Пусть $V_1(\xi_0)<v_1$, где $\xi_0\in S_1$ точка скачка для $x^0(\xi)$. Тогда при интегрировании $V_1(\xi)$ по $x^0(\xi)$, ввиду (3), получим, что

$$\int_0^1\int_0^1 K_1(\xi,\eta)\,dy^0(\eta)\,dx^0(\xi)<v_1, \tag{4}$$

а это противоречит (1).

Если ξ_0 левая предельная точка для S_1 и упомянутой последовательности не существует, тогда должен существовать интервал вида $(\xi_0-\varepsilon,\ \xi_0)$, где $\varepsilon>0$, в котором для всех $\xi\in S_1$ было бы $V_1(\xi)<v_1$. Но так как этот интервал не может иметь x^0-меры 0, то опять, ввиду (3), получаем (4).

Для правой последовательности рассуждение аналогичное.

Лемма доказана. Аналогично доказывается лемма.

Лемма 1′. *Если $\eta_0\in S_2$ является точкой скачка для $y^0(\eta)$, то $V_2(\eta_0)=v_2$. Если η_0 левая (правая) предельная точка для S_2, то существует левая (правая) последовательность η_n точки η_0 такая, что $V_2(\eta_n)=v_2$, $n=1,\ 2,\ \ldots$*

В изолированной точке ξ_0 (или η_0) спектра S_1 (S_2) $V_1(\xi_0)=v_1$ $(V_2(\eta_0)=v_2)$. Это потому, что изолированная точка спектра функции распределения непременно является точкой скачка (иначе она имела бы меру 0 и не входила в спектр).

Из лемм 1 и 1′ также вытекает, что множество точек $\xi\in S_1$ $(\eta\in S_2)$ таких, что $V_1(\xi)=v_1$ $(V_2(\eta)=v_2)$ всюду плотно в множестве S_1 (S_2).

Спектр S_1 (S_2) не пустое замкнутое ограниченное множество и поэтому он или сегмент, или получается из некоторого сегмента удалением конечного или счетного множества взаимно не налегающих интервалов, концы которых принадлежат множеству S_1 (S_2).

Лемма 2. *Пусть функции L_1, M_1 строго возрастают по ξ, а L_2, M_2 строго возрастают по η в своих областях определения. Тогда, если $(b, c) \not\subset S_1$ $(0 \leqslant b < c \leqslant 1,\ b \in S_1,\ c \in S_1)$, то $(b, c) \not\subset S_2$ и наоборот $\left(\text{т.е. } S_1 \cap (0, 1) = S_2 \cap (0, 1)\right)$; если, к тому же, $b \neq 0$, то функции распределения $x^0(\xi)$ и $y^0(\eta)$ имеют в начальной точке b, не входящего в S_1 и S_2 интервала, скачки.*

Доказательство. Пусть $(b, c) \not\subset S_1$. Заметим, что из свойств L_2, M_2 следует, что функция $V_2(\eta)$ в интервале (b, c) строго возрастает.

Если $\eta_0 \in (b, c)$ изолированная точка S_2, то по предыдущей лемме $V_2(\eta_0) = v_2$, если η_0 предельная точка для S_2, то, опять по предыдущей лемме, существуют η_1, η_2 $(b < \eta_1 < \eta_2 < c)$ такие, что $V_2(\eta_1) = V_2(\eta_2) = v_2$. В обоих случаях строгое возрастание $V_2(\eta)$ в (b, c) противоречит неравенству (3).

Обратное доказывается аналогично.

Пусть $(b, c) \not\subset S_1 \cap (0, 1)$, $b \neq 0$, и допустим, что $x^0(\xi)$ непрерывна в точке b. Если b точка скачка для $y^0(\eta)$, то $V_2(b) = v_2$ по лемме 1′. Если b левая предельная точка для S_2, то по лемме 1′ существует левая возрастающая последовательность $\eta_n \in S_2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = b$, $V_2(\eta_n) = v_2$, $n = 1, 2, \ldots$ Последовательность функций $K_2(\xi, \eta_n)$ сходится (ввиду строгого возрастания L_2, M_2) почти всюду относительно меры $x^0(\xi)$ к функции $f(\xi)$, которая не больше $K_2(\xi, b)$. Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем

$$v_2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 K_2(\xi, \eta_n)\, dx^0(\xi) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} K_2(\xi, \eta_n)\, dx^0(\xi) =$$

$$= \int_0^{b-0} f(\xi)\, dx^0(\xi) + \int_{b+0}^1 f(\xi)\, dx^0(\xi) \leqslant \int_0^{b-0} L_2(\xi, b)\, dx^0(\xi) +$$

$$+ \int_{b+0}^1 M_2(\xi, b)\, dx^0(\xi) = \int_0^1 K_2(\xi, b)\, dx^0(\xi).$$

Таким образом, $V_2(b)$ и в этом случае не меньше v_2.

Точка $b \neq 0$, поэтому не принадлежать спектру S_2 она не может. Двумя разобранными случаями исчерпываются все возможности для точки b и в обоих случаях получается опять противоречие между строгим возрастанием $V_2(\eta)$ в интервале (b, c) и неравенством (3). Противоречие доказывает, что функция $x^0(\xi)$ должна иметь скачок в точке b.

Невозможность непрерывности функции $y^0(\eta)$ в точке b доказывается аналогично.

В оставшейся части будем исследовать свойства равновесных стратегий для игр с ранее определенными ядрами при дополнительных условиях:

1) *Функции L_1, M_1 строго возрастают по ξ, а L_2, M_2 — по η и все они непрерывны по ξ и η в своих областях определения,*

2) *Функции $\Phi_i(\xi)$ $(i = 1, 2,\ 0 < \xi < 1)$ находятся между $L_i(\xi, \xi)$ и $M_i(\xi, \xi)$, причем равны какой-нибудь из них только в тех точках, в которых $L_i(\xi, \xi) = M_i(\xi, \xi)$.*

Лемма 3. *Если* K_i $(i=1, 2)$ *удовлетворяют условиям* 1), 2) *и точка* $a\in S_1\cap(0,1)$ (*или* $a\in S_2\cap(0, 1)$) *то* $L_1(a, a)\geqslant M_1(a,a)$ *и* $L_2(a, a)\leqslant M_2(a, a)$.

Доказательство. Пусть $a\in S_1\cap(0, 1)$, но $L_1(a, a)<M_1(a, a)$. Тогда, ввиду непрерывности L_1 и M_1, существует окрестность $(a-\varepsilon<\xi, \eta<a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, в которой $L_1<M_1$, где аргументы пробегают независимо все значения, в которых функции определены.

Пусть a — предельная точка для S_1. Тогда по лемме 1 существуют значения b, c такие, что $a-\varepsilon<b<c<a+\varepsilon$ и $V_1(b)=V_1(c)=v_1$. Но

$$V_1(b)=\int_0^{b-0} M_1(b, \eta)\, dy^0(\eta)+\alpha_1\Phi_1(b)+\int_{b+0}^{c-0} L_1(b, \eta)\, dy^0(\eta)+$$
$$+\alpha_2 L_1(b, c)+\int_{c+0}^{1} L_1(b, \eta)\, dy^0(\eta),$$
$$V_1(c)=\int_0^{b-0} M_1(c, \eta)\, dy^0(\eta)+\alpha_1 M_1(c, b)+\int_{b+0}^{c-0} M_1(c, \eta)\, dy^0(\eta)+$$
$$+\alpha_2\Phi_1(c)+\int_{c+0}^{1} L_1(c, \eta)\, dy^0(\eta),$$

где α_1, $\alpha_2\geqslant 0$.

Точки b и c можно выбрать так, чтобы x^0-мера интервала (b, c) была больше нуля. Это можно сделать, например, так: выбрать монотонную последовательность различных точек $\xi_n\in S_1$, $\xi_n\to a$, $V_1(\xi_n)=v_1$, $n=1, 2, \ldots$ (применяем лемму 1 для a как предельной точки множества S_1), выбрать $\xi_k\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, обозначить $\xi_k=b$, $\xi_{k+2}=c$, если $\xi_k<\xi_{k+2}$, или $\xi_k=c$, $\xi_{k+2}=b$, если $\xi_{k+2}<\xi_k$. Если бы x^0-мера так выбранного интервала была равна 0, то точка ξ_{k+1} не входила бы в спектр, что противоречит выбору последовательности ξ_n. Из этого, имея ввиду неравенство $L_1<M_1$ в вышеупомянутом смысле, получаем

$$\int_{b+0}^{c-0} L_1(b, \eta)\, dy^0(\eta)<\int_{b+0}^{c-0} M_1(c, \eta)\, dy^0(\eta),$$

остальные слагаемые в сумме $V_1(c)$ не меньше, чем в $V_1(b)$, что противоречит их равенству.

Пусть a — изолированная точка S_1. Тогда

$$V_1(a)=\int_0^{a-0} M_1(a, \eta)\, dy^0(\eta)+\alpha_3\Phi_1(a)+\int_{a+0}^{a+\varepsilon_1-0} L_1(a, \eta)\, dy^0(\eta)+$$
$$+\alpha_4 L_1(a, a+\varepsilon_1)+\int_{a+\varepsilon_1+0}^{1} L_1(a, \eta)\, dy^0(\eta)=v_1,$$
$$V_1(a+\varepsilon_1)=\int_0^{a-0} M_1(a+\varepsilon_1, \eta)\, dy^0(\eta)+\alpha_3 M_1(a+\varepsilon_1, a)+$$
$$+\int_{a+0}^{a+\varepsilon_1-0} M_1(a+\varepsilon_1, \eta)\, dy^0(\eta)+\alpha_4\Phi_1(a+\varepsilon_1)+\int_{a+\varepsilon_1+0}^{1} L_1(a+\varepsilon_1, \eta)\, dy^0(\eta),$$

где $0<\varepsilon_1<\varepsilon$, $\alpha_3>0$, $\alpha_4\geqslant 0$.

Во второй сумме все слагаемые не меньше слагаемых в первой, а

$\alpha_3\Phi_1, a) < \alpha_3 M_1 (a+\varepsilon_1, a)$.

Вывод, что $V_1(a+\varepsilon_1) > v_1$ противоречит определению пары равновесных стратегий. Итак, допущение, что $L_1(a, a) < M_1(a, a)$, неверно, и $L_1(a, a) \geqslant M_1(a, a)$.

По лемме 2 точка a является точкой спектра S_2 и для нее аналогичными рассуждениями доказываем невозможность $L_2(a, a) > M_2(a, a)$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если выполнены условия* 1), 2) *и если* a — *точка скачка для* $x^0(\xi)$ *и* $y^0(\eta)$ *в интервале* $(0, 1)$, *то*

$$L_1(a, a) = \Phi_1(a) = M_1(a, a) \text{ и } L_2(a, a) = \Phi_2(a) = M_2(a, a).$$

Доказательство. Пусть величина скачка в точке a для $y^0(\eta)$ равна $\alpha > 0$, тогда по лемме 1

$$V_1(a) = \int_0^{a-0} M_1(a, \eta)\, dy^0(\eta) + \alpha\Phi_1(a) + \int_{a+0}^{1} L_1(a, \eta)\, dy^0(\eta) = v_1. \tag{5}$$

Берем левую последовательность $\xi_n \to a$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} K_1(\xi_n, \eta) = \begin{cases} M_1(a, \eta), & 0 \leqslant \eta < a, \\ L_1(a, \eta), & a \leqslant \eta \leqslant 1. \end{cases}$$

По теореме Лебега о предельном переходе

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 K_1(\xi_n, \eta)\, dy^0(\eta) = \int_0^{a-0} M_1(a, \eta)\, dy^0(\eta) + \alpha L_1(a, a) +$$

$$+ \int_{a+0}^{1} L_1(a, \eta)\, dy^0(\eta) \leqslant v_1. \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6) заключаем, что $L_1(a, a) \leqslant \Phi_1(a)$, а ввиду условия 2) и в силу леммы 3 имеем, что

$$L_1(a, a) = \Phi_1(a) = M_1(a, a).$$

Аналогично

$$L_2(a, a) = \Phi_2(a) = M_2(a, a).$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* 1), 2), *то* $S_1 \cap (0, 1)$ *и* $S_2 \cap (0, 1)$ *совпадают и имеют вид* $[a, 1)$, *если* $a \neq 0$, *и* $(0, 1)$, *если* $a = 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что любой интервал вида (b, c), где $0 < b < c \leqslant 1$, $b \in S_1$, не может не входить в $S_1 \cap (0, 1)$. Допустим противное: пусть такой интервал $(b, c) \not\subset S_1$, тогда, из леммы 2 следует, что в точке b для обеих функций $x^0(\xi)$ и $y^0(\eta)$ имеется скачок. Из леммы 4 получаем, что

$$L_1(b, b) = \Phi_1(b) = M_1(b, b).$$

Но,

$$V_1(b) = \int_0^{b-0} M_1(b, \eta)\, dy^0(\eta) + \alpha\Phi_1(b) + \int_c^1 L_1(b, \eta)\, dy^0(\eta) = v_1, \quad \alpha > 0,$$

по лемме 1, и

$$V_1(b+\varepsilon)=\int\limits_0^{b-0} M_1(b+\varepsilon,\eta)\,dy^0(\eta)+\alpha M_1(b+\varepsilon,b)+\int\limits_c^1 L_1(b+\varepsilon,\eta)\,dy^0(\eta),$$

где $\varepsilon>0$, $b+\varepsilon<c$.

В последней сумме первый и третий слагаемые не меньше, а второй строго больше чем в предпоследней. Поэтому $V_1(b+\varepsilon)>v_1$, что противоречит (3). Противоречие показывает, что допущение неправильно. Теорема доказана.

Следствие 1. *В условиях и обозначениях теоремы* 1, *если в точке* $b\in[a,1)$, $a\neq 0$, $\Big($*или в точке* $b\in(0,1)$, *когда* $a=0\Big)$*существует скачок для* $x^0(\xi)\Big(y^0(\eta)\Big)$, *то* $L_2(b,b)=M_2(b,b)$ $\Big(L_1(b,b)=M_1(b,b)\Big)$.

Доказательство. Если точка $b\in[a,1)$, то она правая предельная точка S_2 (по теореме 1). Применяя лемму 1 и критерий Лебега получим

$$\int\limits_0^{b-0} L_2(\xi,b)\,dx^0(\xi)+\alpha L_2(b,b)+\int\limits_{b+0}^{1} M_2(\xi,b)\,dx^0(\xi)=v_2.$$

Для левой последовательности по той же теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим неравенство

$$\int\limits_0^{b-0} L_2(\xi,b)\,dx^0(\xi)+\alpha M_2(b,b)+\int\limits_{b+0}^{1} M_2(\xi,b)\,dx^0(\xi)\leqslant v_2,$$

где $\alpha>0$. Отсюда

$$L_2(b,b)\geqslant M_2(b,b),$$

а по лемме 3

$$L_2(b,b)\leqslant M_2(b,b).$$

Следовательно, $L_2(b,b)=M_2(b,b)$.

Вторая часть утверждения доказывается аналогично.

Лемма 5. *При условиях* 1), 2) *функции* $V_1(\xi)$ *и* $V_2(\eta)$ *непрерывны в интервале* $(0,1)$, и $V_1(\xi)=v_1$, $V_2(\eta)=v_2$ *для* $\xi,\eta\in S_1\cap(0,1)=S_2\cap(0,1)$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$V_1(\xi+\varepsilon)-V_1(\xi)=\int\limits_0^1[K_1(\xi+\varepsilon,\eta)-K_1(\xi,\eta)]\,dy^0(\eta)=$$

$$=\int\limits_0^{\xi-0}[M_1(\xi+\varepsilon,\eta)-M_1(\xi,\eta)]\,dy^0(\eta)+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{\xi+\varepsilon}[M_1(\xi+\varepsilon,\eta)-L_1(\xi,\eta)]\,dy^0(\eta)+$$

$$+\int\limits_{\xi+\varepsilon+0}^{1}[L_1(\xi+\varepsilon,\eta)-L_1(\xi,\eta)]\,dy^0(\eta),$$

где $\xi\in(0,1)$, $\xi+\varepsilon\in(0,1)$, $\varepsilon>0$.

При выполнении условия 1),

$$\max_{\eta\in[0,\xi]} [M_1(\xi+\varepsilon,\ \eta)-M_1(\xi,\ \eta)]\to 0,\quad \max_{\eta\in[\xi+\varepsilon,1]} [L_1(\xi+\varepsilon,\eta)-L_1(\xi,\eta)]\to 0,$$

если $\varepsilon\to 0$, и поэтому первый и третий члены последней суммы стремятся к нулю вместе с ε.

Во втором члене в точке $(\xi,\ \xi)$ замена функции Φ_1 на L_1 оправдывается тем, что, в случае скачка для $y^0(\eta)$ в точке ξ, следствие 1 утверждает, что $L_1(\xi,\ \xi)=\Phi_1(\xi)=M_1(\xi,\ \xi)$, а в случае отсутствия скачка эта замена не меняет значения интеграла. То же в точке $(\xi+\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)$.

Разделим второй член на два интеграла: первый по точкам, в которых $y^0(\eta)$ имеет скачок, и второй по точкам, не имеющим скачка. В каждой точке скачка η_0 функция $K_1(\xi,\eta_0)$ непрерывна (условие 1) и следствие 1) в интервале $[0,1]$, поэтому $\sup[M_1(\xi+\varepsilon,\ \eta)-L_1(\xi,\ \eta)]\to 0$, при $\varepsilon\to 0$, где точная верхняя граница берется по всем точкам скачков функции $y^0(\eta)$ в интервале $[\xi,\ \xi+\varepsilon]$; y^0-мера этих точек ограничена, и поэтому первый интеграл стремится к нулю вместе с ε. Для оставшихся точек y^0-мера стремится к нулю, когда $\varepsilon\to 0$, и, ввиду ограниченности $M_1(\xi+\varepsilon,\eta)-L_1(\xi,\eta)$, второй интеграл тоже стремится к нулю.

Таким образом $V_1(\xi+\varepsilon)-V_1(\xi)\to 0$, когда $\varepsilon\to 0$, и непрерывность $V_1(\xi)$ в интервале $(0,1)$ доказана.

Пусть $S_1\cap(0,1)\neq\varnothing$ и допустим, что существует $\xi_0\in S_1\cap(0,1)$, для которого $V_1(\xi_0)<v_1$. Тогда, по непрерывности $V_1(\xi)$, это неравенство выполняется и в какой-то окрестности точки ξ_0, x^0-мера которой больше нуля. При интегрировании $V_1(\xi)$ по $x^0(\xi)$ тогда получим (4), что противоречит (1). Противоречие показывает, что $V_1(\xi)=v_1$ для всех $\xi\in S_1\cap(0,1)$.

Аналогично доказывается непрерывность $V_2(\eta)$ для $\eta\in(0,1)$ и равенство $V_2(\eta)=v_2$ для $\eta\in S_2\cap(0,1)$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1), 2) *и одно из двух условий*:

а) $L_1(1,1)\leqslant M_1(1,1)$ *и в случае равенства для каждого* $\varepsilon>0$ *существует такой* $\xi_0\in(1-\varepsilon,1)$, *что* $L_1(\xi_0,\eta)\leqslant M_1(1,\eta)$ *для всех* $\eta\in[\xi_0,1]$, *или*

б) $L_2(1,1)\geqslant M_2(1,1)$ *и в случае равенства для каждого* $\varepsilon>0$ *существует такой* $\eta_0\in(1-\varepsilon,1)$, *что* $L_2(\xi,1)\geqslant M_2(\xi,\eta_0)$ *для всех* $\xi\in[\eta_0,1]$, *то в каждой паре равновесных стратегий* $x^0(\xi)$, $y^0(\eta)$ *функции распределения могут иметь скачки в точках* 0 *и* 1, *но постоянны на интервале* $(0,1)$.

Доказательство. Допустим противное: $S_1\cap(0,1)\neq\varnothing$. Тогда, по теореме 1, $S_1\cap(0,1)$ имеет вид $(0,1)$ или $[a,1)$, $0<a<1$, и, если выполнено а), то существует такой $\xi_0\in(a,1)$, $0<a<1$, что $L_1(\xi_0,\eta)\leqslant M_1(1,\eta)$ для $\eta\in[\xi_0,1]$. (В случае, когда $L_1(1,1)<M_1(1,1)$, это следует из непрерывности L_1 и M_1.) Но, применяя лемму 5 и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем, что

$$v_1=\lim_{\xi\to 1} V_1(\xi)=\int_0^{\xi_0} M_1(1,\ \eta)\,dy^0(\eta)+\int_{\xi_0+0}^{1} M_1(1,\ \eta)\,dy^0(\eta)>$$

$$>\int_0^{\xi_0} M_1(\xi_0,\ \eta)\,dy^0(\eta)+\int_{\xi_0+0}^{1} L_1(\xi_0,\ \eta)\,dy^0(\eta)=v_1.$$

Полученное противоречие доказывает, что $S_1 \cap (0, 1) = \varnothing$, а по теореме 1 и $S_2 \cap (0, 1) = \varnothing$.

Если вместо условия а) выполнено б), то рассуждение аналогичное. Теорема доказана.

Установление существования пар равновесных стратегий и их нахождение, в условиях теоремы 2, производится непосредственной проверкой и решением соответствующих алгебраических уравнений.

Автор выражает искреннюю благодарность Э. И. Вилкасу за ценные замечания и советы при решении данной проблемы.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
12.XI.1968

Литература

1. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, „Мир", Москва, 1964.
2. Р. Д. Льюс, Х. Райфа, Игры и решения, Издательство иностранной литературы, Москва, 1961.
3. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1957.

KAI KURIŲ NEANTAGONISTINIŲ DVIEJŲ ASMENŲ LOŠIMŲ VIENETINIAME KVADRATE PUSIAUSVYROS STRATEGIJŲ SPEKTRŲ PAVIDALAI

D. Sūdžiūtė

(*Reziumė*)

Nustatomos būtinos sąlygos šių lošimų pusiausvyros strategijų spektrų pavidalams, esant 1) ir 2) branduolių monotoniškumo ir tolydumo sąlygoms.

THE SHAPES OF THE SPECTRA OF THE EQUILIBRIUM STRATEGIES FOR SOME NON-ZERO TWO-PERSON GAMES ON THE UNITY SQUARE

D. Sūdžiūtė

(*Summary*)

The necessary conditions for the shape of the spectra of the equilibrium strategies, for the games, when the kernels have the properties 1) and 2) are given.