УДК – 517.941

О ПРИВОДИМОСТИ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Меркис

Рассмотрим систему

$$\frac{dX}{dt}=X[P_0(t)+\varepsilon P_1(t)], \tag{1}$$

где $P_0(t)$ и $P_1(t)$ – непрерывные и ограниченные матрицы, а ε – комплексный численный параметр.

Пусть предельная система

$$\frac{dX^*}{dt}=X^*P_0(t), \tag{2}$$

получаемая из (1) при $\varepsilon\to 0$, приводимая. Тогда, согласно [1] (теорема 1), она имеет решение вида

$$X^*=e^{Bt}Z(t), \tag{3}$$

где B – постоянная, а $Z(t)$ и $Z^{-1}(t)$ – ограниченные матрицы. При этом подстановка

$$X=YZ$$

преобразует систему (1) к виду

$$\frac{dY}{dt}=Y(B+\varepsilon ZP_1(t)Z^{-1}), \tag{4}$$

причем матрица $ZP_1(t)Z^{-1}=P(t)$ будет также ограниченной.

Предположим, что матрица B имеет диагональный вид с вещественными элементами λ_1 и λ_2 (см. [2], § 19, 20), удовлетворяющими условию

$$\lambda_1-\lambda_2\neq 0. \tag{5}$$

Следовательно, будем рассматривать систему

$$\frac{dY}{dt}=Y\left(\begin{Vmatrix}\lambda_1, & 0\\ 0, & \lambda_2\end{Vmatrix}+\varepsilon P(t)\right). \tag{6}$$

Выясним, когда эта система будет приводимой.

Известно [1], что если уравнение Риккати

$$\dot\tau=\bar p_{12}+(\bar p_{22}-\bar p_{11})\tau-\bar p_{21}\tau^2, \tag{7}$$

где $\bar p_{ik}$ – элементы матрицы коэффициентов системы (6), имеет ограниченное решение τ и выполняются равенства

$$\int_0^t(-\tau\bar p_{21}-\bar p_{11})dt=a_1t+F_1(t),$$

$$\int_0^t(\tau p_{21}-\bar p_{22})dt=a_2t+F_2(t), \tag{8}$$

где a_1 и a_2 — постоянные, а $F_1(t)$ и $F_2(t)$ — ограниченные функции, то система (6), а тем самым и (1), будет приводимой, если

$$a_1 \neq a_2. \tag{9}$$

Пусть

$$P(t) = \begin{Vmatrix} p_{11}(t), & p_{12}(t) \\ p_{21}(t), & p_{22}(t) \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{p}_{11} &= \lambda_1 + \varepsilon p_{11}, \\ \bar{p}_{12} &= \varepsilon p_{12}, \\ \bar{p}_{21} &= \varepsilon p_{21}, \\ \bar{p}_{22} &= \lambda_2 + \varepsilon p_{22}. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставив $\bar{p}_{ik}$ в (7), получим

$$\dot{\tau} + (\lambda_1 - \lambda_2)\tau = \varepsilon p_{12} + \varepsilon\,(p_{22} - p_{11})\tau - \varepsilon p_{21}\tau^2. \tag{11}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k \varepsilon^k, \tag{12}$$

используя при этом метод А. Е. Гельмана – И. Н. Блинова [3], [5], [6].

Подставив (12) в (11) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\dot{\tau}_0 + (\lambda_1 - \lambda_2)\tau_0 = 0,$$

откуда имеем частное ограниченное решение

$$\tau_0 = 0,$$

и при этом

$$\begin{aligned} &\dot{\tau}_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\tau_1 = p_{12}, \\ &\dot{\tau}_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\tau_2 = (p_{22} - p_{11})\tau_1, \\ &\dot{\tau}_3 + (\lambda_1 - \lambda_2)\tau_3 = (p_{22} - p_{11})\tau_2 - p_{21}(\tau_1\tau_1), \\ &\dot{\tau}_4 + (\lambda_1 - \lambda_2)\tau_4 = (p_{22} - p_{11})\tau_3 - p_{21}(\tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\dot{\tau}_n + (\lambda_1 - \lambda_2)\tau_n = (p_{22} - p_{11})\tau_{n-1} - p_{21}\sum_{i=1}^{n-2} \tau_i \tau_{n-1-i}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{13}$$

Введем линейный оператор $l_{\lambda_1-\lambda_2}$, переводящий непрерывные и ограниченные функции $T(t)$, такие, что $\dot{T}(t)$ являются также непрерывными и ограниченными функциями, в класс непрерывных и ограниченных функций $F(t)$ по правилу

$$l_{\lambda_1-\lambda_2}\, T = \dot{T} + (\lambda_1 - \lambda_2)T = F.$$

Этот оператор подробно рассмотрен в работах [5], [6]. Отметим лишь, что при выполнении (5) существует $l^{-1}_{\lambda_1-\lambda_2}$ и справедливо равенство

$$\| l^{-1}_{\lambda_1-\lambda_2} \| = \frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2|},$$

где под $\|l^{-1}_{\lambda_1-\lambda_2}\|$ подразумевается норма оператора $l^{-1}_{\lambda_1-\lambda_2}$ (норма непрерывной и ограниченной функции $F(t)$ определяется как $\sup\limits_t |F(t)|$).

При помощи оператора $l_{\lambda_1-\lambda_2}$ система (13) представляется в виде

$$l_{\lambda_1-\lambda_2}\tau_1 = p_{12},$$

$$l_{\lambda_1-\lambda_2}\tau_n = (p_{22}-p_{11})\tau_{n-1} - p_{21}\sum_{i=1}^{n-2}\tau_i\tau_{n-1-i}$$

$$(n=2, 3, \ldots).$$

Применив оператор $l^{-1}_{\lambda_1-\lambda_2}$ к обеим частям каждого из последних равенств, будем иметь

$$\tau_1 = l^{-1}_{\lambda_1-\lambda_2} p_{12},$$

$$\tau_n = l^{-1}_{\lambda_1-\lambda_2}\left[(p_{22}-p_{11})\tau_{n-1} - p_{21}\sum_{i=1}^{n-2}\tau_i\,\tau_{n-1-i}\right]$$

$$(n=2, 3, \ldots).$$

Отсюда легко получаем следующие оценки:

$$\sup_t |\tau_1| \leqslant hp,$$

$$\sup_t |\tau_n| \leqslant h\left(q\sup_t|\tau_{n-1}| + r\sum_{i=1}^{n-2}\sup_t|\tau_i|\,\sup_t|\tau_{n-1-i}|\right)$$

$$(n = 2, 3, \ldots),$$

где

$$p = \sup_t |p_{12}|, \qquad q = \sup_t |p_{22}-p_{11}|,$$

$$r = \sup_t |p_{21}|, \qquad h = \| l^{-1}_{\lambda_1-\lambda_2} \| = \frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2|}. \tag{14}$$

На основе последних оценок образуем следующую систему рекуррентных соотношений

$$x_1 = hp,$$

$$x_n = h\left(q\,x_{n-1} + r\sum_{i=1}^{n-2} x_i x_{n-1-i}\right) \tag{15}$$

$$(n=2, 3, \ldots).$$

Очевидно, что

$$\sup_t |\tau_k| \leqslant x_k \quad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

Следовательно, ряд (12) мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k |\varepsilon|^k. \tag{16}$$

Для исследования его сходимости образуем следующее квадратное уравнение

$$r(\varepsilon)x^2(\varepsilon)-2(1-q(\varepsilon))x(\varepsilon)+p(\varepsilon)=0, \tag{17}$$

где

$$r(\varepsilon)=2hr\,\varepsilon,\ q(\varepsilon)=hq\,\varepsilon,\ p(\varepsilon)=2hp\varepsilon. \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что оно имеет в некотором круге с центром $\varepsilon=0$ аналитическое решение вида

$$x(\varepsilon)=\frac{1-q(\varepsilon)-z(\varepsilon)}{r(\varepsilon)}, \tag{19}$$

где

$$z(\varepsilon)=\sqrt{\Big(1-q(\varepsilon)\Big)^2-p(\varepsilon)r(\varepsilon)}\ .$$

(Второе решение уравнения (17) имеет особенность при $\varepsilon=0$.) В самом деле, в точке $\varepsilon=0$, функция $x(\varepsilon)$, определяемая (19), является аналитической. Следовательно, она будет аналитической в круге с центром $\varepsilon=0$ и радиусом, равным расстоянию до ближайшей точки разветвления функции $z(\varepsilon)$. Точки разветвления функции $z(\varepsilon)$ определим из уравнения

$$(1-q(\varepsilon))^2-p(\varepsilon)\,r(\varepsilon)=0,$$

или согласно (18), уравнения

$$h^2(q^2-4pr)\varepsilon^2-2hq\,\varepsilon+1=0.$$

Имеем

$$\varepsilon_1=\frac{1}{h(q-2\sqrt{pr})},\qquad \varepsilon_2=\frac{1}{h(q+2\sqrt{pr})}.$$

Так как $\varepsilon_2<\varepsilon_1$, то, следовательно, функция $x(\varepsilon)$, определяемая формулой (19), будет аналитической в круге радиуса

$$R=\varepsilon_2=\frac{1}{h(q+2\sqrt{pr})}, \tag{20}$$

или, согласно (14),

$$R=\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{\sup\limits_t|p_{22}-p_{11}|+2\sqrt{\sup\limits_t|p_{12}|\sup\limits_t|p_{21}|}}. \tag{20_1}$$

В работе [5] показано, что коэффициенты ряда Тейлора функции (19) удовлетворяют системе (15). Следовательно, эта функция будет производящей функцией ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\,\varepsilon^k$, причем радиус абсолютной сходимости этого ряда, тем самым и ряда (16), совпадает с радиусом круга аналитичности функции (19), т.е. определяется равенствами (20) или (20_1).

Нетрудно убедиться, что при $|\varepsilon|<R$

$$\sup_t|\tau(t,\varepsilon)|\leqslant x(|\varepsilon|)<\sqrt{\frac{p}{r}}\ . \tag{21}$$

Выясним теперь, когда имеют место соотношения (8). Согласно (10), имеем

$$I_1=\int_0^t(-\tau\bar p_{21}-\bar p_{11})\,dt=-\varepsilon\int_0^t\tau p_{21}\,dt-\varepsilon\int_0^t p_{11}\,dt-\lambda_1 t,$$

$$I_2=\int_0^t(\tau\bar p_{21}-\bar p_{22})\,dt=\varepsilon\int_0^t\tau p_{21}\,dt-\varepsilon\int_0^t p_{22}\,dt-\lambda_2 t.$$

Пусть функции p_{11}, p_{22}, p_{21} удовлетворяют следующим условиям:

$$\int_0^t p_{kk}dt = b_k t + f_k(t) \quad (k=1,2),$$

$$\int_0^t |p_{21}|dt = f_3(t), \tag{22}$$

где b_k $(k=1,2)$ — постоянные, а $f_k(t)$ $(k=1,2,3)$ — ограниченные функции. Тогда, принимая во внимание (21) и (22), получаем

$$\left|\int_0^t \tau p_{21}\,dt\right| < \sqrt{\frac{p}{r}}\, f_3(t)\ .$$

Следовательно,

$$I_1 = -(\lambda_1 + \varepsilon b_1)t + F_1(t, \varepsilon),$$

$$I_2 = -(\lambda_2 + \varepsilon b_2)t + F_2(t, \varepsilon),$$

где $F_k(t, \varepsilon)$ $(k=1,2)$ — ограниченные функции. Повторяя, далее, выкладки работы [4], стр. 293, легко убеждаемся в справедливости неравенства (9), т.е. что

$$\lambda_1 + \varepsilon b_1 \neq \lambda_2 + \varepsilon b_2.$$

Таким образом, *система* (6), *элементы матрицы коэффициентов которой* (*кроме непрерывности и ограниченности*) *удовлетворяют условиям* (5) *и* (22), *приводима, если* $|\varepsilon| < R$, *где* R *определяется формулой* (20) *или* (20_1).

Пример. Пусть в системе (6) элементы матрицы $P(t)$ имеют следующий вид:

$$p_{11} = -2a + \sin\alpha t,\quad p_{12} = f(t),$$

$$p_{21} = \frac{\cos\beta t}{k^2+t^2}\ , \qquad p_{22} = \sin^2\gamma t\ ,$$

где $a>0$, α, β, γ, $k>0$ — постоянные, а $f(t)$ — ограниченная функция. Легко видеть, что условия (22) выполнены. Кроме того, имеем

$$\sup_t |p_{22} - p_{11}| \leqslant 2(a+1)\ ,$$

$$\sup_t |p_{12}| = \sup_t |f(t)| = b^2\ , b > 0\ ,$$

$$\sup_t |p_{21}| = \frac{1}{k^2}\ .$$

Следовательно, радиус круга приводимости рассматриваемой системы будет

$$R = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{2\left(a+1+\frac{b}{k}\right)}\ .$$

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
17.IV.1969

Литература

1. Н. П. Еругин, Приводимые системы, Труды Матем. ин-та им. Стеклова, XIII, 1946.
2. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Минск, 1963.
3. А. Е. Гельман, Известия ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), вып. XXXIX, 285–291, 1959.
4. А. Е. Гельман, Дифференциальные уравнения, I, № 3, 283–294, 1965.
5. И. Н. Блинов, Дифференциальные увавнения, I, № 7, 880–895, 1965.
6. И. Н. Блинов, Дифференциальные уравнения, I, № 8, 1042–1053, 1965.

VIENOS DVIMATĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS REDUKAVIMAS

V. Merkys

(*Reziumė*)

Tiriama tiesinių homogeninių diferencialinių lygčių sistema

$$\frac{dX}{dt}=X[P_0(t)+\varepsilon P_1(t)]; \qquad (1)$$

čia $P_0(t)$ ir $P_1(t)$ – tolydinės ir aprėžtos matricos, o ε – kompleksinis skaitinis parametras. Be to, sistema, gauta iš (1), kai $\varepsilon\to 0$, redukuojama.

Darbe gautos (1) sistemos redukavimo sąlygos.

ÜBER DIE REDUZIERBARKEIT EINES ZWEIDIMENSIONALEN SYSTEMS VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

V. Merkys

(*Zusammenfassung*)

Wir untersuchten ein System von homogenen linearen Differentialgleichungen, das in der Matrixform folgendermassen geschrieben ist

$$\frac{dX}{dt}=X[P_0(t)+\varepsilon P_1(t)]. \qquad (1)$$

Hier sind $P_0(t)$ und $P_1(t)$ – Funktionenmatrizen, die stetig und beschränkt sind, ε – ein komplexer Zahlenparameter. Ausserdem ist das System, das aus (1) bei $\varepsilon\to 0$ erhalten wird, reduzierbar. In der Arbeit sind die Bedingungen für die Reduzierbarkeit des Systems (1) gefunden.