УДК–517.537

УСЛОВИЯ ПРЕДСТАВИМОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ РЯДАМИ

Н. С. Насековская

В статье рассматриваются условия представимости аналитических функций $f(z)$ рядами вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_\nu}\right). \tag{A}$$

§ 1. Необходимые условия

Пусть $\{\lambda_\nu\}$ – последовательность комплексных чисел, такая, что $\lambda_\nu=\rho_\nu e^{i\Theta_\nu}$, где $\rho_\nu\leqslant\rho_{\nu+1}$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\rho_\nu=\infty$,

$$|\Theta_\nu|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2},\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_\nu}=\infty.$$

Разобьем угол $[-\alpha,\alpha]$ на q углов лучами

$$\arg z=\psi_k\ (k=1,2,\ldots,q-1),\ \psi_0=-\alpha,\ \psi_q=\alpha.$$

Пусть

$$\{\lambda_{\nu_m^{(k)}}=\rho_{\nu_m^{(k)}}e^{i\Theta_{\nu_m^{(k)}}}\}\quad (m=1,\ 2,\ \ldots)$$

– подпоследовательность последовательности $\{\lambda_\nu\}$, причем $\{\nu_m^{(k)}\}$ – последовательность тех индексов ν, для которых

$$\psi_{k-1}\leqslant\arg\lambda_{\nu_m^{(k)}}<\psi_k,\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ q-1),$$

$$\psi_{q-1}\leqslant\arg\lambda_{\nu_m^{(q)}}\leqslant\psi_q.$$

Введем следующие функции.

Пусть $\rho(x)$ – функция, определенная для $x\geqslant 1$, имеющая неотрицательную производную, непрерывная и такая, что $\rho(\nu)=\rho_\nu$, и пусть $x(\rho)$ – функция, обратная $\rho(x)$, определенная для $\rho\geqslant\rho_1$.

Обозначим также через $\rho_k(x)$ – функцию, определенную для $x\geqslant 1$, имеющую неотрицательную производную, непрерывную и такую, что $\rho_k(\nu_m^{(k)})=\rho_{\nu_m^{(k)}}$, и пусть $x_k(\rho)$ – функция, обратная к $\rho=\rho_k(x)$, определенная для $\rho\geqslant\rho_{\nu_1^{(k)}}$.

Далее обозначим

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\rho_\nu},\quad \sigma_n=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu}.$$

Предположим, что последовательность $\{\lambda_\nu\}$ такова, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n}{S_n}=A-iB. \tag{1}$$

Отметим, что в этом случае, как заметил А. Г. Нафталевич, все рассуждения, с помощью которых были найдены [2], [3] области простой и абсолютной сходимости ряда (А), остаются справедливыми.

Областью сходимости ряда (А) является полуплоскость

$$Ax+By-s>0,$$

где

$$\begin{aligned} s&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{S_n}\ln\left|\sum_{k=0}^{n}a_k\right|,\quad \text{если}\quad s\geqslant 0,\\ s&=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{S_n}\ln\left|\sum_{k=n}^{\infty}a_k\right|,\quad \text{если}\quad s<0. \end{aligned} \tag{2}$$

Докажем две основные теоремы, содержащие необходимые условия представимости функций $f(z)$ интерполяционным рядом (А).

Теорема 1. *Если заданы последовательность $\{\lambda_\nu\}$, удовлетворяющая всем указанным условиям, и функция $f(z)$, голоморфная в некоторой полуплоскости $Ax+By-p>0$, где $p<0$, а A и B определяются формулой* (1), *то для того, чтобы эта функция могла быть представлена в виде суммы интерполяционного ряда* (A), *необходимо, чтобы она удовлетворяла в угле $|\Theta|<\frac{\pi}{2}-\alpha$ неравенству*

$$|f(re^{i\Theta})|<Cr\exp\inf\sum_{k=1}^{q}\Phi^{(k)}(r,\ \Theta,\ \beta_k),$$

где C — константа, нижняя грань берется по всевозможным разбиениям угла $[-\alpha,\ \alpha]$ и

$$\Phi^{(k)}(r,\ \Theta,\ \beta_k)=\int\limits_{\frac{\rho_{\nu(k)}}{r}}^{\frac{1}{2\cos(\Theta-\beta_k)}}\frac{[1-u\cos(\Theta-\beta_k)]\,\chi_k(ur)}{u\,[u^2-2u\cos(\Theta-\beta_k)+1]}\,du.$$

Здесь β_k такой луч из интервала $[\psi_{k-1},\ \psi_k]$, для которого $\cos(\Theta-\beta_k)\leqslant\cos(\Theta-\psi)$ для всех $\psi\in[\psi_{k-1},\ \psi_k]$, функции $\chi_k(\rho)$ определены ранее.

Теорема 2. *Если в условиях теоремы* 1 *функция $f(z)$ голоморфна в полуплоскости $Ax+By-p>0$, где $p\geqslant 0$, то для того, чтобы эта функция могла* *быть представлена в виде суммы интерполяционного ряда* (A), *необходимо, чтобы она удовлетворяла в угле*

$$\begin{cases} r\cos(\Theta-\alpha) \geqslant (1+\mu)\cdot \dfrac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \\ r\cos(\Theta+\alpha) \geqslant (1+\mu)\cdot \dfrac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \end{cases}$$

неравенству

$$|f(re^{i\Theta})| < Kr \exp\left\{ \mu j\left[\frac{r(1+\varepsilon)}{2\cos\varphi_1}\right] + \inf \sum_{k=1}^{q} \Phi^{(k)}(r,\ \Theta,\ \beta_k)\right\}$$

для любых $\mu > p$ *и* $\varepsilon > 0$.

Здесь K – *некоторая константа*, $\varphi_1 = \Theta+\alpha$, *если* $\Theta \geqslant 0$, $\varphi_1 = \Theta-\alpha$, *если* $\Theta \leqslant 0$,

$$j(r) = S\bigl(x(r)\bigr), \quad \textit{где} \quad S(x) = \int_1^x \frac{dt}{\rho(t)}.$$

Доказательство теорем разобьем на две части.

1. Исследуем рост модулей полиномов

$$P_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right).$$

Для любого n можно записать

$$|P_n(z)| = \prod_{k=1}^{q} |P_{n_k}^{(k)}(z)|, \quad (n_1+n_2+\ldots+n_q = n), \tag{3}$$

где

$$P_{n_k}^{(k)}(z) = \prod_{\nu_m^{(k)} \leqslant n}\left(1 - \frac{z}{\lambda_{\nu_m^{(k)}}}\right) = \prod_{m=1}^{n_k}\left(1 - \frac{z}{\lambda_{\nu_m^{(k)}}}\right),$$

$\{\lambda_{\nu_m^{(k)}}\}$ – введенные ранее подпоследовательности последовательности $\{\lambda_\nu\}$.

Пусть $z = re^{i\Theta}$, и $-\frac{\pi}{2}+\alpha < \Theta < \frac{\pi}{2}-\alpha$.

Тогда

$$\left|1 - \frac{z}{\lambda_{\nu_m^{(k)}}}\right| \leqslant \left|1 - \frac{z}{\rho_{\nu_m^{(k)}}\cdot e^{i\beta_k}}\right|.$$

Значит

$$|P_{n_k}^{(k)}(z)| \leqslant \left|\tilde{P}_{n_k}^{(k)}(z)\right| = \prod_{m=1}^{n_k}\left|1 - \frac{z}{\tilde{\lambda}_{\nu_m^{(k)}}}\right|,$$

где

$$\tilde{\lambda}_{\nu_m^{(k)}} = \rho_{\nu_m^{(k)}}\cdot e^{i\beta_k}.$$

Таким образом, для любого n из (3) следует, что

$$|P_n(z)| \leqslant \prod_{k=1}^{q} |\tilde{P}^{(k)}_{n_k}(z)|. \tag{4}$$

При фиксированном z с изменением n изменяются числа $n_1, n_2, \ldots, n_q$ и вместе с ними значения $|\tilde{P}^{(k)}_{n_k}(z)|$. Фиксируем k и найдем такое $n=\zeta$ (ему соответствует $n_k=\zeta_k$), при котором $|\tilde{P}^{(k)}_{n_k}(z)|$ — наибольший (будем считать, что последовательность $\{\nu^{(k)}_m\}$ бесконечна, в противном случае $|\tilde{P}^{(k)}_{n_k}(z)|$ ограничен).

Заметим, что последовательность чисел $\{\tilde{\lambda}^{(k)}_{\nu_m}\}$ расположена на одном луче, а потому для оценки максимума $|\tilde{P}^{(k)}_{n_k}(z)|$ можно воспользоваться результатами Мартена [1], которые заключаются в следующем.

Модуль $\tilde{P}^{(k)}_{n_k}(z)$ будет иметь максимум при таком индексе ζ_k, для которого

$$\rho_{\zeta_k} \leqslant \frac{r}{2\cos(\Theta-\beta_k)}, \quad \rho_{\zeta_k+1} > \frac{r}{2\cos(\Theta-\beta_k)}. \tag{5}$$

Кроме того, справедливы неравенства

$$\ln|\tilde{P}^{(k)}_{n_k}(z)| - \Phi^{(k)}(r, \Theta, \beta_k) \leqslant 0, \tag{6}$$

где

$$\Phi^{(k)}(r, \Theta, \beta_k) = \int\limits_{\frac{\rho_{\nu_1^{(k)}}}{r}}^{\frac{1}{2\cos(\Theta-\beta_k)}} \frac{[1-u\cos(\Theta-\beta_k)]\, x_k(ur)}{u\,[u^2-2u\cos(\Theta-\beta_k)+1]}\, du.$$

Функция $\Phi^{(k)}(r, \Theta, \beta_k)$ определена только для $|\Theta-\beta_k| < \frac{\pi}{2}$ и $r \geqslant 0$. Когда r постоянно, а $(\Theta-\beta_k) \to \pm\frac{\pi}{2}$ функция $\Phi^{(k)}(r, \Theta, \beta_k)$ имеет предел, конечный или бесконечный, в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^2_{\nu^{(k)}_m}}$, и в случае сходимости этого ряда, функция $\Phi^{(k)}(r, \Theta, \beta_k)$ при r постоянном есть непрерывная функция Θ для $|\Theta-\beta_k| \leqslant \frac{\pi}{2}$ и

$$\Phi^{(k)}\left(r, \ \pm\frac{\pi}{2}+\beta_k\right) = \int\limits_{\frac{\rho_{\nu_1^{(k)}}}{r}}^{\infty} \frac{x_k(ur)}{u(u^2+1)}\, du.$$

Рассмотрим снова всю последовательность $\{\lambda_\nu\}$, и пусть $\arg z = \Theta \geqslant 0$. Пусть $\nu = m_1$ — тот номер, для которого

$$\rho_{m_1} \leqslant \frac{r}{2\cos(\Theta-\alpha)}, \quad \rho_{m_1+1} > \frac{r}{2\cos(\Theta-\alpha)};$$

а $\nu = m_2$ — тот номер, для которого

$$\rho_{m_2} \leqslant \frac{r}{2\cos(\Theta+\alpha)}, \quad \rho_{m_2+1} > \frac{r}{2\cos(\Theta+\alpha)}.$$

Очевидно, что $m_1 \leqslant m_2$. Покажем, что при $n < m_1$ последовательность $\{| P_n(z) |\}$ возрастает, а при $n > m_2$ убывает (z — фиксировано).

Для этого рассмотрим разность

$$\ln |P_{n-1}(z)| - \ln |P_n z| = -\frac{1}{2} \ln \left\{ 1 + \frac{r}{\rho_n} \left[\frac{r}{\rho_n} - 2\cos(\Theta - \Theta_n) \right] \right\},$$

и заметим, что при $n < m_1$

$$\rho_n \leqslant \rho_{m_1} \leqslant \frac{r}{2\cos(\Theta - \alpha)} < \frac{r}{2\cos(\Theta - \Theta_n)}$$

и следовательно, $\ln | P_{n-1}(z) | - \ln | P_n(z) | < 0$.

Если $n > m_2$, то $n \geqslant m_2 + 1$ и

$$\rho_n \geqslant \rho_{m_2+1} > \frac{r}{2\cos(\Theta + \alpha)} > \frac{r}{2\cos(\Theta - \Theta_n)},$$

$$\ln |P_{n-1}(z)| - \ln |P_n(z)| > 0.$$

Утверждение доказано.

В случае, когда $\arg z = \Theta \leqslant 0$, рассмотрим снова числа $\nu = m_1$ и $\nu = m_2$. Легко видеть, что в этом случае $m_1 > m_2$, при $n < m_2$ последовательность $\{| P_n(z) |\}$ возрастает, а при $n > m_1$ убывает.

Таким образом, в любом случае можно указать такой номер $n = n^*$, при котором $| P_n(z) |$ будет иметь максимум (z — фиксировано).

В силу неравенств (3), (4) и (6) имеем $\left(\text{числа } \zeta_k \text{ определены выше (5)}\right)$

$$|P_{n^*}(z)| = \prod_{k=1}^{q} \left| P_{n_k^*}^{(k)}(z) \right| \leqslant \prod_{k=1}^{q} \left| \tilde{P}_{n_k^*}^{(k)}(z) \right| \leqslant \prod_{k=1}^{q} \left| \tilde{P}_{\zeta_k}^{(k)}(z) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp \sum_{k=1}^{q} \Phi^{(k)}(r, \Theta, \beta_k), \quad (n^* = n_1^* + n_2^* + \ldots + n_q^*).$$

Так как разбиение угла $[-\alpha, \alpha]$ произвольно, то

$$|P_{n^*}(z)| \leqslant \exp \inf \sum_{k=1}^{q} \Phi^{(k)}(r, \Theta, \beta_k), \tag{7}$$

где нижняя грань берется по всевозможным разбиениям угла $[-\alpha, \alpha]$.

2. Перейдем теперь к условиям разложимости функции $f(z)$ в ряд вида (A).

Предполагаем, что последовательность $\{\lambda_\nu\}$ удовлетворяет условиям (1), и тогда ряд (A) сходится в полуплоскости $Ax + By - s > 0$, где s определено формулами (2).

Пусть сначала $s \geqslant 0$.

Используя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu P_\nu(z) = \sum_{\nu=0}^{m-1} (P_\nu - P_{\nu+1}) \sum_{k=0}^{\nu} a_k + P_m \sum_{k=0}^{m} a_k.$$

При этом $\lim\limits_{m\to\infty} P_m \sum\limits_{k=0}^{m} a_k=0$, если $Ax+By-s>0$, что следует из неравенств вида (см. [3])

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k\right|<C_1\, e^{(s+\varepsilon)\, S_m}, \quad |P_m(z)|<M\, e^{-(Ax+By-\varepsilon)\, S_m},$$

где C_1, M — постоянные, $\varepsilon>0$ сколь угодно мало.

Таким образом, в случае, когда $Ax+By-s>0$ $(s\geqslant 0)$, получаем, что

$$f(z)=z\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b_\nu}{\lambda_{\nu+1}}\cdot P_\nu(z), \tag{8}$$

где

$$b_\nu=\sum_{k=0}^{\nu} a_k \quad \left(\text{так как}\quad P_\nu-P_{\nu+1}=P_\nu\cdot\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\cdot z\right).$$

Пусть теперь $s<0$.

В этом случае ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится.

Применяя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu P_\nu(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu+\sum_{\nu=1}^{m}(P_\nu-P_{\nu-1})\sum_{k=\nu}^{\infty} a_k-P_m\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k.$$

Если $Ax+By-s>0$, то последний член стремится к нулю, когда $m\to\infty$, и мы имеем, что

$$f(z)=c_0-z\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\cdot\frac{1}{\lambda_\nu}\cdot P_{\nu-1}(z), \tag{9}$$

где

$$c_\nu=\sum_{k=\nu}^{\infty} a_k.$$

Легко установить, что ряды (8) и (9) абсолютно сходятся при $Ax+By-s>0$.

В самом деле, в первом случае, имеем

$$|b_\nu|<Ke^{(s+\delta)\, S_\nu}, \quad |P_\nu(z)|<Me^{-(Ax+By-\varepsilon)\, S_\nu},$$

$\varepsilon>0$, $\delta>0$, и общий член ряда (8) меньше по абсолютной величине, чем

$$KMr\cdot\frac{1}{|\lambda_{\nu+1}|}\cdot\exp\{-(Ax+By-s-\varepsilon-\delta)\, S_\nu\},$$

а это общий член сходящегося ряда при $Ax+By-s>\delta+\varepsilon$.

Относительно ряда (9) можно провести аналогичные рассуждения.

Итак, мы имеем, если $\mu > s$ (при этом μ может быть сколь угодно близким к s), что

$$|f(z)| < r K_0 + rK \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_\nu|} \cdot e^{\mu S_\nu} \cdot |P_\nu(z)|, \tag{10}$$

где K_0 и K — две константы, не зависящие от z.

Пусть $s < 0$, значит и $\mu < 0$. В этом случае

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_\nu|} \cdot e^{\mu S_\nu}$$

— числовой сходящийся ряд.

Следовательно, из (7) и (10) имеем, что

$$|f(z)| < C \cdot r \exp \inf \sum_{k=1}^{q} \Phi^{(k)}(r, \Theta, \beta_k), \tag{11}$$

для

$$r > M, \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} + \alpha < \Theta < \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

В неравенстве (11) можно считать, что $\Phi^{(k)}(r, \Theta, \beta_k) \equiv 0$, если в угле $[\psi_{k-1}, \psi]$ содержится лишь конечное число точек из $\{\lambda_\nu\}$.

Таким образом, утверждение теоремы 1 полностью доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда $s > 0$, следовательно, $\mu > 0$.

При любом значении z, для которого $Ax + By - s > 0$, ряд в правой части (10) сходится, но коэффициенты при $|P_\nu(z)|$ могут стремиться к бесконечности вместе с ν.

Здесь уже нельзя утверждать, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_\nu|} \cdot e^{\mu S_\nu}$$

сходится, и потому ряд (10) надо разделить на три части

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_0 - 1} + \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_1} + \sum_{\nu=\nu_1+1}^{\infty} = g_0 + g_1 + g_2,$$

где ν_0 таково, что $\mu \leqslant \rho(\nu_0)$, и не зависит от z.

Пусть

$$\varphi_1 = \Theta + \alpha, \text{ если } \Theta \geqslant 0, \quad \varphi_1 = \Theta - \alpha, \text{ если } \Theta \leqslant 0,$$

и пусть ν_1 — самое малое целое число, такое, что

$$\rho(\nu_1) \geqslant \frac{r(1+\varepsilon)}{2\cos\varphi_1},$$

($\varepsilon > 0$ — любое) (ν_1 зависит от z).

При этих условиях g_0 ведет себя как многочлен конечной степени, и имеем, что

$$\lim_{r \to \infty} g_0 \cdot \exp\left\{-\sum_{k=1}^{q} \Phi^{(k)}(r, \Theta, \beta_k)\right\} = 0. \tag{12}$$

Для оценки g_1 мы замечаем, что при достаточно большом r имеют место неравенства

$$\rho(n^*) \leqslant \frac{r}{2\cos\varphi_1} \leqslant \frac{r(1+\varepsilon)}{2\cos\varphi_1} \leqslant \rho(\nu_1),$$

или $\nu_0 \leqslant n^* \leqslant \nu_1$.

Тогда согласно оценке (7) для $|P_{n^*}(z)|$ и известным оценкам для сумм вида

$$\sum_{\nu=p}^{q-1} \frac{1}{|\lambda_\nu|} \cdot e^{\mu S_\nu}$$

(см. [1]) получим, что

$$g_1 \leqslant rK \exp\left\{\inf \sum_{k=1}^{q} \Phi^{(k)}(r,\ \Theta,\ \beta_k)\right\} \cdot \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_1} \frac{1}{|\lambda_\nu|} \cdot e^{\mu S_\nu} <$$

$$< rK \exp\left\{\inf \sum_{k=1}^{q} \Phi^{(k)}(r,\ \Theta,\ \beta_k) + \mu S_{\nu_1}\right\}. \tag{13}$$

Оценим g_2. При $\nu > \nu_1$ последовательность $|P_\nu(z)|$ убывает. Имеем

$$\ln|P_\nu| - \ln|P_{\nu-1}| = \frac{1}{2}\ln\left[1 + \frac{r^2}{\rho_\nu^2} - \frac{2r\cos(\Theta-\Theta_\nu)}{\rho_\nu}\right] <$$

$$< \frac{r^2}{2\rho_\nu^2} - \frac{r\cos(\Theta-\Theta_\nu)}{\rho_\nu} = -\frac{r\cos(\Theta-\Theta_\nu)}{\rho_\nu}\left[1 - \frac{r}{2\rho_\nu\cos(\Theta-\Theta_\nu)}\right] <$$

$$< -\frac{r\cos\varphi_1}{\rho_\nu} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

так как

$$\frac{r}{2\rho_\nu\cos(\Theta-\Theta_\nu)} \leqslant \frac{r}{2\rho_{\nu_1}\cos\varphi_1} \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Итак,

$$|P_\nu| < |P_{\nu_1}| \cdot \exp\left\{-\frac{r\cos\varphi_1}{1+\varepsilon} \cdot \varepsilon\left[\frac{1}{\rho_{\nu_1+1}} + \ldots + \frac{1}{\rho_\nu}\right]\right\} <$$

$$< |P_{\nu_1}| \cdot \exp\left\{-\frac{r\cos\varphi_1}{1+\varepsilon} \cdot \varepsilon\,[S_\nu - S_{\nu_1}]\right\}.$$

Получаем

$$g_2 < Kr\,|P_{\nu_1}| \cdot \exp\left\{\frac{r\varepsilon\cos\varphi_1}{1+\varepsilon} \cdot S_{\nu_1}\right\} \cdot \sum_{\nu=\nu_1+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_\nu|} \cdot \exp\left\{\left(\mu - \frac{r\varepsilon\cos\varphi_1}{1+\varepsilon}\right)S_\nu\right\}. \tag{14}$$

Предположим, что

$$r\cos\varphi_1 \geqslant (1+\mu) \cdot \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{15}$$

В (14) сумма справа не превышает умноженного на константу выражения

$$\exp\left\{\left[\mu - \frac{r\varepsilon\cos\varphi_1}{1+\varepsilon}\right] S_{\nu_1}\right\},$$

и потому

$$g_2 < Kr\,|P_{\nu_1}| \cdot \exp\mu S_{\nu_1} < Kr\,\exp\left\{\mu S_{\nu_1} + \inf \sum_{k=1}^{q} \Phi^{(k)}(r,\ \Theta,\ \beta_k)\right\}. \tag{16}$$

Сравнивая (12), (13) и (16), мы получаем утверждение теоремы 2.

Заметим, что так как $\mu > s$, то легко установить, что угол, определенный неравенствами (15), принадлежит полуплоскости $Ax+By-s>0$.

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда последовательность $\{\lambda_\nu\}$ имеет конечную угловую плотность, не равную тождественно нулю, то есть существует такая неубывающая функция $X(\psi)$ (не равная тождественно постоянной), что, каковы бы ни были ψ_{k-1} и ψ_k, не принадлежащие некоторому исключительному счетному множеству, существует предел

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{x_k(\rho)}{\rho} = X(\psi_k) - X(\psi_{k-1}), \tag{17}$$

где $x_k(\rho)$ определены выше.

Можно доказать, что в этом случае предел (1) всегда существует [3].

Теорема 3. *Если последовательнсcть $\{\lambda_\nu\}$ имеет не равную тождественно нулю угловую плотность, то функция $f(z)$, о которой шла речь в теоремах 1 и 2, удовлетворяет в соответствующих углах условию*

$$h(\Theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\Theta})|}{r} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} \{\cos(\Theta-\psi)\ln[2\cos(\Theta-\psi)] + (\Theta-\psi)\sin(\Theta-\psi)\}\, dX(\psi).$$

Доказательство. Сначала выберем такое число q и такое разбиение угла $|\arg z| \leqslant \alpha$, чтобы

$$\left| \sum_{k=1}^{q} \int_0^{\frac{1}{2\cos(\Theta-\beta_k)}} \frac{1-u\cos(\Theta-\beta_k)}{u^2-2u\cos(\Theta-\beta_k)+1} [X(\psi_k)-X(\psi_{k-1})]\, du - \right.$$

$$\left. - \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^{\frac{1}{2\cos(\Theta-\psi)}} \frac{1-u\cos(\Theta-\psi)}{u^2-2u\cos(\Theta-\psi)+1}\, dX(\psi)\, du \right| < \varepsilon, \tag{18}$$

где ε — наперед заданное, сколь угодно малое положительное число.

Теперь возьмем другое сколь угодно малое положительное число δ, и из равенства (17) для всех $\rho > A(\varepsilon, \delta) > \rho_1^{(k)}$ будем иметь, что

$$\left| \frac{x_k(\rho)}{\rho} - [X(\psi_k) - X(\psi_{k-1})] \right| < \delta. \tag{19}$$

Далее можно указать такое r_0, что

$$\frac{1}{r}\cdot A(\varepsilon, \delta) < \frac{1}{2\cos(\Theta-\beta_k)}$$

для $r \geqslant r_0$.

Тогда для $r \geqslant r_0$ с учетом равенств (19) и (18) запишем, что

$$\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{q} \Phi^{(k)}(r, \Theta, \beta_k) = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{q} \int_{\frac{\rho_1^{(k)}}{r}}^{\frac{1}{2\cos(\Theta-\beta_k)}} \frac{[1-u\cos(\Theta-\beta_k)]\, x_k(ur)}{u[u^2-2u\cos(\Theta-\beta_k)+1]}\, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{q}\int\limits_{\frac{\rho_1}{r}}^{\frac{1}{r}\cdot A(\varepsilon,\delta)} \frac{[1-u\cos(\Theta-\beta_k)]\,x_k(ur)}{u\,[u^2-2u\cos(\Theta-\beta_k)+1]}\,du\,+$$

$$+\sum_{k=1}^{q}\int\limits_{\frac{1}{r}A(\varepsilon,\delta)}^{\frac{1}{2\cos(\Theta-\beta_k)}} \frac{1-u\cos(\Theta-\beta_k)}{u^2-2u\cos(\Theta-\beta_k)+1}\,[X(\psi_k)-X(\psi_{k-1})]\,du+$$

$$+\delta\sum_{k=1}^{q}\int\limits_{\frac{1}{r}A(\varepsilon,\delta)}^{\frac{1}{2\cos(\Theta-\beta_k)}} \frac{1-u\cos(\Theta-\beta_k)}{u^2-2u\cos(\Theta-\beta_k)+1}\,du\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{q}\int\limits_{\frac{\rho_1}{r}}^{\frac{1}{r}A(\varepsilon,\delta)} \frac{[1-u\cos(\Theta-\beta_k)]\,x_k(ur)}{u^2-2u\cos(\Theta-\beta_k)+1}\cdot\frac{du}{u}\,+$$

$$+\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2\cos(\Theta-\psi)}} \frac{1-u\cos(\Theta-\psi)}{u^2-2u\cos(\Theta-\psi)+1}\,dX(\psi)\,du+\varepsilon\,+$$

$$+\delta\sum_{k=1}^{q}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2\cos(\Theta-\beta_k)}} \frac{1-u\cos(\Theta-\beta_k)}{u^2-2u\cos(\Theta-\beta_k)+1}\,du. \qquad (20)$$

Величина

$$\frac{[1-u\cos(\Theta-\beta_k)]\,x_k(ur)}{u^2-2u\cos(\Theta-\beta_k)+1}$$

при

$$\frac{\rho_1}{r}\leqslant u\leqslant\frac{A(\varepsilon,\delta)}{r}$$

ограничена, а потому первая сумма интегралов в неравенстве (20) оценивается сверху положительной постоянной, которая не зависит от r.

Если теперь в неравенстве (20) перейти к пределу при $r\to\infty$, то получим, в виду того, что ε и δ сколь угодно малы

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{q}\Phi^{(k)}(r,\ \Theta,\ \beta_k)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}dX(\psi)\int\limits_{0}^{\frac{1}{2\cos(\Theta-\psi)}}\frac{1-u\cos(\Theta-\psi)}{u^2-2u\cos(\Theta-\psi)+1}\,du=$$

$$=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\{\cos(\Theta-\psi)\ln[2\cos(\Theta-\psi)]+(\Theta-\psi)\sin(\Theta-\psi)\}\,dX(\psi).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\Theta})|}{r} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} dX(\psi) \int_{0}^{\frac{1}{2\cos(\Theta-\psi)}} \frac{1-u\cos(\Theta-\psi)}{u^2-2u\cos(\Theta-\psi)+1}\, du + \mu \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{j\left[\frac{r(1+\varepsilon)}{2\cos\varphi_1}\right]}{r}.$$

Легко показать, что, если последовательность $\{\lambda_\nu\}$ имеет конечную угловую плотность, не равную тождественно нулю, то существует и конечен

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ln n}.$$

Напомним, что

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\lambda_\nu|} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\rho_\nu}, \qquad S(x) = \int_1^x \frac{dt}{\rho(t)}, \qquad j(r) = S\big(x(r)\big).$$

Имеем

$$\frac{j(r)}{r} = \frac{S\big(x(r)\big)}{\ln[x(r)]} \cdot \frac{\ln[x(r)]}{x(r)} \cdot \frac{x(r)}{r}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{j(r)}{r} = 0,$$

так как

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln[x(r)]}{x(r)} = 0.$$

Теорема 3 доказана.

§ 2. Достаточные условия

Теорема 4. *Пусть последовательность* $\{\lambda_\nu = \rho_\nu e^{i\Theta_\nu}\}$ *удовлетворяет условию* (1),

$$\rho_\nu \leqslant \rho_{\nu+1}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_\nu} = \infty, \quad |\Theta_\nu| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2},$$

а функция $\varphi_2 = \varphi_2(\Theta)$ *определена условием*: $\varphi_2 = \Theta - \alpha$, *если* $\Theta \geqslant \alpha$, $\varphi_2 = \Theta + \alpha$, *если* $\Theta \leqslant -\alpha$, $\varphi_2 = 0$, *если* $|\Theta| \leqslant \alpha$.

Если в угле $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} + \alpha$ *функция* $f(z)$ *голоморфна и удовлетворяет неравенству*

$$|f(re^{i\Theta})| < D \cdot \frac{\cos\varphi_2}{r} \cdot \exp\left\{\Phi(r, \varphi_2) + kj\left(\frac{r}{2\cos\varphi_2}\right)\right\},$$

где $k \geqslant 0$, D — *любая постоянная, функция* $j(r)$ *определена ранее,*

$$\Phi(r, \varphi_2) = \int_{\frac{\rho_1}{r}}^{\frac{1}{2\cos\varphi_2}} \frac{(1-u\cos\varphi_2)\, x(ur)}{u(u^2-2u\cos\varphi_2+1)}\, du,$$

то $f(z)$ *представима интерполяционным рядом* (A), *который сходится к* $f(z)$ *во всяком случае в полуплоскости* $Ax+By-k>0$.

Доказательство. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — коэффициенты ряда (A), вычисленные формально с помощью значений, которые принимает $f(z)$ при $z=\lambda_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим остаточный член ряда (A):

$$R_n(z)=f(z)-\Pi_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{P_n(z)\, f(\zeta)\, d\zeta}{P_n(\zeta)\,(\zeta-z)},$$

где C — контур, окружающий точки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, и z и содержащийся в области голоморфности $f(z)$, а $\Pi_{n-1}(z)$ — многочлен от z степени $(n-1)$, который принимает те же значения, что $f(z)$ при $z=\lambda_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$.

Пусть

$$\zeta=\rho e^{i\psi}, \quad \lambda_\nu=\rho_\nu e^{i\Theta_\nu},$$

$$|\psi|\leqslant\frac{\pi}{2}+\alpha, \quad |\Theta_\nu|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}, \quad P_n(\zeta)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\zeta}{\lambda_\nu}\right).$$

Имеем

$$|P_n(\zeta)|=\prod_{\nu=1}^{n}\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\rho_\nu^2}-\frac{2\rho}{\rho_\nu}\cos(\psi-\Theta_\nu)}>$$

$$>\prod_{\nu=1}^{n}\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\rho_\nu^2}-\frac{2\rho}{\rho_\nu}\cos\varphi_2}=|\tilde{P}_n(\zeta)|,$$

где $\tilde{P}_n(\zeta)=\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\zeta}{\tilde{\lambda}_\nu}\right)$, причем $\tilde{\lambda}_\nu=\rho_\nu e^{i\alpha}$, если $\psi\geqslant\alpha$, $\tilde{\lambda}_\nu=\rho_\nu e^{i\psi}$, если $|\psi|\leqslant\alpha$, $\tilde{\lambda}_\nu=\rho_\nu e^{-i\alpha}$; если $\psi\leqslant-\alpha$.

Пусть кривая C состоит из дуг трех окружностей, объединенных полярным уравнением вида

$$\rho=2\rho_n\cos\varphi_2(\psi). \tag{21}$$

Контур C меняется с изменением n.

Известно [1], что из всех полиномов $\tilde{P}_m(\zeta)$ наибольшее по модулю значение для всех ζ, удовлетворяющих равенству $\rho_n=\frac{\rho}{2\cos\varphi_2(\psi)}$ будет иметь тот полином, номер которого равен n.

Пусть теперь $z=re^{i\Theta}$ — любая точка из угла $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}+\alpha$. Кривая C принадлежит области голоморфности функции $f(z)$ и содержит внутри себя точки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, а при достаточно большом n и точку z.

Согласно [1], имеем на всех трех дугах окружностей соответственно

$$|P_n(\zeta)|>|\tilde{P}_n(\zeta)|>\frac{\exp\Phi(\rho, \varphi_2)}{\left|1-\frac{\zeta}{\rho_1}\right|}, \tag{22}$$

где $\Phi(\rho, \varphi_2)$ определена выше.

С другой стороны [2], при заданном z справедливы неравенства

$$|P_n(z)| < M e^{-(Ax+By-\varepsilon) S_n}. \tag{23}$$

По условию $f(\zeta)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(\zeta)| < D \cdot \frac{\cos \varphi_2 \psi}{\rho} \cdot \exp \left\{ \Phi(\rho, \varphi_2) + kj\left(\frac{\rho}{2 \cos \varphi_2}\right) \right\}. \tag{24}$$

Разобьем интеграл, представляющий $R_n(z)$, соответственно на три интеграла по каждой из дуг трех окружностей, образующих C.

Замечая, что в точках контура C имеет место равенство

$$j\left(\frac{\rho}{2 \cos \varphi_2}\right) = S_n,$$

и используя неравенства (22), (23), (24), получим, что каждый из упомянутых интегралов по модулю будет меньше, чем

$$N \cdot \max_C \left|\frac{\zeta - \rho_1}{z - \zeta}\right| \cdot \exp\{(-Ax - By + k + \varepsilon) S_n\}$$

(N – постоянная).

Очевидно, что $\max\limits_C \left|\frac{\zeta-\rho_1}{z-\zeta}\right|$ ограничен при всех достаточно больших n.

Значит, при $z = x + iy$ таком, что $Ax + By - k > 0$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} R_n(z) = 0.$$

Тем самым теорема 4 доказана.

Московский институт
химического машиностроения

Поступило в редакцию
13.IX.1968

Литература

1. Y. Martin, Sur les séries d'interpolation (Thèse), Ann. Ec. Norm. Sup., t. 66, 1949.
2. Н. С. Насековская, Абсолютная сходимость интерполяционного ряда, Лит. матем. сб., VII, № 2 (1967), 297–304.
3. Н. С. Насековская, О сходимости интерполяционных рядов, Лит. матем. сб., VII, № 3 (1967), 471–481.

ANALIZINĖS FUNKCIJOS INTERPOLIACINĖMIS EILUTĖMIS IŠREIŠKIMO SĄLYGOS

N. Nasekovskaja

(*Reziumė*)

Nustatomos sąlygos, kad analizinė funkcija $f(z)$ būtų išreiškiama eilute

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right),$$

kur $\{\lambda_\nu\}$ yra kompleksinių skaičių seka,

$$|\arg \lambda_\nu| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

LES CONDITIONS POUR LA REPRESENTATION DES FONCTIONS PAR LES SERIES D'INTERPOLATION

N. Nasekovskaja

(*Résumé*)

On établie des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour la représentation d'une fonction analytique $f(z)$ par une série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right),$$

où $\{\lambda_\nu\}$ est une suite de nombres complexes,

$$|\arg \lambda_\nu| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}.$$