IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–517.537

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ЯКОБИ

А. Г. Нафталевич

По теореме Якоби для тройки комплексных чисел α, β и γ, $\mathrm{Im}\ (\alpha:\beta)\neq 0$, найдется мероморфная функция $f(z)$, $f(z)\not\equiv C$, с периодами α, β и γ, в том и только том случае, когда числа α, β, γ линейно зависимы над кольцом целых чисел, т.е. когда имеются три неравных одновременно нулю целых числа a, b и c, для которых выполняется равенство

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0.$$

Рассмотрим разностные операторы

$$\begin{aligned} &A[f(z)]=f(z+\alpha)-f(z),\\ &B[f(z)]=f(z+\beta)-f(z),\\ &C[f(z)]=f(z+\gamma)-f(z) \end{aligned} \tag{1}$$

и выскажем теорему Якоби такими словами.

Для того чтобы система разностных уравнений

$$\begin{cases} A[f(z)]=0,\\ B[f(z)]=0,\\ C[f(z)]=0 \end{cases} \tag{2}$$

имела мероморфное решение $f(z)$, $f(z)\not\equiv C$, необходимо и достаточно, чтобы числа α, β и γ были линейно зависимы над кольцом целых чисел.

В связи с этой теоремой А. И. Маркушевич поставил следующий вопрос. *Пусть A, B и C обозначают разностные операторы более общие, чем данные в* (1). *Что тогда можно сказать о мероморфных решениях системы* (2)?

В настоящей работе мы рассматриваем разностные операторы с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &A[f(z)]=\sum_{k=1}^{l} a_k f(z+\alpha_k),\\ &B[f(z)]=\sum_{k=1}^{m} b_k f(z+\beta_k),\\ &C[f(z)]=\sum_{k=1}^{n} c_k f(z+\gamma_k), \end{aligned} \tag{3}$$

где a_k, b_k, c_k и α_k, β_k, γ_k — комплексные числа, и изучаем соответствующую систему (2).

Заметим, что при таком определении операторов A, B и C *система* (2) *и даже система, состоящая только из двух уравнений* (скажем, $A[f(z)]=0$ и $B[f(z)]=0$) *может иметь целые решения* $f(z)$, $f(z)\not\equiv 0$, только *в исключительных случаях*, а именно только тогда, когда характеристические многочлены (они определены несколько ниже) этой системы имеют общие корни. Сказанное является непосредственным следствием из результата А. О. Гельфонда [1] (стр. 464) о системе двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка.

Ниже мы сформулируем две теоремы о мероморфных решениях системы вида (2), но прежде условимся о некоторых терминах.

1. Оператор A (см. (3)) называется направленным по прямой P, если все точки α_k, $k=1, 2, \ldots, l$ (шаги оператора A) лежат на прямой P, или на параллельной к ней прямой P'. На прямой P (или P') произвольно выберем направление и предположим, что точки α_k пронумерованы в порядке их следования по выбранному направлению. Каждый из двух полузамкнутых отрезков (симметричных относительно начала координат) $z=t\alpha$ и $z=-t\alpha$, где $0\leqslant t<1$ и $\alpha=\alpha_l-\alpha_1$, назовем фундаментальным отрезком оператора A, а произвольную полузамкнутую полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми, проходящими через концы фундаментального отрезка, назовем фундаментальной полосой оператора A (заметим, что в работе [2] мы ввели понятие фундаментальной полосы и в том случае, когда оператор A не является направленным).

2. Если операторы A и B направлены соответственно по прямым P и Q, то эти операторы будем называть одинаково направленными в случае, когда прямые P и Q параллельны, и различно направленными в противном случае. Если A и B — различно направленные операторы, а $z=t\alpha$ и $z=t\beta$, $0\leqslant t<1$ — их фундаментальные отрезки, то $\operatorname{Im}(\alpha:\beta)\neq 0$. Каждый из четырех полузамкнутых параллелограммов

$$\Pi_{i,j}: z=\delta_i t\alpha+\delta_j s\beta,\ 0\leqslant t<1,\ 0\leqslant s<1,$$
$$i, j=1, 2,\ \delta_1=1,\ \delta_2=-1,$$

(фундаментальные отрезки операторов A и B являются сторонами этих параллелограммов) назовем фундаментальным параллелограммом пары операторов A и B.

3. Функцию вида

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{p} m_k e^{\mu_k t},$$

где m_k и μ_k — комплексные числа, назовем многочленом Дирихле. Пусть S — некоторое множество точек на комплексной плоскости. Многочлен Дирихле $\varphi(t)$, $\varphi(t)\not\equiv 0$, назовем S-многочленом, если все показатели μ_k этого многочлена лежат в множестве S.

4. Многочлен Дирихле

$$A(t)=\sum_{k=1}^{l} a_k e^{\alpha_k t}$$

назовем характеристическим многочленом оператора A (см. (3)).

5. Мероморфную функцию $f(z)$ назовем **собственно мероморфной**, если она имеет хотя бы один полюс.

В работе [2] мы показали, что одно разностное уравнение

$$A[f(z)]=0 \tag{4}$$

имеет бесконечно много собственно мероморфных решений. Более того, мероморфные решения этого уравнения можно выбрать с большим произволом, а именно для этих решений имеет место такой аналог теоремы Миттаг-Леффлера.

Для любой последовательности точек λ_n, $\lim \lambda_n=\infty$, *взятой из фундаментальной полосы оператора* A, *и любой последовательности рациональных функций вида*

$$R(z, \lambda_n)=\sum_{k=1}^{s_n}\frac{l_{nk}}{(z-\lambda_n)^k}$$

существует мероморфное решение $f(z)$ *уравнения* (4), *имеющее в фундаментальной полосе полюсы в точках* λ_n (*и только в них*) *с главными частями* $R(z, \lambda_n)$.

Система уравнений

$$\begin{cases} A[f(z)]=0, \\ B[f(z)]=0, \end{cases} \tag{5}$$

где A и B — пара различно направленных разностных операторов с фундаментальным параллелограммом П была рассмотрена нами в работе [3]. Там было показано, что в случае, когда пара характеристических многочленов $A(t)$ и $B(t)$ (операторов A и B) не имеет общих корней, то *существует мероморфное решение системы* (5), *имеющее в фундаментальном параллелограмме произвольно наперед заданные полюсы и главные части*. Если же характеристические многочлены имеют общие корни, то выбор полюсов и главных частей в фундаментальном параллелограме П ограничен некоторыми условиями (как в случае эллиптических функций). Тем не менее и в этом случае *существует бесконечно много собственно мероморфных решений системы* (5).

Заметим, что для наличия собственно мероморфных решений у системы (5) существенным является условие различной направленности операторов A и B. Если операторы A и B являются одинаково направленными, то, как следует из ниже формулируемой (и доказанной в этой работе) теоремы, система (5) имеет собственно мероморфные решения только в исключительных случаях.

Теорема 1. *Пусть* A и B — *одинаково направленные операторы,* I — *фундаментальный отрезок одного из них (для определенности оператора* A). *Для того, чтобы система* (5) *имела собственно мероморфное решение, необходимо и достаточно, чтобы характеристические многочлены* $A(t)$ и $B(t)$ (*операторов* A и B) *были связаны соотношением*

$$a(t)A(t)+b(t)B(t)\equiv 0, \tag{6}$$

выполняющимся хотя бы для одной пары многочленов Дирихле $a(t)$ *и* $b(t)$, *причем* $b(t)$ *является* I-*многочленом.*

Замечание 1. Тождество (6) очевидно выполнено, если положить $a(t)=B(t)$ и $b(t)=-A(t)$. Отсюда видно, какой смысл имеет наложенное на многочлен $b(t)$ ограничение быть I-многочленом.

Замечание 2. Сказанное в теореме 1 можно дополнить еще таким утверждением.

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ — *одинаково направленные операторы и* I — *фундаментальный отрезок оператора* $\boldsymbol{A}$. *Для того чтобы система уравнений*

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}[f(z)]=0, \\ \boldsymbol{B}_i[f(z)]=0, \ i=1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{7}$$

имела собственно мероморфное решение, необходимо и достаточно, чтобы существовал I-многочлен $b(t)$ *и последовательность многочленов* $a_i(t)$, *для которых выполняются тождества*

$$a_i(t)\, A(t)+b(t)\, B_i(t)=0 \tag{8}$$

при $i=1, 2, 3, \ldots$. *Здесь по-прежнему* $A(t)$ *и* $B_i(t)$ *являются характеристическими многочленами соответствующих операторов.*

Обратим внимание на то, что многочлен $b(t)$ от i не зависит.

Замечание 3. В дальнейшем будет показано, что *в случае, когда операторы* $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ *определены равенствами* (1), *теорема* 1 *выражает следующий известный факт: для того чтобы существовала собственно мероморфная функция, имеющая два периода* α *и* β, $\mathrm{Im}(\alpha:\beta)=0$, *необходимо и достаточно, чтобы отношение* $\alpha:\beta$ *было рациональным числом.*

Обратимся, наконец, к системе разностных уравнений (2).

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{C}$ — *тройка разностных операторов, определенных равенствами* (3), *пара* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *является различно направленной и* Π — *ее фундаментальный параллелограмм.*

Для того чтобы система (2) *имела собственно мероморфное решение, необходимо и достаточно, чтобы характеристические многочлены* $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ (операторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$) *были связаны соотношением*

$$a(t)\, A(t)+b(t)\, B(t)+c(t)\, C(t)=0, \tag{9}$$

выполняющимся хотя бы для одной тройки многочленов Дирихле $a(t)$, $b(t)$ *и* $c(t)$, — *причем* $c(t)$ *является* Π-*многочленом.*

Замечание 1. Сказанное в теореме 2 (как и в случае теоремы 1) можно дополнить еще таким утверждением.

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — *различно направленные операторы с фундаментальным параллелограммом* Π, *а* $\boldsymbol{C}_i$ — *конечное или бесконечное множество разностных операторов с постоянными коэффициентами.*

Для того чтобы система уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}[f(z)]=0, \\ \boldsymbol{B}[f(z)]=0, \\ \boldsymbol{C}_i[f(z)]=0, \ i=1, 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{10}$$

имела собственно мероморфные решения, необходимо и достаточно, чтобы существовал П*-многочлен* $c(t)$ *и последовательность пар многочленов Дирихле* $a_i(t)$ и $b_i(t)$, *для которых выполняются тождества*

$$a_i(t)A(t)+b_i(t)B(t)+c(t)C_i(t)=0 \tag{11}$$

при $i=1, 2, 3, \ldots$ *Здесь по прежнему* $A(t)$, $B(t)$ *и* $C_i(t)$ *обозначают характеристические функции соответствующих операторов.*

Замечание 2. Как будет показано дальше, *теорема* 2 *сводится к теореме Якоби в случае, когда операторы* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{C}$ *определены равенствами* (1).

Доказательство сформулированных теорем и замечаний

1. При изучении разностных уравнений удобно пользоваться выражением разностного оператора через дифференциальный оператор D, $Df(z)=f'(z)$ (ср. [3]). Чтобы получить это выражение, разложим функцию $f(z+\gamma)$ (где γ — некоторое комплексное число) в формальный ряд Тейлора

$$f(z+\gamma)=f(z)+\frac{f'(z)}{1!}\gamma+\frac{f''(z)}{2!}\gamma^2+\cdots$$

Пользуясь дифференциальным оператором D, предыдущее разложение запишем в виде

$$f(z+\gamma)=\left(1+\frac{\gamma D}{1!}+\frac{\gamma^2D^2}{2!}+\cdots\right)f(z)=e^{\gamma D}f(z).$$

Оператор $A[f(z)]$ (см. (3)) можно представить в виде $A(D)f(z)$, где

$$A(D)=\sum_{k=1}^{l} a_k e^{\alpha_k D}, \tag{12}$$

а уравнение $A[f(z)]=0$ в виде

$$A(D)\ f(z)=0.$$

Заметим, что характеристическая функция $A(t)$ оператора A получается из $A(D)$ заменой D на t.

Между дифференциальными операторами $A(D)$, имеющими вид (12), и разностными операторами $\boldsymbol{A}$ можно установить взаимно однозначное соответствие. При этом, если $A(D)$ и $B(D)$ соответствуют операторам $\boldsymbol{A}[f(z)]$ и $\boldsymbol{B}[f(z)]$, то $aA(D)+bB(D)$ соответствует оператору $a\boldsymbol{A}[f(z)]+b\boldsymbol{B}[f(z)]$ (при любых комплексных постоянных a и b) и $A(D)\cdot B(D)$ соответствует оператору $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}[f(z)]]=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{A}[f(z)]]$. Последнее утверждение, означающее, что подстановка одного разностного оператора в другой сводится к перемножению соответствующих дифференциальных операторов, будет часто использовано. В частности, оператору $\boldsymbol{A}[f(z+\gamma)]$ (γ — произвольное комплексное число) соответствует дифференциальный оператор $\exp(\gamma D)\ A(D)$. Очевидно, что разностное уравнение $\boldsymbol{A}[f(z+\gamma)]=0$ эквивалентно уравнению $\boldsymbol{A}[f(z)]=0$. Следовательно, уравнения системы

$$A_i(D)f(z)=0,\ i=1, 2, 3, \ldots, \tag{13}$$

где $A_i(D)$ — операторы вида (12), можно умножить на $\exp(\gamma_i D)$, где γ_i — любые комплексные числа. Другими словами, мы получим систему, равносильную (13), если подвергнем произвольному сдвигу γ_i шаги разностного оператора A_i, соответствующего оператору $A_i(D)$. Подходящими сдвигами можно достигнуть, чтобы все операторы A_i, участвующие в системе (13), имели общий шаг $\alpha=0$.

2. Обратимся к доказательству теоремы 1. Для большей ясности рассмотрим сначала систему

$$\begin{cases} A[f(z)]=0, \\ B[f(z)]=0 \end{cases} \tag{5}$$

в частном случае, когда

$$A[f(z)]=f(z+\pi)-f(z), \quad A(D)=e^{\pi D}-1, \tag{14}$$

а B — оператор, направленный по действительной прямой

$$B[f(z)]=\sum_{k=1}^{m} b_k f(z+\beta_k), \qquad B(D)=\sum_{k=1}^{m} b_k e^{\beta_k D},$$

где $0=\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_m$.

Полузамкнутые отрезки

$$I: 0\leqslant \operatorname{Re} z<\pi, \ \operatorname{Im} z=0,$$

$$I_1: -\pi<\operatorname{Re} z\leqslant 0, \ \operatorname{Im} z=0$$

являются фундаментальными для оператора A (для определенности через I мы обозначили первый из них), а полузамкнутые полосы

$$\Pi: 0\leqslant \operatorname{Re} z<\pi,$$

$$\Pi_1: -\pi<\operatorname{Re} z\leqslant 0$$

являются фундаментальными полосами этого оператора.

Заметим еще, что функция

$$f(z)=H(z), \text{ где } H(z)=\operatorname{ctg} z$$

(причина, по которой предпочитаем здесь и в дальнейшем вместо $\operatorname{ctg} z$ писать $H(z)$, станет ясной впоследствии) является собственно мероморфным решением уравнения

$$A[f(z)]\equiv f(z+\pi)-f(z)=0. \tag{15}$$

Следовательно,

$$A(D)\,H(z)\equiv 0. \tag{16}$$

Функция $H(z)$ имеет в фундаментальной полосе Π_1 единственный простой полюс в точке $z=0$ с вычетом, равным единице. Если точки $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ лежат в полосе Π и $m_1, m_2, \ldots, m_n$ $(m_k\neq 0)$ — произвольно зафиксированные комплексные числа, то функция

$$f(z)=\sum_{i=1}^{n} m_i e^{\mu_i D} H(z)=\sum_{i=1}^{n} m_i H(z+\mu_i)=\sum_{i=1}^{n} m_i \operatorname{ctg}(z+\mu_i)$$

также является собственно мероморфным решением уравнения (15) и имеет в полосе Π_1 простые полюсы в точках $-\mu_i$ с соответствующими вычетами m_i. Другими словами, если $b(t)$ — некоторый П-многочлен (в частности I-многочлен), то функция

$$f(z)=b(D)H(z) \tag{17}$$

является собственно мероморфным решением уравнения (15).

Предположим теперь, что в качестве $b(t)$ мы взяли I-многочлен, участвующий в соотношении (6). Тогда (как сейчас покажем) функция (17) является и решением уравнения $B[f(z)]=0$, а значит, и системы (5). В самом деле, по соотношению (6)

$$b(t)B(t)\equiv -a(t)A(t).$$

Поэтому (см. (17) и (16))

$$B(D)f(z)=B(D)b(D)H(z)=-a(D)A(D)H(z)\equiv 0.$$

Таким образом, мы доказали, что *выполнение соотношения* (6) *достаточно* (*в рассматриваемом частном случае*) *для существования собственно мероморфного решения системы* (5).

Заметим, что таким же рассуждением можно доказать достаточность выполнения соотношений (8) для существования собственно мероморфного решения системы (7) (в частном случае, когда A — оператор (14)).

3. Обратимся к доказательству необходимости соотношения (6) в предположении, что A — оператор (14). Предварительно введем одно понятие и докажем несколько лемм.

Пусть A_i, $i=1,2,3,\ldots$ — некоторая последовательность (конечная или бесконечная) разностных операторов с постоянными коэффициентами. Если $f(z)$ — целая функция, то и функции $A_i[f(z)]$, $i=1,2,3,\ldots$ являются целыми. Возможно, что эти функции будут целыми, хотя сама функция $f(z)$ является собственно мероморфной. *Класс всех мероморфных функций $f(z)$, для которых $A_i[f(z)]$, $i=1,2,3,\ldots$ оказываются целыми, обозначим через* $\boldsymbol{K}(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ (ср. [3]). Этот класс является линейным пространством над полем комплексных чисел: если $f_i(z)\in \boldsymbol{K}(A_1,A_2,A_3,\ldots)$, $i=1,2,\ldots,n$, то и $c_1f_1(z)+ +c_2f_2(z)+\ldots+c_nf_n(z)\in\boldsymbol{K}(A_1,A_2,A_3,\ldots)$, где c_i — произвольные комплексные числа. Если $f(z)\in\boldsymbol{K}(A_1,A_2,A_3,\ldots)$, то этому классу принадлежат и $f'(z)$ и $\boldsymbol{L}[f(z)]$, где $\boldsymbol{L}$ — произвольный разностный оператор с постоянными коэффициентами. Классу $\boldsymbol{K}(A_1,A_2,A_3,\ldots)$ принадлежат все целые функции и все мероморфные решения системы разностных уравнений

$$A_i[f,(z)]=0,\quad i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Заметим еще, что $\boldsymbol{K}(A_1,A_2,A_3,\ldots)\subset\boldsymbol{K}(A_{i_1},A_{i_2},A_{i_3},\ldots)$, где $i_1, i_2, \ldots$ — произвольные натуральные числа. В частности $\boldsymbol{K}(A_1,A_2,A_3,\ldots)\subset\boldsymbol{K}(A_i)$ при любом натуральном i. Кроме того,

$$\boldsymbol{K}(A_1,A_2,A_3,\ldots)=\boldsymbol{K}(A_1)\cap\boldsymbol{K}(A_2)\cap\boldsymbol{K}(A_3)\ldots$$

Лемма 1. *Пусть A — разностный оператор* (14), Π_1 — *его фундаментальная полоса и $f(z)$ — мероморфная функция. Если функция $f(z)$ принадлежит классу $\boldsymbol{K}(A)$ и она не имеет полюсов в полосе Π_1, то $f(z)$ — целая функция.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что функция $f(z)$ имеет хотя бы один полюс, скажем в точке $z=\lambda$. Тогда нетрудно сообразить (используя условие $f(z)\in K(A)$), что функция $f(z)$ имеет еще полюсы во всех точках вида $\lambda+k\pi$, где k — произвольное целое число. Хотя бы одна из этих точек попадает в полосу Π_1, а это противоречит условию леммы об отсутствии полюсов в этой полосе.

Лемма 2. *Пусть A — разностный оператор* (14), *и I — его фундаментальный отрезок, а $f(z)$ — собственно мероморфная функция, все полюсы которой являются простыми и лежат на действительной оси. Если $f(z)\subset \subset K(A)$, то*

$$f(z)=b(D)H(z)+g(z),\ H(z)=\operatorname{ctg} z, \tag{18}$$

где $b(t)$ — некоторый I-многочлен и $g(z)$ — целая функция.

Обратно, любая функция такого вида является собственно мероморфной, принадлежит классу $K(A)$ и все ее полюсы являются простыми и лежат на действительной оси.

Доказательство. Пусть $f(z)$ — рассматриваемая в лемме функция. По лемме 1 она имеет полюсы и на фундаментальном отрезке I_1. Обозначим эти полюсы (из I_1) через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и соответствующие вычеты функции $f(z)$ через $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Тогда многочлен

$$b(t)=\sum_{i=1}^{n} l_i e^{-\lambda_i t}$$

является I-многочленом, а функция

$$g(z)=f(z)-b(D)H(z), \tag{19}$$

не имеет полюсов на отрезке I_1, а следовательно и в фундаментальной полосе Π_1. Так как $f(z)\in K(A)$ и $H(z)\in K(A)$ (см. (16)), то и $g(z)\in K(A)$. По лемме 1 функция $g(z)$ является целой. Равенство (18) следует из (19).

Остальные утверждения, содержащиеся в лемме 2, являются очевидными.

Лемма 3. *Пусть все операторы A_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, направлены по действительной оси. Если в классе $K(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ содержится хотя бы одна собственно мероморфная функция $f(z)$, то в этом классе содержится также собственно мероморфная функция $\varphi(z)$, все полюсы которой являются простыми и лежат на действительной оси.*

Доказательство. По условию функция $f(z)$ является собственно мероморфной. Поэтому она имеет хотя бы один полюс. Предположим, что $f(z)$ имеет в точке $\lambda_1=\lambda$ полюс и соответствующую главную часть

$$R(z, \lambda)=\sum_{k=1}^{n} \frac{l_k}{(z-\lambda)^k}, \qquad l_n\neq 0. \tag{20}$$

Пусть на прямой $\operatorname{Im} z=\operatorname{Im}\lambda$ функция $f(z)$ помимо полюса $\lambda_1=\lambda$ имеет еще полюсы в точках λ_s, $s=2, 3, 4, \ldots$, и соответствующие главные части

$$R(z, \lambda_s)=\sum_{k=1}^{n_s} \frac{l_{sk}}{(z-\lambda_s)^k}.$$

По теореме Миттаг-Леффлера существует мероморфная функция $\varphi_1(z)$, имеющая полюсы в точках λ_s, $s=1, 2, 3, \ldots$, и соответствующие главные части

$$r(z, \lambda_s) = \frac{l_{sn}}{z-\lambda_s}, \qquad l_{1n}=l_n\neq 0$$

(см. (20)), $l_{sn}=0$, если $n>n_s$.

Заметим, что некоторые из точек λ_s могут оказаться фиктивными полюсами функции $\varphi_1(z)$ (именно те точки λ_s, для которых $l_{sn}=0$). Но эта функция является собственно мероморфной, так как по крайней мере точка $\lambda_1=\lambda$ является ее полюсом. Кроме того, все ее полюсы простые и лежат на прямой $\operatorname{Im} z=\operatorname{Im}\lambda$.

Пусть M — некоторый направленный разностный оператор с постоянными коэффициентами, все шаги которого лежат на прямой $\operatorname{Im} z=h$, и $f(z)$ — рассматриваемая нами функция. Если функция $M[f(z)]$ имеет в некоторой точке ζ, $\operatorname{Im}\zeta=\operatorname{Im}\lambda+h$, главную часть

$$G(z, \zeta)=\sum_{k=1}^{p}\frac{g_k}{(z-\zeta)^k},$$

то (как нетрудно сообразить) функция $M[\varphi_1(z)]$ имеет в этой точке ζ главную часть

$$\frac{b}{z-\zeta},$$

где $b=0$, если $n>p$, и $b=g_n$ при $n\leqslant p$. Значит, если $f(z)\in K(M)$, то и $\varphi_1(z)\in K(M)$. По условию леммы $f(z)\in K(A_1, A_2, A_3, \ldots)$. Поэтому и $\varphi_1(z)\in K(A_1, A_2, A_3, \ldots)$. Функция $\varphi_1(z+\lambda)=\varphi(z)$ имеет все требуемые в лемме свойства.

4. В следующей лемме рассмотрим два многочлена Дирихле

$$L(t)=\sum_{k=1}^{l} l_k e^{\lambda_k t} \tag{21}$$

и

$$M(t)=\sum_{k=1}^{m} m_k e^{\mu_k t},$$

показатели которых лежат на действительной оси и пронумерованы в порядке убывания: $\lambda_l<\lambda_{l-1}<\ldots<\lambda_1$, $\mu_m<\mu_{m-1}<\ldots<\mu_1$. Через J обозначим отрезок действительной оси

$$J: 0\leqslant \operatorname{Re} z<\mu_1-\mu_m,\ \operatorname{Im} z=0.$$

Лемма 4. *Существует такое действительное число α и такой многочлен Дирихле $m(t)$, что*

$$e^{\alpha t}L(t)\equiv m(t)\cdot M(t)+r(t), \tag{22}$$

где $r(t)$ — является или J-многочленом, или $r(t)\equiv 0$.

Доказательство. Лемма выражает тот факт, что многочлены Дирихле с действительными коэффициентами можно, как и алгебраические многочлены, делить с остатком.

Предположим сначала, что $\lambda_l \geqslant 0$ и $\mu_m = 0$:

$$0 \leqslant \lambda_l < \lambda_{l-1} < \ldots < \lambda_1,$$

$$0 = \mu_m < \mu_{m-1} < \ldots < \mu_1,$$

и назовем число λ_1 степенью многочлена $L(t)$, а μ_1 — степенью многочлена $M(t)$. Кроме того, условимся такие многочлены (у которых все показатели неотрицательны) называть положительными и обозначим

$$d = \mu_1 - \mu_2, \quad d > 0. \tag{23}$$

Если степень многочлена $L(t)$ меньше степени многочлена $M(t)$, то $L(t)$ является или J-многочленом, или $L(t) \equiv 0$. В этом случае соотношение (22) выполнено, если положить $\alpha = 0$, $m(t) \equiv 0$ и $r(t) = L(t)$. Если же степень $L(t)$ не меньше степени $M(t)$, то многочлен $L(t)$ запишем в виде

$$L(t) = P(t) + Q(t),$$

где в $P(t)$ входят все члены суммы (21), у которых показатели

$$\lambda_k \geqslant \max[\lambda_1 - d, \ \mu_1] \quad (\text{см. } (23)),$$

а в $Q(t)$ — все остальные члены этой суммы. Далее определяем многочлен $L_1(t)$ (назовем его начальным остатком многочлена $L(t)$) равенством

$$L(t) = m_1(t) M(t) + L_1(t), \tag{24}$$

где

$$m_1(t) = \frac{1}{m_1} e^{-\mu_1 t} P(t).$$

Многочлен $L_1(t)$ является положительным, и его степень не больше $\max(\lambda_1 - d, \mu_1)$.

Возможно, что $L_1(t)$ является J-многочленом, или $L_1(t) \equiv 0$. Тогда соотношение (24) дает требуемое в лемме представление многочлена $L(t)$, и процесс деления многочлена $L(t)$ считаем законченным. В противном случае для многочлена $L_1(t)$ определяем начальный остаток $L_2(t)$, для $L_2(t)$ — начальный остаток $L_3(t)$ и т.д., пока не закончится процесс деления. Этот процесс заканчивается через конечное число шагов. В самом деле, если допустить, что на p-ом шаге процесс не закончился, то, как следует из сказанного выше о степени начального остатка, степень остатка, полученного на $p-1$-ом шаге не больше $\lambda_1 - (p-1)d$ и не меньше μ_1. Но это возможно только в случае, когда $\mu_1 \leqslant \lambda_1 - (p-1)d$, т.е. $p \leqslant [(\lambda_1 - \mu_1) : d] + 1$.

Допустим, что процесс деления закончился на k-ом шаге. Тогда к соотношению (24) добавится еще $k-1$ соотношение

$$L_{i-1}(t) = m_i(t) M(t) + L_i(t), \quad i = 2, 3, \ldots, k,$$

где $m_i(t)$ — некоторые многочлены Дирихле, а $L_k(t)$ — или J-многочлен, или $L_k(t) \equiv 0$.

Если все эти равенства прибавим к (24) и обозначим

$$\alpha = 0, \ m(t) = m_1(t) + m_2(t) + \ldots + m_k(t), \ r(t) = L_k(t),$$

то получим равенство (22).

В общем случае выберем числа α и β так, чтобы многочлены Дирихле

$$L^*(t)=e^{\alpha t}L(t),\quad M^*(t)=e^{\beta t}M(t),$$

были положительными и наименьшая степень многочлена $M^*(t)$ была равна нулю. Тогда (по уже доказанному)

$$L^*(t)=m^*(t)\,M^*(t)+r^*(t),$$

где $m^*(t)$ – некоторый многочлен Дирихле и $r^*(t)$ – или J-многочлен, или $r^*(t)\equiv 0$. Равенство (22) будет выполнено при $m(t)=m^*(t)\exp(\beta t)$ и $r(t)=$ $=r^*(t)$.

5. Теперь уже легко закончить доказательство теоремы 1 в случае, когда A – оператор (14). Пусть $f(z)$ – собственно мероморфное решение системы (5). Очевидно $f(z)\in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. По лемме 3 в классе $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ содержится собственно мероморфная функция $\varphi(z)$, все полюсы которой простые и лежат на действительной оси. Функция $\varphi(z)$ содержится в классе $\boldsymbol{K}(A)$ и по лемме 2

$$\varphi(z)=b(D)H(z)+g(z),\quad H(z)=\operatorname{ctg} z,$$

где $g(z)$ – целая функция и $b(t)$ является I-многочленом.

Так как $\varphi(z)\in\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B})$ и $g(z)\in\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B})$, то и $b(D)H(z)\in\boldsymbol{K}(\boldsymbol{B})$, другими словами

$$B(D)b(D)H(z) \text{ – целая функция.} \tag{25}$$

Воспользуемся леммой 4 и запишем тождество

$$e^{\alpha t}B(t)b(t)=a_1(t)A(t)+r(t), \tag{26}$$

где α – некоторое действительное число, $a_1(t)$ – многочлен Дирихле и $r(t)$ или является I-многочленом, или $r(t)\equiv 0$. Следовательно,

$$r(D)H(z)=e^{\alpha D}B(D)b(D)H(z)-a_1(D)A(D)H(z),$$

что в соединении с (16) и (25) показывает, что $r(D)H(z)$ является целой функцией. Но это возможно (см. лемму 2) только в случае $r(t)\equiv 0$. Таким образом, соотношение (26) можно переписать в виде

$$a(t)A(t)+b(t)B(t)\equiv 0,$$

где $b(t)$ является I-многочленом и $a(t)=-a_1(t)\exp(-\alpha t)$ – некоторый многочлен Дирихле.

Доказательство замечания 2 к теореме 1 завершается таким же способом.

6. В предыдущих пунктах мы предполагали, что оператор A имеет вид (14), что позволило нам использовать при доказательстве теоремы 1 и замечания 2 функцию $H(z)=\operatorname{ctg} z$. Нетрудно проследить, что в приведенных выше выкладках мы использовали только следующие свойства функции $\operatorname{ctg} z$:

1. *Эта функция является собственно мероморфным решением разностного уравнения $A[f(z)]=0$ (в рассматриваемом частном случае).*

2. *В фундаментальной полосе оператора A она имеет единственный простой полюс и ее вычет равен единице.*

3. *Для этой функции верна лемма 2.*

В нашей работе [3] показано (хотя это явно там не сформулировано), что и *для общего разностного оператора A* (см. (3)), *направленного по действительной оси, существует функция $H(z)$ со всеми перечисленными выше* *свойствами*. Поэтому, если в предыдущих пунктах под $H(z)$ понимать только что указанную функцию, то приведенные в этих пунктах рассуждения представляют собой доказательство теоремы 1 и замечания 2 в общем случае (без ограничения, что A — оператор (14)).

7. Чтобы доказать теорему 2 и замечание 1, нам немного придется добавить к уже сказанному.

Пусть A и B — пара различно направленных разностных операторов с фундаментальным параллелограммом П. В работе [3] показано, что *существует функция $H(z)$ со следующими свойствами*:

1. *Функция $H(z)$ — собственно мероморфная, она принадлежит классу $K(A, B)$ и в фундаментальном параллелограмме имеет единственный простой полюс с вычетом, равным единице.*

2. *Если характеристические многочлены операторов A и B не имеют общих корней, то функция $H(z)$ является решением системы*

$$\begin{cases} A[f(z)]=0, \\ B[f(z)]=0, \end{cases} \tag{5}$$

если характеристические многочлены имеют общие корни, то решением системы (5) *будет функция $P(D)H(z)$, где $P(t)$ — некоторый алгебраический многочлен и D — оператор дифференцирования.*

3. *Если собственно мероморфная функция $f(z)$ принадлежит классу $K(A, B)$ и имеет только простые полюсы, то*

$$f(z)=c(D)H(z)+g(z),$$

где $g(z)$ — целая функция и $c(t)$ является П-многочленом. Обратно, функция указанного вида является собственно мероморфной и имеет только простые полюсы.

Пользуясь этими свойствами функции $H(z)$, мы теорему 2 и замечание 1 к ней докажем таким же способом как и теорему 1. Нам придется только изменить несколько леммы 3 и 4.

Лемма 3′. *Пусть A_i, $i=1, 2, 3, \ldots$ — некоторая совокупность разностных операторов с постоянными коэффициентами. Если существует собственно мероморфная функция $f(z)$, принадлежащая классу $K(A_1, A_2, A_3, \ldots)$, то существует также собственно мероморфная функция $\varphi(z)$, принадлежащая классу $K(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ и имеющая только простые полюсы.*

Доказательство этой леммы ничем существенным не отличается от доказательства леммы 3.

В следующей лемме рассмотрим три многочлена Дирихле

$$L(t)=\sum_{k=1}^{l} l_k e^{\lambda_k t}, \qquad M(t)=\sum_{k=1}^{m} m_k e^{\mu_k t}, \qquad N(t)=\sum_{k=1}^{n} n_k e^{\nu_k t}$$

и предположим, что показатели многочленов $L(t)$ и $M(t)$ лежат соответственно на двух непараллельных прямых и пронумерованы по порядку следования на этих прямых. Через D обозначим полузамкнутый параллелограмм

$$D: z=t\lambda+s\mu, \ 0\leqslant t<1, \ 0\leqslant s<1,$$

где $\lambda=\lambda_l-\lambda_1$, $\mu=\mu_m-\mu_1$.

Лемма 4'. *Существует такое комплексное число α и такие многочлены Дирихле $l(t)$ и $m(t)$, что*

$$e^{\alpha t}N(t)=l(t)L(t)+m(t)M(t)+r(t), \tag{30}$$

где $r(t)$ или является D-многочленом, или $r(t)\equiv 0$.

Доказательство леммы 4' можно повести по такому плану. Сначала (рассуждая как при доказательстве леммы 4) устанавливаем, что для некоторого числа α и некоторого многочлена Дирихле $l(t)$ выполнено соотношение

$$e^{\alpha t}N(t)=l(t)L(t)+r_1(t), \tag{31}$$

где $r_1(t)$ — многочлен Дирихле, все показатели которого лежат в полуполосе

$$z=t\lambda+s\mu,\quad 0\leqslant t<1,\quad 0\leqslant s<\infty.$$

Затем показываем (опять как в лемме 4), что

$$r_1(t)=m(t)M(t)+r(t), \tag{32}$$

где $r(t)$ является или D-многочленом, или $r(t)\equiv 0$, а $m(t)$ — некоторый многочлен Дирихле. Сложив тождества (31) и (32), получим требуемое в лемме соотношение.

8. Нам осталось доказать замечание 3 к теореме 1 и замечание 2 к теореме 2.

Рассмотрим систему (5) в частном случае, когда одинаково направленные операторы A и B определены равенствами (1). Характеристическими для этих операторов будут многочлены

$$A(t)=e^{\alpha t}-1,\quad B(t)=e^{\beta t}-1, \tag{33}$$

а отрезки $z=t\alpha$ и $z=-t\alpha$, $0\leqslant t<1$ являются фундаментальными для оператора A. Для определенности обозначим через I первый из них и покажем, что соотношение (6) эквивалентно требованию, что $\alpha:\beta$ — рациональное число.

Пусть

$$\beta=p\cdot\frac{\alpha}{q},$$

где p и q — целые числа. Сначала предположим, что $q=1$. Тогда $\beta=p\alpha$ и

$$e^{\beta t}-1=e^{p\alpha t}-1=\frac{e^{p\alpha t}-1}{e^{\alpha t}-1}(e^{\alpha t}-1). \tag{34}$$

Значит (см. (33)),

$$a(t)A(t)+b(t)B(t)\equiv 0, \tag{6}$$

где $b(t)\equiv 1$ является очевидно I-многочленом и

$$a(t)=-\frac{e^{p\alpha t}-1}{e^{\alpha t}-1},$$

как нетрудно видеть, является многочленом Дирихле (как при $p>0$, так и при $p<0$).

Если $q>1$, то в соотношении (34) заменим α на $\alpha:q$ и получим

$$\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\frac{\alpha}{q}t}-1}(e^{\beta t}-1)=\frac{e^{p\frac{\alpha}{q}t}-1}{e^{\frac{\alpha}{q}t}-1}(e^{\alpha t}-1). \tag{35}$$

Значит, выполнено (6) при

$$a(t)=-\frac{e^{p\frac{\alpha}{q}t}-1}{e^{\frac{\alpha}{q}t}-1}, \qquad b(t)=\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\frac{\alpha}{q}t}-1}.$$

Нетрудно усмотреть, что $a(t)$ и $b(t)$ — многочлены Дирихле и $b(t)$ является при этом I-многочленом.

Пусть обратно $b(t)$ является I-многочленом, $a(t)$ — многочлен Дирихле и выполнено (6), но $\beta:\alpha$ не является рациональным числом. Тогда для любого $\varepsilon>0$ имеются целые числа p и q, что $p\alpha+q\beta=\delta$, где $|\delta|<\varepsilon$ (вектор δ очевидно, коллинеарен с векторами α и β). Следовательно,

$$e^{\delta t}-1=e^{(p\alpha+q\beta)t}-e^{q\beta t}+e^{q\beta t}-1=a_1(t)A(t)+b_1(t)B(t), \tag{36}$$

где

$$a_1(t)=e^{q\beta t}\frac{e^{p\alpha t}-1}{e^{\alpha t}-1}, \qquad b_1(t)=\frac{e^{q\beta t}-1}{e^{\beta t}-1} -$$

многочлены Дирихле.

Равенство (36) умножим на $\exp(\gamma t)\,b(t)$, где γ — некоторое число и $b(t)$ является I-многочленом, входящим в (6). Мы получим (пользуясь (6))

$$e^{\gamma t}b(t)(e^{\delta t}-1)=e^{\gamma t}b(t)\,[a_1(t)A(t)+b_1(t)B(t)]=$$

$$=e^{\gamma t}\Big(a_1(t)b(t)-b_1(t)a(t)\Big)A(t).$$

Поэтому (см. (16)) функция $\exp(\gamma D)b(D)\Big(\exp(\delta D)-1\Big)H(z), H(z)=\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{\alpha}$, является целой функцией (равна тождественно нулю). Но это (см. лемму 2) невозможно, так как число δ можно зафиксировать настолько малым, а затем выбрать число γ так, чтобы многочлен $\exp(\gamma t)\,b(t)\,[\exp(\delta t)-1]$ оказался I-многочленом.

Замечание 2 к теореме 2 доказывается аналогично. Укажем только на два обстоятельства.

1. За $H(z)$ следует взять не $\operatorname{ctg} z$, а функцию Вейерштрасса $\zeta(z)$.
2. Предположим, что $a, b, c, c>0$ — целые числа и

$$\gamma=a\frac{\alpha}{c}+b\frac{\beta}{c}.$$

Соотношение (35) следует заменить следующим тождеством:

$$\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\frac{\alpha}{c}t}-1}\,\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\frac{\beta}{c}t}-1}(e^{\gamma t}-1)=e^{b\frac{\beta}{c}t}\,\frac{e^{a\frac{\alpha}{c}t}-1}{e^{\frac{\alpha}{c}t}-1}\,\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\frac{\beta}{c}t}-1}(e^{\alpha t}-1)+$$

$$+\frac{e^{b\frac{\beta}{c}t}-1}{e^{\frac{\beta}{c}t}-1}\,\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\frac{\alpha}{c}t}-1}(e^{\beta t}-1).$$

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
20.XII.68

Литература

1. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, М.—Л., 1952.
2. А. Г. Нафталевич, УМН, 14, 4(88), 1959.
3. А. Г. Нафталевич, Обобщение одной теоремы Эрмита, Лит. матем. сб., V, № 4 (1965), 605—636.

JAKOBI TEOREMOS APIBENDRINIMAS

A. Naftalevičius

(*Reziumė*)

Jakobi teoremą, teigiančią, kad meromorfinė funkcija $f(z)$, $f(z)\not\equiv C$, negali turėti daugiau kaip du periodus, galima ir šitaip nusakyti.

Sakykime, A, B ir C yra skirtuminiai operatoriai

$$A[f(z)]=f(z+\alpha)-f(z),\quad B[f(z)]=f(z+\beta)-f(z),$$
$$C[f(z)]=f(z+\gamma)-f(z). \qquad *$$

Lygčių sistema

$$A[f(z)]=0,\quad B[f(z)]=0,\quad C[f(z)]=0 \qquad **$$

turi meromorfinių sprendinių $f(z)$, $f(z)\not\equiv C$, tik tuo atveju, kai skaičiai α, β ir γ yra tiesiškai priklausomi.

Darbe yra nagrinėjamas šitoks A. Markuševičiaus suformuluotas klausimas.

Kokie yra (*) sistemos sprendiniai, kai skirtuminiai operatoriai A, B, C yra bendresni už duotus (**) lygybėse?

ERWEITERUNG EINES JACOBISCHEN SATZES

A. Naftalewitsch

(*Zusammenfassung*)

Der Satz von Jacobi, dass eine meromorphe Funktion $f(z)$, $f(z)\not\equiv C$, nicht mehr als zwei unabhängige Perioden besitzt, kann auch anders gefasst werden.

Das Gleichungsystem

$$A[f(z)]=0,\quad B[f(z)]=0,\quad C[f(z)]=0, \qquad *$$

wo

$$A[f(z)]=f(z+\alpha)-f(z),\quad B[f(z)]=f(z+\beta)-f(z),$$
$$C[f(z)]=f(z+\gamma)-f(z) \qquad **$$

besitzt meromorphe Lösungen $f(z)$, $f(z)\not\equiv C$, nur dann, wenn die Zahlen α, β, γ linear abhängig sind.

In der Arbeit wird die von A. Markuschewitsch aufgeworfene Frage, was für meromorphe Lösungen das System (*) besitzt, wenn A, B, C allgemeinere Differenzenoperatoren bedeuten, als die durch (**) definierten, behandelt.