IV LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–519.21

# ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ. II

В. Паулаускас

## 1. Обозначения и формулировка теорем

Обозначим через $xy$ покомпонентное умножение векторов $x=(x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$, $y=(y^{(1)}, \dots, y^{(k)})$ и через $\frac{x}{y}$ покомпонентное деление, если $y^{(i)}>0$, $i=1, 2, \dots, k$, т.е.

$$xy=(x^{(1)}y^{(1)}, \dots, x^{(k)}y^{(k)}), \qquad \frac{x}{y}=\left(\frac{x^{(1)}}{y^{(1)}}, \dots, \frac{x^{(k)}}{y^{(k)}}\right).$$

Пусть $\mathcal{P}_k$ – класс всех распределений на $R_k$ с нулевыми математическими ожиданиями и конечными третьими моментами, $\tilde{\mathcal{P}}_k$ – подкласс невырожденных распределений из $\mathcal{P}_k$, $\xi_i=(\xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(k)})$, $i=1, 2, \dots, n$ – независимые $k$-мерные ($k\geqslant 2$) случайные векторы (с.в.) с распределениями $P_i\in\mathcal{P}_k$. Пусть $\Delta_m$ – матрица вторых моментов, а $\Lambda_m=\{\rho_{ij}^{(m)}\}$ – корреляционная матрица с.в. $\xi_m$, $\sigma_m^{(j)2}=M|\xi_m^{(j)}|^2$, $\beta_m^{(j)}=M|\xi_m^{(j)}|^3$, $m=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, k$.
Далее, обозначим:

$$(B_{l,m}^{(i)})^2=\sum_{r=l}^{m}(\sigma_r^{(i)})^2, \quad B_{l,m}=(B_{l,m}^{(1)}, \dots, B_{l,m}^{(k)}), \quad (B_n^{(i)})^2=(B_{1,n}^{(i)})^2, \quad B_n=B_{1,n},$$

$$D_m^{(i)}=\sum_{j=1}^{m}\beta_j^{(i)}, \qquad L_{3n}^{(i)}=\frac{D_n^{(i)}}{(B_n^{(i)})^3}, \qquad S_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j, \qquad Z_n=\frac{S_n}{B_n}.$$

Пусть $K_m=\{\rho_{i,j}^{m,n}\}$, где

$$\rho_{i,j}^{m,n}=\frac{1}{B_{m,n}^{(i)}B_{m,n}^{(j)}}\sum_{l=m}^{n}\rho_{ij}^{(l)}\sigma_l^{(i)}\sigma_l^{(j)}.$$

Ясно, что $K_j$ является корреляционной матрицей с.в.

$$Z_{j,n}=\frac{\sum_{m=j}^{n}\xi_m}{B_{j,n}}.$$

Положим

$$\chi_{nm}=\min_{2\leqslant j\leqslant n}\frac{|K_j|}{|K_j^{mm}|},$$

где $|K_j|$ обозначает детерминант матрицы $K_j$, а $|K_j^{mm}|$ – алгебраическое дополнение к элементу $\rho_{mm}^{j,n}$ матрицы $K_j$.

Пусть $\xi_i'$, $i=1, 2, \ldots, k$, $k$-мерные независимые нормальные с.в. с распределениями $\Phi_i$, нулевыми математическими ожиданиями и матрицами вторых моментов $\Delta_i$, а

$$Z_n'=\frac{\sum_{j=1}^{n}\xi_j'}{B_n}.$$

$P_{Z_n}$ и $\Phi_{Z_n'}$ обозначает распределения сумм $Z_n$ и $Z_n'$, соответстенно. Введем так называемые „псевдомоменты“:

$$\nu_i^{(l)}=\int_{R_k}|x^{(l)}|^3|(P_i-\Phi_i)(dx)|, \qquad W_{3n}^{(l)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu_i^{(l)}}{(B_n^{(l)})^3}.$$

Определим величины $\gamma_j^{(l)}$ следующим образом: $\gamma_j^{(l)}\geqslant 1, j=1, 2\ldots, n, l=1, 2, \ldots, k$ и они подобраны так, что для всех $j=1, 2, \ldots, n$ и $l=1, 2, \ldots, k$ выполняются неравенства

$$\frac{\beta_j^{(l)}}{(\sigma_j^{(l)})^2}\leqslant\frac{G_n^{(l)}}{(B_{1,j}^{(l)})^2}, \tag{1.1}$$

где

$$G_n^{(l)}=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j^{(l)}\beta_j^{(l)}.$$

В дальнейшем

$$H_{3n}^{(l)}=\frac{G_n^{(l)}}{(B_n^{(l)})^3}.$$

Пусть с.в. $S_n$ невырожден. Тогда существует ортогональное преобразование с ортогональной матрицей $A=\{a_{ij}\}$ такое, что с.в. $\tilde{S}_n=AS_n$ имеет некоррелированные компоненты. Пусть $\tilde{\xi}_i=A\xi_i=(\tilde{\xi}_i^{(1)}, \ldots, \tilde{\xi}_i^{(k)})$ и все введенные обозначения со значком $\sim$ наверху будут соответствовать с. в. $\tilde{\xi}_i$. Так, например,

$$(\tilde{\sigma}_m^{(l)})^2=M|\tilde{\xi}_m^{(l)}|^2, \qquad \tilde{Z}_n=\frac{\tilde{S}_n}{\tilde{B}_n}, \qquad \tilde{\nu}_i^{(l)}=\int|x^{(l)}|^3|(\tilde{P}_i-\tilde{\Phi}_i)(dx)|,$$

где $\tilde{P}_i$—распределение с.в. $\tilde{\xi}_i$, а $\tilde{\Phi}_i$—распределение с.в. $\tilde{\xi}'_i$, $k$-мерного нормального с.в. с первыми и вторыми моментами, равными соответствующим моментам с.в. $\tilde{\xi}_i$,

$$\tilde{W}_{3n}^{(l)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{\nu}_i^{(l)}}{(\tilde{B}_n^{(l)})^3}$$

и так далее.

Нормальный с.в. с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей вторых моментов $\Delta$ будем обозначать через $N(0, \Delta)$. $\Phi$ и $\varphi$ будут обозначать распределение и плотность распределения с.в. $N(0, I)$, а $\Phi_T$ и $\varphi_T$ — с.в. $N\left(0, \frac{1}{T^2} I\right)$, где $I$—единичная матрица порядка $k\times k$. $C_1, C_2, \ldots, C_1(k), C_2(k), \ldots$ будут обозначать абсолютные константы и константы, зависящие только от $k$.

Ранняя работа автора [3] и предлагаемая обобщают результаты В. В. Сазонова [1] на случай разно распределенных слагаемых, а также уточняют ряд его результатов. В работе [3] рассматривались оценки величины $\sup\limits_{E\in\mathscr{A}} | P_{Z_n}(E) - \Phi_{Z'_n}(E)|$, где $\mathscr{A}$ — класс множеств вида $\{x : x^{(1)}<y_1,\ x^{(2)}<y_2,\ \ldots,\ x^{(k)}<y_k\}$ $x=(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)})$, $y_i\in R_1$ (т.е. оценки для функций распределения). Цель настоящей работы — получить аналогичные оценки для более широкого класса множеств, а именно, для класса всех универсально измеримых выпуклых множеств $\zeta$.

**Теорема 1.** *Пусть* $P_i\in\mathscr{P}_k$, $i=1, 2, \ldots, n$, *а* $P_{Z_n}\in\tilde{\mathscr{P}}_k$. *Тогда для всех* $n$ *справедливы оценки*

$$\sup_{E\in\zeta} |P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z'_n}(E)|\leqslant C_1(k)\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\theta_i}}\right)^3\sum_{i=1}^{k}W_{3n}^{(i)}\right]^{\frac{1}{4}}, \tag{1.2}$$

$$\sup_{E\in\zeta} |P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z'_n}(E)|\leqslant C_2(k)\left[\sum_{i=1}^{k}\tilde{W}_{3n}^{(i)}\right]^{\frac{1}{4}}, \tag{1.3}$$

*где* $\theta_i$ — *собственные значения корреляционной матрицы с.в.* $Z_n$,

$$C_1(k)=16\left(\frac{8}{3\pi^3}\right)^{\frac{1}{8}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\right]^{\frac{3}{4}}k^{\frac{7}{8}}\leqslant C_1 k^{\frac{5}{4}},\qquad C_2(k)\leqslant C_2k^2.$$

Из теоремы и неравенств $\nu_i^{(j)}\leqslant C_3\beta_i^{(j)}$, $\tilde{\nu}_i^{(j)}\leqslant C_3\tilde{\beta}_i^{(j)}$ вытекает следствие.

**Следствие 1.** *При условиях теоремы* 1

$$\sup_{E\in\zeta} |P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z'_n}(E)|\leqslant C_3(k)\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\theta_i}}\right)^3\sum_{i=1}^{k}L_{3n}^{(i)}\right]^{\frac{1}{4}},$$

$$\sup_{E\in\zeta} |P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z'_n}(E)|\leqslant C_4(k)\left[\sum_{i=1}^{k}\tilde{L}_{3n}^{(i)}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

**Теорема 2.** *Пусть* $P_i\in\mathscr{P}_k$, $i=1, 2, \ldots, n$ *такие, что* $P_{Z_n}\in\tilde{\mathscr{P}}_k$ и

$$\chi_{nm}>0 \text{ для всех } m=1,\ 2,\ \ldots,\ k. \tag{1.4}$$

*Тогда*

$$\sup_{E\in\zeta} |P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z'_n}(E)|\leqslant C_5(k)\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\theta_i}}\right)\sum_{i=1}^{k}\chi_{ni}^{-\frac{3}{2}}H_{3n}^{(i)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.5}$$

$$\sup_{E\in\zeta} |P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z'_n}(E)|\leqslant C_6(k)\left[\sum_{i=1}^{k}\tilde{\chi}_{ni}^{-\frac{3}{2}}\tilde{H}_{3n}^{(i)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.6}$$

*где* $C_5(k)\leqslant C_4k^{\frac{3}{2}}$, $C_6(k)\leqslant C_4k^2$, $C_4=\frac{C_5}{C_6}+C_7C_8$ *и константы* $C_4$ и $C_6$ *удовлетворяют неравенства* (3.26) *и* (3.27).

**Следствие 2.** *Пусть $P_i \in \mathcal{P}_k$, $i=1, 2, \ldots, n$ такие, что $P_{Z_n} \in \bar{\mathcal{P}}_k$ и выполняется* (1.4). *Если выполняются неравенства*

$$\frac{\beta_j^{(l)}}{(\sigma_j^{(l)})^2} \leqslant \frac{D_n^{(l)}}{(B_{1,j}^{(l)})^2} \qquad \begin{matrix} j=1, 2, \ldots, n, \\ l=1, 2, \ldots, k, \end{matrix} \tag{1.7}$$

*то*

$$\sup_{E\in\zeta} |P_{Z_n}(E) - \Phi_{Z'_n}(E)| \leqslant C_6(k) \left[ \left( \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\theta_i}} \right) \sum_{i=1}^{k} \chi_{ni}^{-\frac{3}{2}} L_{3n}^{(i)} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.8}$$

*а если выполняются неравенства*

$$\frac{\tilde{\beta}_j^{(l)}}{(\tilde{\sigma}_j^{(l)})^2} \leqslant \frac{\tilde{D}_n^{(l)}}{(\tilde{B}_{1,j}^{(l)})^2} \qquad \begin{matrix} j=1, 2, \ldots, n, \\ l=1, 2, \ldots, k, \end{matrix} \tag{1.9}$$

*то*

$$\sup_{E\in\zeta} |P_{Z_n}(E) - \Phi_{Z'_n}(E)| \leqslant C_6(k) \left[ \sum_{i=1}^{k} \tilde{\chi}_{ni}^{-\frac{3}{2}} \tilde{L}_{3n}^{(i)} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.10}$$

Как видно из сравнения оценок (1.2)—(1.10) с теоремами 4 и 5 из работы [3], с переходом от класса $\mathcal{A}$ к классу $\zeta$ ухудшается зависимость от размерности $k$ и зависимость от корреляции между компонентами с.в.

Собственные значения корреляционных матриц с.в. $s_i$ обозначим через $\theta_i^{(j)}$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, k$, а

$$\Theta_n = \max_{i\leqslant n} \sum_{j=1}^{k} (\theta_i^{(j)})^{-\frac{1}{2}}.$$

**Теорема 3.** *Пусть распределения $P_i \in \bar{\mathcal{P}}_k$ с.в. $\xi_i$, $i=1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i^{(j)})^2 \geqslant \sigma_j^2, \quad \beta_i^{(j)} \leqslant \beta_j, \quad m=1, 2, \ldots, n, \quad j=1, 2, \ldots, k. \tag{1.11}$$

*Если обозначить $\chi_n^{(l)} = \min\limits_{j\leqslant n} \frac{|\Lambda_j|}{|\Lambda_j^{ll}|}$, то для всех $n$ справедлива оценка*

$$\sup_{E\in\zeta} |P_{Z_n}(E) - \Phi_{Z'_n}(E)| \leqslant C_7(k) \frac{\Theta_n}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j}{(\chi_n^{(j)} \sigma_j^2)^{3/2}}, \tag{1.12}$$

*где $C_7(k) \leqslant C_8 k^3$.*

Если перейти к функциям распределения, то оценку (1.12) можно улучшить.

**Теорема 4.** *В условиях теоремы* 3 *справедлива оценка*

$$\sup_{E\in\mathcal{A}} |P_{Z_n}(E) - \Phi_{Z'_n}(E)| \leqslant C_8(k) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j}{\chi_n^{(j)} \sigma_j^3}, \tag{1.13}$$

*где $C_8(k) \leqslant C_9 k^{\frac{7}{2}}$.*

Из теоремы 4 следует теорема 2 из работы В. В. Сазонова [1].

Сформулируем три теоремы, относящиеся к случаю одинаково распределенных с.в. и усиливающие результаты В. В. Сазонова [1]. Усиление состоит в том, что во всех трех теоремах из вышеупомянутой работы абсолютные моменты заменены „псевдомоментами". Кроме того применение доказанной оценки (2.10) в доказательстве теоремы 3 из [1] позволяет доказать эту теорему для более широкого класса распределений, чем $\tilde{\mathcal{P}}_k$.

Пусть $\xi_i=(\xi_i^{(1)}, \ldots, \xi_i^{(k)})$, $i=1,2\ldots, n$ — независимые, одинаково распределенные с.в. с распределением $P$ и корреляционной матрицей $\Lambda$. $Q$ — распределение нормального с.в., имеющего моменты первых двух порядков, равные соответствующим моментам распределения $P$ и $\nu^{(j)}=\int |x^{(j)}|^3 |(P-Q)(dx)|$. Будем считать

$$M\xi_1^{(j)}=0, \qquad M|\xi_1^{(j)}|^2=1, \qquad Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i .$$

**Теорема 5.** *Существует константа $C_9(k)$ такая, что если $P\in\tilde{\mathcal{P}}_k$ и $t=\{t_i, i=1,2,\ldots,k\}$ — семейство элементов из $R_k$ такое, что реальные случайные величины $(t_i, \xi_1)$, $i=1,2,\ldots,k$ некоррелированы, то*

$$\sup_{E\in\zeta}|P_{Z_n}(E)-Q(E)|\leqslant C_9(k)\,\frac{\max(N_3^{\frac{1}{4}}, N_3)}{\sqrt{n}}, \tag{1.14}$$

*где*

$$N_3=\sum_{i=1}^{k}\nu_{3i}^{(t)}, \qquad \nu_{3i}^{(t)}=\frac{\int_{R_k}|(t_i,x)|^3|(P-Q)(dx)|}{M^{\frac{3}{2}}(t_i,\xi_1)^2}, \qquad C_9(k)\leqslant C_{10}k^4 .$$

**Теорема 6.** *Пусть*

$$P\in\tilde{\mathcal{P}}_k \quad \text{и} \quad \bar{N}_3=\sum_{j=1}^{k}\frac{|\Lambda^{jj}|}{|\Lambda|}\nu^{(j)} .$$

*Тогда для всех $n$ имеет место неравенство*

$$\sup_{E\in A}|P_{Z_n}(E)-Q(E)|\leqslant C_{10}(k)\frac{\max(\bar{N}_3^{\frac{1}{4}}, \bar{N}_3)}{\sqrt{n}}, \tag{1.15}$$

*где* $C_{10}(k)\leqslant C_{11}k^{\frac{7}{2}}$ .

Отметим, что теорема 6 обобщает одномерную теорему автора (см. [4]).

**Теорема 7.** *Пусть*

$$P\in\tilde{\mathcal{P}}_k{}^{*)} \quad \text{и} \quad \tilde{N}_3=\sum_{i=1}^{k}\nu^{(i)} .$$

*Для всех $n$*

$$\sup_{E\in A}|P_{Z_n}(E)-Q(E)|\leqslant C_{11}(k)\frac{\max(\tilde{N}_3^{\frac{1}{3}}, \tilde{N}_3^{\frac{1}{4}})}{n^{\frac{1}{6}}} \tag{1.16}$$

*и* $C_{11}(k)\leqslant C_{12}k^{\frac{5}{3}}$ .

---

*) Теорема верна и для вырожденных $P\in\mathcal{P}_k$ таких, что для соответствующего нормального распределения $Q$ выполнено условие $\sup\limits_{E\in\mathcal{A}} Q\left(\delta(E,h)\right)\leqslant Ch$.

Оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме в случае неодинаково распределенных величин получены у Г. Бергстерема [2], Р. Н. Батачарии [7], а также в [3]. В [2] и [3] рассматривались оценки для класса $\mathscr{A}$, а в [7] рассмотрен только случай, когда все с.в. $\xi_i$ имеют матрицу вторых моментов, равную $\mathbf{I}$, и конечные абсолютные моменты порядка $3+\delta$ $(\delta>0)$.

## 2. Вспомогательные леммы

В доказательстве всех теорем будем применять метод композиций и сглаживание вспомогательным нормальным распределением. В работе [1] доказана следующая лемма.

**Лемма 1.** *Для любого распределения $P$ на $R_k$*

$$\sup_{E\in\zeta}|P(E)-\Phi(E)|=2\sup_{E\in\zeta}|[(P-\Phi)*\Phi_T](E)|+\frac{24k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,\frac{1}{T}\,. \tag{2.1}$$

Для любого множества $E\in R_k$ и $h>0$ через $E^h$ обозначим множество всех точек, расстояние для которых до $E$ меньше чем $h$. Обозначим $\delta(E,h)=E^h\backslash E$, $\delta(E,-h)=(E^c)^h\backslash E^c$, где $E^c$ — дополнение множества $E$.

Нам будет нужна оценка величины $\sup\limits_{E\in\zeta}|P(E)-\Phi_\Lambda(E)|$, где $\Phi_\Lambda$ распределение с.в. $N(0,\Lambda)$ и $\Lambda$ является одновременно корреляционной матрицей. Для этого можно применить оценку (2.1), но сперва придется произвести трансформацию, переводящую матрицу $\Lambda$ в единичную матрицу 1. Мы докажем две леммы, которые дадут оценку величины $\sup\limits_{E\in\zeta}|P(E)-\Phi_\Lambda(E)|$ без применения трансформации. Пусть матрица $\Lambda$ невырожденная и $\lambda_i$, $i=1,2,\ldots,k$ — ее собственные значения.

**Лемма 2.** *Для любого выпуклого множества $E\in R_k$*

$$\Phi_\Lambda\Big(\delta(E,h)\Big)\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}k}\,\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\right)h,$$

$$\Phi_\Lambda\Big(\delta(E,h)\Big)\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}k}\,\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\right)h\,. \tag{2.2}$$

Докажем первое неравенство. По тем же соображениям, что и в доказательстве леммы 1 из [1], достаточно рассматривать ограниченные регулярные выпуклые множества

$$\Phi_\Lambda\Big(\delta(E,h)\Big)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{|\Lambda|}}\int\limits_{\delta(E,h)}e^{-\frac{1}{2}d(x^{(1)},\ldots,x^{(k)})}\,dx^{(1)}\ldots dx^{(k)}\,, \tag{2.3}$$

где

$$d(x^{(1)},\ldots,x^{(k)})=x\Lambda^{-1}x'=\sum_{i,j}\frac{|\Lambda^{ij}|}{|\Lambda|}\,x^{(i)}x^{(j)}\,.$$

Рассмотрим преобразование переменных

$$x^{(i)}=\sum_{j=1}^{k}t_{ij}\,y^{(j)}\,,\qquad i=1,\,2,\,\ldots,k \tag{2.4}$$

с ортогональной матрицей $T=\{t_{ij}\}$, переводящей матрицу $\Lambda^{-1}$ в диагональную. Известно (см. [5] или [6]), что в приведенном виде диагональными элементами будут собственные числа матрицы $\Lambda^{-1}$, которые равны $\lambda_i^{-1}$. Поэтому

$$d(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}) = d'(y^{(1)}, \ldots, y^{(k)}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(y^{(i)})^2}{\lambda_i}.$$

Далее, ортогональная трансформация (2.4) не изменяет расстояния и углов, поэтому множество $\delta(E, h)$ перейдет в множество $\delta(E', h)$. Производя преобразование переменных (2.4) в интеграле (2.3) и принимая во внимание, что якобиан преобразования $|J|=|T|=1$, имеем

$$\Phi_\Lambda\Big(\delta(E,h)\Big) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{|\Lambda|}} \int\limits_{\delta(E',h)} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{y^{(i)2}}{\lambda_i}}\, dy^{(1)}\ldots dy^{(k)}. \qquad (2.5)$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству леммы 1 из [1], поэтому мы укажем только основные пункты доказательства.

Можно показать, что

$$\delta(E', h) \subset \bigcup_{i=1}^{2k} H_i, \qquad (2.6)$$

где $H_i$ — некоторые множества со следующим свойством: пересечение прямой $\{y : y^{(1)}=a_1, \ldots, y^{(i-1)}=a_{i-1}, \; y^{(i+1)}=a_{i+1}, \ldots, y^{(k)}=a_k\}$ с множеством $H_i$ (или $H_{k+i}$), $i=1, 2, \ldots, k$, которое обозначим через $H_i(y^{(1)}\ldots y^{(i-1)}, y^{(i+1)}\ldots y^{(k)})$ покрывается сегментом с длиной $\leqslant h\sqrt{k}$.

Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{|\lambda|}} \int\limits_{H_i} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{y^{(i)2}}{\lambda_i}}\, dy^{(1)}\ldots dy^{(k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{|\Lambda|}} \int\limits_{R_{k-1}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}\frac{y^{(j)2}}{\lambda_j}}\, dy^{(1)}\ldots dy^{(i-1)}dy^{(i+1)}\ldots dy^{(k)} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{H_i(y^{(1)}\ldots y^{(k)})} e^{-\frac{y^{(i)2}}{2\lambda_i}}\, dy^{(i)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\ldots\lambda_k}}{\sqrt{|\Lambda|}} \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\, h = \sqrt{\frac{k}{2\pi\lambda_i}}\, h. \qquad (2.7)$$

Из формул (2.5), (2.6) и (2.7) следует (2.2).

В том случае, когда матрица $\Lambda = I$, тогда $\lambda_i = 1$, и оценка (2.2) превращается в утверждение леммы 1 из работы [1]:

$$\Phi\Big(\delta(E,h)\Big) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k^{\frac{3}{2}}\, h.$$

**Лемма 3.** *Для любого распределения $P$ на $R_k$*

$$\sup_{E\in\zeta}|P(E)-\Phi_\Lambda(E)|\leqslant 2\sup_{E\in\zeta}|[(P-\Phi_\Lambda)*\Phi_T](E)|+\frac{24\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}\cdot T}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}. \quad (2.8)$$

Оценка (2.8) является обобщением оценки (2.1), которая получается при $\Lambda=I$. Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 2 из [1], и мы не будем его проводить.

В доказательстве теорем нам понадобятся некоторые неравенства, связанные с детерминантами. Докажем следующую лемму.

**Лемма 4.** *Пусть $A$ — неотрицательно определенная матрица, а $B$ — положительно определенная. Тогда для всех $i=1,2,\ldots,k$ справедливы неравенства*

$$\frac{|A+B|}{|A^{ii}+B^{ii}|}\geqslant\frac{|A|}{|A^{ii}|}+\frac{|B|}{|B^{ii}|}, \quad \text{если } |A|\neq 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{|A+B|}{|A^{ii}+B^{ii}|}\geqslant\frac{|B|}{|B^{ii}|}, \quad \text{если } |A|=0. \quad (2.10)$$

Утверждение (2.9) содержится в лемме 10 из [2], поэтому нам надо доказать только (2.10). Для определенности возьмем $i=1$. Диагональную матрицу с элементами на диагонали $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk}$ будем обозначать через $D(a_{11},\ldots,a_{kk})$. Известно (см. [5] или [6]), что существует ортогональная матрица $T_{11}$, переводящая одновременно матрицы $A^{11}$ и $B^{11}$ в диагональные матрицы, т.е.

$$T'_{11}A^{11}T_{11}=D(p_{22},p_{33},\ldots,p_{kk}),$$

$$T'_{11}B^{11}T_{11}=D(q_{22},q_{33},\ldots,q_{kk}).$$

Определим матрицу

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0\ldots 0\\ 0 & \\ \vdots & T_{11}\\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$T'AT=\begin{bmatrix}p_{11}, p_{12}, & \ldots, p_{1k}\\ p_{21}, p_{22}, & \ldots, 0\\ p_{31}, 0, p_{33}, & \ldots, 0\\ p_{k1}, 0, & \ldots, p_{kk}\end{bmatrix}, \qquad T'BT=\begin{bmatrix}q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{1k}\\ q_{21}, q_{22}, \ldots, 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ q_{k1}, 0, \ldots, q_{kk}\end{bmatrix},$$

$$p_{1i}=p_{i1}.$$

Из условий леммы имеем: $q_{ii}>0$, $p_{ii}\geqslant 0$, $i\geqslant 2$. Как и в доказательстве леммы 10 из [2], можем записать

$$\frac{|B|}{|B^{11}|}=\frac{|T'BT|}{|T'_{11}B^{11}T_{11}|}=q_{11}-\sum_{i=2}^{k}\frac{q_{1i}^2}{q_{ii}}, \quad (2.11)$$

$$\frac{|A+B|}{|A^{11}+B^{11}|}=p_{11}+q_{11}-\sum_{i=2}^{k}\frac{(p_{1i}+q_{1i})^2}{p_{ii}+q_{ii}}. \quad (2.12)$$

Теперь положим, что ранг матрицы $A$ $r=k-1$. Тогда все $p_{ii}>0, i\geqslant 2$, а так как ортогональная трансформация ранга не меняет, то из равенства

$$|T' AT| = p_{22}\cdot p_{33}\cdot \ldots \cdot p_{kk}\left(p_{11}-\sum_{i=2}^{k}\frac{p_{1i}^2}{p_{ii}}\right)$$

вытекает равенство:

$$p_{11}-\sum_{i=2}^{k}\frac{p_{1i}}{p_{ii}}=0. \tag{2.13}$$

Теперь воспользуемся леммой 9 из [2]. Для любых действительных $a_{1j}$, $b_{1j}$, $=1, 2, \ldots, n$ и $a_{ii}>0$, $b_{ii}>0$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{(a_{1i}+b_{1i})^2}{a_{ii}+b_{ii}}\leqslant\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}^2}{a_{ii}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}^2}{b_{ii}}. \tag{2.14}$$

Применяя неравенство (2.14) к сумме из (2.12) и используя (2.13) и (2.11), получаем

$$\frac{|A+B|}{|A^{11}+B^{11}|}\geqslant q_{11}-\sum_{i=2}^{k}\frac{q_{1i}}{q_{ii}}+p_{11}-\sum_{i=2}^{k}\frac{p_{1i}^2}{p_{ii}}=q_{11}-\sum_{i=2}^{k}\frac{q_{1i}^2}{q_{ii}}=\frac{|B|}{|B^{11}|}.$$

Теперь исследуем случай, когда $r=k-2$. Тогда $|A^{11}|=0$ и при некотором $2\leqslant j\leqslant k$, $p_{jj}=0$. Пусть $p_{22}=0$, $p_{ii}>0$, когда $i\geqslant 3$. Тогда легко видеть, что

$$0=|T'AT|=-p_{12}\cdot p_{21}\cdot p_{33}\cdot\ldots\cdot p_{kk},$$

поэтому $p_{12}=p_{21}=0$, и формула (2.12) принимает вид

$$\frac{|A+B|}{|A^{11}+B^{11}|}=p_{11}+q_{11}-\frac{q_{12}^2}{q_{22}}-\sum_{i=3}^{k}\frac{(p_{1i}+q_{1i})^2}{p_{ii}+q_{ii}}. \tag{2.15}$$

Для удобства обозначим $D=T'AT$. Матрица $D$ имеет ранг $r=k-2$, поэтому $|D^{22}|=0$. Но

$$|D^{22}|=p_{33}\ldots p_{kk}\left(p_{11}-\sum_{i=3}^{k}\frac{p_{1i}^2}{p_{ii}}\right)$$

и так как $p_{ii}>0$, $i\geqslant 3$, то

$$p_{11}-\sum_{i=3}^{k}\frac{p_{1i}^2}{p_{ii}}=0. \tag{2.16}$$

Сумма из формулы (2.15) удовлетворяет условиям леммы 9 из [2], поэтому из (2.14) и (2.16) следует

$$\frac{|A+B|}{|A^{11}+B^{11}|}\geqslant\frac{|B|}{|B^{11}|}.$$

Аналогично можно исследовать случай, когда ранг матрицы еще меньший, поэтому утверждение (2.10) доказано.

**Лемма 5.** *Для каждого невырожденного нормального распределения на $R_k$ с плотностью распределения $\varphi$ и матрицей вторых моментов $\Delta$, для всех $u$, $v$, $t=1, 2, \ldots, k$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{R_k} \left| \frac{\partial^3 \varphi(x)}{\partial x^{(u)} \partial x^{(v)} \partial x^{(t)}} \right| dx \leqslant \sqrt{6} \left( \frac{|\Delta^{uu}|}{|\Delta|} \cdot \frac{|\Delta^{vv}|}{|\Delta|} \cdot \frac{|\Delta^{tt}|}{|\Delta|} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.17}$$

Доказательство см. в [2].

**Лемма 6.** *Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ — два невырожденные $k$-мерные с. в. Если через $\Lambda_i$ обозначить корреляционную матрицу с. в. $\xi_i$, $i=1, 2$, а через $\Lambda$ — корреляционную матрицу с. в. $\xi_1+\xi_2$, то имеет место неравенство*

$$\frac{|\Lambda|}{|\Lambda^{ii}|} \geqslant \min \left\{ \frac{|\Lambda_1|}{|\Lambda_1^{ii}|}, \frac{|\Lambda_2|}{|\Lambda_2^{ii}|} \right\} \qquad i=1, 2, \ldots, k. \tag{2.18}$$

Доказательство. Пусть $\xi_i=(\xi_i^{(1)}, \ldots, \xi_i^{(k)})$, $i=1, 2$, и $m_{ij}^{(l)}=M(\xi_l^{(i)}-M\xi_l^{(i)})(\xi_l^{(j)}-M\xi_l^{(j)})$, $l=1, 2$, $i, j=1, 2, \ldots, k$. Тогда матрицу $\Lambda$ можно представить в виде суммы

$$\Lambda=A_1+A_2, \tag{2.19}$$

где

$$A_l=\{a_{ij}^{(l)}\}, \quad a_{ij}^{(l)}=\frac{m_{ij}^{(l)}}{\sqrt{[m_{ii}^{(1)}+m_{ii}^{(2)}][m_{jj}^{(1)}+m_{jj}^{(2)}]}}, \qquad l=1, 2, \quad i, j=1,2,\ldots,k.$$

Легко видеть, что

$$|A_l|=\prod_{i=1}^{k} \frac{m_{ii}^{(l)}}{m_{ii}^{(1)}+m_{ii}^{(2)}} |\Lambda_l|, \qquad l=1, 2, \tag{2.20}$$

$$|A_l^{jj}|=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \frac{m_{ii}^{(l)}}{m_{ii}^{(1)}+m_{ii}^{(2)}} |\Lambda_l^{jj}|, \qquad l=1, 2, \qquad j=1, 2, \ldots, k. \tag{2.21}$$

Из (2.19)–(2.21), применяя лемму 4, оценку (2.9), получаем

$$\frac{|\Lambda|}{|\Lambda^{jj}|} \geqslant \frac{|A_1|}{|A_1^{jj}|}+\frac{|A_2|}{|A_2^{jj}|}=\frac{m_{jj}^{(1)}}{m_{jj}^{(1)}+m_{jj}^{(2)}} \frac{|\Lambda_1|}{|\Lambda_1^{jj}|}+\frac{m_{jj}^{(2)}}{m_{jj}^{(1)}+m_{jj}^{(2)}} \frac{|\Lambda_2|}{|\Lambda_2^{jj}|} \geqslant$$

$$\geqslant \min \left\{ \frac{|\Lambda_1|}{|\Lambda_1^{jj}|}, \frac{|\Lambda_2|}{|\Lambda_2^{jj}|} \right\},$$

что и надо было доказать.

**Следствие.** *Если $\xi_i$, $i=1, 2, \ldots, n$ невырожденные $k$-мерные с.в. с матрицами корреляций $\Lambda_i$, а $\Lambda$ матрица корреляций с.в. $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, то справедливо неравенство*

$$\frac{|\Lambda|}{|\Lambda^{jj}|} \geqslant \min_{i \leqslant n} \frac{|\Lambda_i|}{|\Lambda_i^{jj}|}, \qquad j=1, 2, \ldots, k. \tag{2.22}$$

**Лемма 7.** *Для любой невырожденной нормальной функции распределения $G$ с матрицей корреляций $\Lambda$, с матрицей вторых моментов $\Delta$ для всех $u$, $v$, $w=1, 2, \ldots, k$ имеем*

$$\left|\frac{\partial^3 G(x)}{\partial x^{(u)}\partial x^{(v)}\partial x^{(w)}}\right| \leqslant \frac{C_{13}}{\sigma_u\sigma_v\sigma_w}\left(\frac{|\Lambda^{uu}|}{|\Lambda|}\cdot\frac{|\Lambda^{vv}|}{|\Lambda|}\cdot\frac{|\Lambda^{ww}|}{|\Lambda|}\right)^{1/2}=$$

$$=C_{13}\left(\frac{|\Delta^{uu}|}{\sigma_u|\Delta|}\,\frac{|\Delta^{vv}|}{\sigma_v|\Delta|}\,\frac{|\Delta^{ww}|}{\sigma_w|\Delta|}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{2.23}$$

*где $\sigma_i^2$ — дисперсия $i$-той компоненты с.в. с функцией распределения $G$.*

Доказательство см. в [1].

## 3. Доказательства теорем

Обозначим композицию распределений:

$$P_{i,j}=P_i*P_{i+1}*\ldots*P_j,\ i<j. \tag{3.0}$$

$\bar{P}_i$, $\bar{\Phi}_i$, $\bar{\bar{P}}_i$, $\bar{\bar{\Phi}}_i$ будут обозначать распределения с.в.

$$\bar{\xi}_i=\frac{\xi_i}{B_n},\qquad \frac{\xi_i'}{B_n},\qquad \bar{\bar{\xi}}_i=\frac{\tilde{\xi}_i}{\tilde{B}_n},\qquad \frac{\tilde{\xi}_i'}{\tilde{B}_n},$$

соответственно, а $\bar{P}_{ij}$, $\bar{\Phi}_{ij}$, $\bar{\bar{P}}_{ij}$, $\bar{\bar{\Phi}}_{ij}$ определяются аналогично (3.0).

Как уже отмечалось в пункте 2, для получения оценок для величины $\sup\limits_{E\in\zeta}|P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z_n'}(E)|$ возможны два подхода:

1) с.в. $Z_n$ невырожденной трансформацией можно перевести в с.в. $\tilde{Z}_n$, а так как невырожденная трансформация переводит класс $\zeta$ сам в себя, то

$$\sup_{E\in\zeta}|P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z_n'}(E)|=\sup_{E\in\zeta}|P_{\tilde{Z}_n}(E)-\Phi_{\tilde{Z}_n'}(E)|=\sup_{E\in\zeta}|P_{\tilde{Z}_n}(E)-\Phi(E)|, \tag{3.1}$$

и можно применить лемму 1. В оценки (1.3), (1.6), (1.10), полученные этим путем, входят параметры с.в. $\tilde{\xi}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$;

2) применить лемму 3. Полученные этим путем оценки выражаются через параметры с.в. $\xi_i$ и собственные значения корреляционной матрицы с.в. $Z_n$.

Для доказательства первых двух теорем, нам нужно оценить величины $V_n(E)=[(P_{Z_n}-\Phi_{Z_n'})*\Phi_T](E)$ и $\tilde{V}_n(E)=[(P_{\tilde{Z}_n}-\Phi)*\Phi_T](E)$. Так как оценки величин $V_n(E)$ и $\tilde{V}_n(E)$ подобны, то мы проведем детальные рассуждения только для одной из них.

Будем пользоваться тождественным разложением

$$V_n(E)=\sum_{j=1}^{n}[\bar{P}_{1,j-1}*\bar{\Phi}_{j+1,n}*\Phi_T*(\bar{P}_j-\bar{\Phi}_j)](E), \tag{3.2}$$

где символы $\bar{P}_{1,0}$ и $\bar{\Phi}_{n+1,n}$ обозначают $\delta_0$ — распределение, сконцентрированное в нуле. Если обозначить $U_1=\delta_0*\bar{\Phi}_{2,n}*\Phi_T$, $U_j=\bar{P}_{1,j-1}*\bar{\Phi}_{j+1,n}*\Phi_T$, когда $j\geqslant 2$, то (3.2) можно переписать следующим образом:

$$V_n(E)=\sum_{j=1}^{n}W_j(E)=\sum_{j=1}^{n}[U_j*(\bar{P}_j-\bar{\Phi}_j)](E). \tag{3.3}$$

Пусть $E$ — некоторое фиксированное множество из $\zeta$. Введем функции

$$h_i(x)=\begin{cases}\delta_0(E+x), & i=1\\ \bar{P}_{1,i-1}(E+x) & i\geqslant 2,\end{cases} \tag{3.4}$$

$$g_i(x)=U_i(E+x),\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Пусть $\overline{\Delta}_i$ — матрица вторых моментов с.в. $\bar{\xi}_i$,

$$B_i=\sum_{j=i}^{n}\overline{\Delta}_j,\qquad A_i=B_i+\frac{1}{T^2}I$$

и $\varphi_i(x)$ обозначает плотность распределения $N(0,A_i)$ ($B_{n+1}$ считаем нулевой матрицей). Тогда из определения $U_i$ и $h_i$ имеем

$$g_1(x)=\int_{R_k}\delta_0(E+x-z)\varphi_2(z)dz=$$

$$=\int_{R_k}h_1(x-z)\varphi_2(z)dz=\int_{R_k}h_1(z)\,\varphi_2(x-z)\,dz \tag{3.5}$$

и аналогично

$$g_i(x)=\int_{R_k}h_i(z)\;\varphi_{i+1}(x-z)\,dz. \tag{3.6}$$

Из разложения Тейлора

$$g_i(y-x)=\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{j!}\left[\left(-\sum_{l=1}^{k}x^{(l)}\frac{\partial}{\partial x^l}\right)^j g_i\right](y)+$$

$$+\frac{1}{6}\left[\left(-\sum_{l=1}^{k}x^{(l)}\frac{\partial}{\partial x^{(l)}}\right)^3 g_i\right](y+\Theta x),\qquad |\Theta|\leqslant 1,\qquad i=1,2,\ldots,n$$

и определения композиции получаем

$$|W_j(E)|=\left|\int_{R_k}U_j(E-x)\,(\bar{P}_j-\bar{\Phi}_j)\,(dx)\right|=\left|\int_{R_k}g_j(-x)\,(\bar{P}_j-\bar{\Phi}_j)\,(dx)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{6}\sum_{u,v,t=1}^{k}\sup_{x\in R_k}\left|\frac{\partial^3 g_j(x)}{\partial x^{(u)}\partial x^{(v)}\partial x^{(t)}}\right|\int_{R_k}|x^{(u)}x^{(v)}x^{(t)}|\,|(\bar{P}_j-\bar{\Phi}_j)(dx)|, \tag{3.7}$$

так как первые два момента у распределений $\bar{P}_j$ и $\bar{\Phi}_j$ совпадают. Третью производную функции $g_j$ оценим с помощью леммы 5. Из (3.5), (3.6) и (2.17), дифференцируя под знаком интеграла и используя тот факт, что $|h_i(x)|\leqslant 1$, получаем

$$\sup_{x\in R_k}\left|\frac{\partial^3 q_j(x)}{\partial x^{(u)}\partial x^{(v)}\partial x^{(t)}}\right|\leqslant\sqrt{6}\left(\frac{|A^{uu}_{j+1}|}{|A_{j+1}|}\cdot\frac{|A^{vv}_{j+1}|}{|A_{j+1}|}\cdot\frac{|A^{tt}_{j+1}|}{|A_{j+1}|}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.8}$$

Теперь из (3.7) и (3.8) вытекает

$$|W_j(E)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{u,v,t=1}^{k} \left( \frac{|A_{j+1}^{uu}|}{|A_{j+1}|} \cdot \frac{|A_{j+1}^{vv}|}{|A_{j+1}|} \cdot \frac{|A_{j+1}^{tt}|}{|A_{j+1}|} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int_{R_k} |x^{(u)} x^{(v)} x^{(t)}| \, |(\bar{P}_j - \bar{\Phi}_j)\,(dx)| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_{R_k} \left[ \sum_{u=1}^{k} \left( \frac{|A_{j+1}^{uu}|}{|A_{j+1}|} \right)^{\frac{1}{2}} |x^{(u)}| \right]^3 |(\bar{P}_j - \bar{\Phi}_j)\,(dx)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k^2}{\sqrt{6}} \sum_{u=1}^{k} \left( \frac{|A_{j+1}^{uu}|}{|A_{j+1}|} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{R_k} |x^{(u)}|^3 |(\bar{P}_j - \bar{\Phi}_j)\,(dx)| =$$

$$= \frac{k^2}{\sqrt{6}} \sum_{u=1}^{k} \frac{\nu_j^{(u)}}{(B_n^{(u)})^3} \left( \frac{|A_{j+1}^{uu}|}{|A_{j+1}|} \right)^{\frac{3}{2}}. \tag{3.9}$$

Из определения матрицы $A_j$ и неравенства (2.10) имеем

$$\frac{|A_j|}{|A_j^{uu}|} \geqslant \frac{\left| \frac{1}{T^2} I \right|}{\left| \left( \frac{1}{T^2} I \right)^{uu} \right|} = \frac{1}{T^2}. \tag{3.10}$$

Тогда из (2.8), (3.3), (3.9) и (3.10) вытекает оценка

$$\sup_{E \in \zeta} |P_{Z_n}(E) - \Phi_{Z_n'}(E)| \leqslant \frac{2k^2}{\sqrt{6}} T^3 \sum_{j=1}^{k} W_{3n}^{(j)} +$$

$$+ \frac{24\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\theta_i}} \frac{1}{T},$$

а отсюда, положив

$$T = \left( \frac{24}{\sqrt{6\pi} k^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\theta_i}}}{\sum_{i=1}^{k} W_{3n}^{(i)}} \right)^{\frac{1}{4}},$$

получаем оценку (1.2) с

$$C_1(k) = 16 \left( \frac{8}{3\pi^3} \right)^{\frac{1}{8}} k^{\frac{7}{8}} \left[ \Gamma\left( \frac{k+1}{2} \right) \right]^{\frac{3}{4}} \left[ \Gamma\left( \frac{k}{2} \right) \right]^{-\frac{3}{4}}.$$

Оценка (1.3) получается аналогично: оцениваем величину $V_n(E)$, а затем вместо (2.8) используем (2.1) и (3.1). Тем самым теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 начнем с формулы (3.9) и более точной оценки величины $\frac{|A_j^{uu}|}{|A_j|}$. Теперь выполнено условие (1.4), и мы вместо оценки (2.10) можем применить оценку (2.9). Как и в работе [3] ((3.4) формула из [3]), имеем

$$\frac{|A_j^{uu}|}{|A_j|} \leqslant \frac{1}{\frac{|B_j|}{|B_j^{uu}|} + \frac{1}{T^2}} = \frac{1}{\left( \frac{B_{j,n}^{(u)}}{B_n^{(n)}} \right)^2 \frac{|K_j|}{|K_j^{uu}|} + \frac{1}{T^2}} \leqslant \frac{1}{\chi_{nu}} \frac{1}{\left( \frac{B_{j,n}^{(u)}}{B_n^{(u)}} \right)^2 + \frac{1}{T^2}}. \tag{3.11}$$

Теперь из (3.3), (3.9), (3.11) и неравенств $\nu_j^{(l)} \leqslant C_3 \beta_j^{(l)}$ получаем

$$|V_n(E)| \leqslant \frac{C_3 k^3}{\sqrt{6}} \sum_{l=1}^{k} \chi_{nl}^{-\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^{(l)}}{[(B_{j+1,n}^{(l)})^2 + \delta^2 (B\ \ )^2]^{\frac{3}{2}}}, \tag{3.12}$$

где

$$\delta = \frac{1}{T}, \text{ а } (B_{n+1,n}^{(l)})^2 = 0.$$

Сперва мы докажем следствие теоремы, т.е. предполагая условие (1.7) выполненным, покажем справедливость (1.8). Положим

$$\delta = C_6 \sqrt{k} \left[ \sum_{l=1}^{k} \chi_{nl}^{-\frac{3}{2}} L_{3n}^{(l)} \left( \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\theta_i}} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

и выберем некоторое число $\frac{2}{3} \leqslant a \leqslant \frac{3}{4}$, удовлетворяющее неравенства

$$\frac{(L_{3n}^{(l)})^2}{a^2} \leqslant (1-a)\,\delta^2 \qquad l = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.13}$$

(Для выполнения этих неравенств ниже придется наложить некоторые условия на константы $C_6$ и $C_4$.)

Теперь фиксируем некоторое $l \leqslant k$ и оценим сумму

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(l)} [(B_{j+1,n}^{(l)})^2 + \delta^2 (B_n^{(l)})^2]^{-\frac{3}{2}}.$$

Для этого определим $q_l$ как наименьший номер, для которого выполняется неравенство

$$(B_{1,q_l}^{(l)})^2 \geqslant a(1+\delta^2)\, B_n^{(l)2}. \tag{3.14}$$

Из (1.7) имеем

$$\sigma_p^{(l)} \leqslant \frac{\beta_p^{(l)}}{(\sigma_p^{(l)})^2} \leqslant \frac{D_n^{(l)}}{(B_{1,p}^{(l)})^2},$$

поэтому из (3.13) и (3.14) для всех $p \geqslant q_l$ получаем

$$(\sigma_p^{(l)})^2 \leqslant \frac{(D_n^{(l)})^2}{(B_{1,p}^{(l)})^4} \leqslant \frac{(L_{3n}^{(l)})^2}{a^2(1+\delta^2)^2} (B_n^{(l)})^2 = \eta_l \leqslant (1-a)\,\delta^2 (B_n^{(l)})^2. \tag{3.15}$$

Из (3.15) и выбора номера $q_l$ следует

$$\begin{aligned}
&(B_{j+1,n}^{(l)})^2 + \delta^2 (B_n^{(l)})^2 = (1+\delta^2)(B_n^{(l)})^2 - (B_{1,j}^{(l)})^2 \geqslant (1+\delta^2)(B_n^{(l)})^2 - \\
&- (B_{1,q_l-1}^{(l)})^2 - (\sigma_{q_l}^{(l)}) \geqslant (B_n^{(l)})^2 (1+\delta^2) - a(1+\delta^2)(B_n^{(l)})^2 - (1-a)\,\delta^2 (B_n^{(l)})^2 = \\
&= (1-a)(B_n^{(l)})^2
\end{aligned}$$

для всех $j \leqslant q_l$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{q_l} \beta_j^{(l)} [(B_{j+1,n}^{(l)})^2 + \delta^2 (B_n^{(l)})^2]^{-\frac{3}{2}} \leqslant C_{14} \sum_{j=1}^{q_l} \beta_j^{(l)} (B_n^{(l)})^{-3}. \tag{3.16}$$

Из (1.7) имеем

$$\beta_j^{(l)} \leqslant \frac{D_n^{(l)}}{(B_{1,j}^{(l)})^2} (\sigma_j^{(l)})^2,$$

поэтому

$$\sum_{j=q_l+1}^{n} \beta_j^{(l)} \left[ (B_{j+1,n}^{(l)})^2 + \delta^2 (B_n^{(l)})^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \leqslant D_n^{(l)} \sum_{j=q_l+1}^{n} \frac{(\sigma_j^{(l)})^2}{(B_{1,j}^{(l)})^2 \left[ (B_{j+1,n}^{(l)})^2 + \delta^2 (B_n^{(l)})^2 \right]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= D_n^{(l)} R_l . \tag{3.17}$$

Из (3.15) вытекает

$$\frac{(\sigma_j^{(l)})^2}{(B_{1,j}^{(l)})^2 \left[ (B_{j+1,n}^{(l)})^2 + \delta^2 (B_n^{(l)})^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{(\sigma_j^{(l)})^2}{(B_{1,j-1}^{(l)})^2 \left[ (B_n^{(l)})^2 (1+\delta^2) - \eta_l - (B_{1,j-1}^{(l)})^2 \right]^{\frac{3}{2}}} .$$

Обозначив $b = (B_n^{(l)})^2 (1+\delta^2) - \eta_l$, $x = (B_{1,j-1}^{(l)})^2$, в знаменателе получим функцию $x(b-x)^{\frac{3}{2}}$, производной которой является функция $(b-x)^{\frac{1}{2}} \left(b - \frac{5}{2} x\right)$. Во-первых, $b - x > 0$, так как

$$(B_n^{(l)})^2 (1+\delta^2) - \eta_l - (B_{1,j-1}^{(l)})^2 \geqslant (B_n^{(l)})^2 \left( \delta^2 - \frac{(L_{3n}^{(l)})^2}{a^2 (1+\delta^2)^2} \right) > (B_n^{(l)})^2 \left( \delta^2 - \frac{(L_{3n}^{(l)})^2}{a^2} \right) > 0 .$$

Во-вторых, $b - \frac{5}{2} x < 0$, так как в сумме (3.17) $j-1 \geqslant q_l$ и из (3.14) следует

$$(B_n^{(l)})^2 (1+\delta^2) - \eta_l - \frac{5}{2} (B_{1,j-1}^{(l)})^2 \leqslant (B_n^{(l)})^2 (1+\delta^2) - \frac{5}{2} a (1+\delta^2) (B_n^{(l)})^2 =$$

$$= (B_n^{(l)})^2 (1+\delta^2) \left( 1 - \frac{5}{2} a \right) < 0 .$$

Поэтому $x(b-x)^{\frac{3}{2}}$ является убывающей функцией, и мы получаем

$$R_l < \int_{(B_{1,q_l}^{(l)})^2}^{(B_n^{(l)})^2} \frac{dx}{x (b-x)^{\frac{3}{2}}} .$$

Произведя замену $b - x = v^2$, получаем

$$R_l < 2 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^2 (b - v^2)} = \frac{2}{b} \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) + \frac{2}{b^{\frac{3}{2}}} \ln \frac{(\sqrt{b} + v_2)(\sqrt{b} - v_1)}{(\sqrt{b} - v_2)(\sqrt{b} + v_1)} , \tag{3.18}$$

где

$$v_1^2 = (B_n^{(l)})^2 \delta^2 - \eta_l , \qquad v_2^2 = (1+\delta^2)(B_n^{(l)})^2 - \eta_l - (B_{1,q_l}^{(l)})^2 .$$

Подставляя выражение $\eta_l$ из (3.15), получаем оценки:

$$v_1^2 = (B_n^{(l)})^2 \left( \delta^2 - \frac{(L_{3n}^{(l)})^2}{a^2 (1+\delta^2)^2} \right) \geqslant (B_n^{(l)})^2 \left[ \delta^2 - (1-a) \delta^2 \right] = (B_n^{(l)})^2 a \delta^2 , \tag{3.19}$$

$$v_2^2 \leqslant (B_{1,q_l}^{(l)})^2 \left( \frac{1}{a} - 1 \right) \leqslant (B_n^{(l)})^2 \cdot \frac{1-a}{a} , \tag{3.20}$$

$$b \geqslant (B_n^{(l)})^2 \left[ (1+\delta^2) - \frac{(L_{3n}^{(l)})^2}{a^2} \right] \geqslant (B_n^{(l)})^2 \left[ (1+\delta^2) - (1-a) \delta^2 \right] \geqslant (B_n^{(l)})^2 . \tag{3.21}$$

Как и в работе [3] (доказательство теоремы 2), можно показать, что

$$\ln \frac{(\sqrt{b} + v_2)(\sqrt{b} - v_1)}{(\sqrt{b} - v_2)(\sqrt{b} + v_1)} < C_{15} ,$$

а из (3.19)–(3.21) следует

$$\frac{2}{b}\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)\leqslant\frac{2}{(B_n^{(l)})^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}\,\delta}-\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)\leqslant\frac{2}{\sqrt{a}\,\delta(B_n^{(l)})^2}\ . \tag{3.22}$$

Поэтому из (3.17), (3.18) и (3.22) вытекает оценка

$$\sum_{j=q_l+1}^{n}\frac{\beta_j^{(l)}}{[(B_{j+1,n}^{(l)})^2+\delta^2(B_n^{(l)})^2]^{\frac{3}{2}}}\leqslant C_{16}\frac{L_{3n}^{(l)}}{\delta}\ . \tag{3.23}$$

Из (3.12), (3.16) и (3.23) имеем

$$|V_n(E)|\leqslant C_{17}k^2\frac{1}{\delta}\sum_{l=1}^{k}\chi_{nl}^{-\frac{3}{2}}L_{3n}^{(l)}=\frac{C_{17}}{C_6}k^{\frac{3}{2}}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\Theta_i}}\right)\sum_{i=1}^{k}\chi_{ni}^{-\frac{3}{2}}L_{3n}^{(i)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.24}$$

Записав (2.8) в виде

$$\sup_{E\in\zeta}|P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z'_n}(E)|\leqslant 2\sup_{E\in\zeta}|V_n(E)|+C_{12}(k)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\Theta_i}}\delta, \tag{3.25}$$

где $C_{12}(k)\leqslant C_7k$, видим, что из (3.24) и (3.25) следует (1.8) с константой $C_4=\frac{C_5}{C_6}+C_6C_7$, $C_5=2C_{17}$. Осталось указать условия, которым должны удовлетворять свободно выбираемое число $a$ и константы $C_4$ и $C_6$. Будем считать

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\theta_i}}\right)\sum_{i=1}^{k}\chi_{ni}^{-\frac{3}{2}}L_{3n}^{(i)}\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{C_4\cdot k^{\frac{3}{2}}}$$

(иначе утверждение (1.8) тривиальное). Из условия (3.13) и цепочки неравенств

$$\frac{(L_{3n}^{(l)})^2}{a^2}\leqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\chi_{ni}^{-\frac{3}{2}}L_{3n}^{(i)}\right)^2}{a^2}\leqslant(1-a)C_6^2k\left(\sum_{i=1}^{k}\chi_{ni}^{-\frac{3}{2}}L_{3n}^{(i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\theta_i}}\right)^{-1},$$

$$\frac{1}{a^2(1-a)C_6^2k}\leqslant\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{k}\chi_{ni}^{-\frac{3}{2}}L_{3n}^{(i)}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\theta_i}}},$$

$$\frac{1}{a^2(1-a)C_6^2k}\leqslant C_4^2k^2$$

получаем одно условие для констант $C_4$ и $C_6$:

$$C_4\cdot C_6\geqslant\frac{2}{3}\ . \tag{3.26}$$

Чтобы неравенство (3.14) имело смысл, необходимо $a(1+\delta^2)<1$, а это дает второе условие для констант $C_4$ и $C_6$:

$$\frac{C_4}{C_6}\geqslant\frac{3}{2}\ . \tag{3.27}$$

Неравенство (1.10) получается следующим образом: сперва вместо (3.12) получаем оценку

$$|\tilde V_n(E)|\leqslant\frac{C_3k^2}{\sqrt{6}}\sum_{l=1}^{k}\tilde\chi_{nl}^{-\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^{n}\frac{|\tilde\beta_j^{(l)}}{[(\tilde B_{j+1,n}^{(l)})^2+\delta^2(\tilde B_n^{(l)})^2]^{\frac{3}{2}}}\ , \tag{3.28}$$

затем, полагая

$$\delta = C_6 \left( \sum_{i=1}^{k} \tilde{\chi}_{ni}^{-\frac{3}{2}} \tilde{L}_{3n}^{(i)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

проводим аналогичные рассуждения, используя (1.9) вместо (1.7) и (2.1) вместо (2.8).

Теперь из доказательства ясно, что если в неравенстве (3.12) (соответственно (3.28)) величины $\beta_j^{(l)}$ ($\tilde{\beta}_j^{(l)}$) заменим на бо́льшие величины $\gamma_j^{(l)} \beta_j^{(l)}$ ($\tilde{\gamma}_j^{(l)} \tilde{\beta}_j^{(l)}$) и используем неравенство (1.1), вместо (1.7) (соответственно, неравенство

$$\frac{\bar{\beta}_j^{(l)}}{(\bar{\sigma}_j^{(l)})^2} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{\gamma}_j^{(l)} \tilde{\beta}_j^{(l)}}{(\bar{B}_{1,j}^{(l)})^2}$$

вместо (1.9)), то получим (1.5) (соответственно (1.6)). Тем самым, теорема 2 и следствие 2 доказаны.

Теорему 3 докажем методом математической индукции. Легко видеть, что (1.12) справедлива при $n=1$ (так как $\sigma_j^2 \leqslant (\sigma_1^{(j)})^2 \leqslant (\beta_1^{(j)})^{\frac{2}{3}} \leqslant \beta_j^{\frac{2}{3}}$, $\Theta_1 > 1$, $\chi_1^{(j)} \leqslant 1$). Предположим, что (1.12) справедлива для всех $i \leqslant n-1$ и покажем, что эта оценка справедлива и для $i=n$.

В доказательстве теоремы 3 будем пользоваться не формулой (3.2), а следующим тождественным разложением

$$V_n(E) = \sum_{j=2}^{n} [(\bar{P}_{1,j-1} - \bar{\Phi}_{1,j-1}) * \bar{\Phi}_{j+1,n} * \Phi_T * (\bar{P}_j - \bar{\Phi}_j)](E) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} [\bar{\Phi}_{1,j-1} * \bar{\Phi}_{j+1,n} * \Phi_T * (\bar{P}_j - \bar{\Phi}_j)](E) =$$

$$= \sum_{j=2}^{n} W_{j1}(E) + \sum_{j=1}^{n} W_{j2}(E). \tag{3.29}$$

Обозначим функции

$$U_{i1} = (\bar{P}_{1,i-1} - \bar{\Phi}_{1,i-1}) * \bar{\Phi}_{i+1,n} * \Phi_T, \qquad i = 2, 3, \ldots, n,$$

$$U_{i2} = \delta_0 * \bar{\Phi}_{1,i-1} * \bar{\Phi}_{i+1,n} * \Phi_T, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$h_i(x) = \begin{cases} \delta_0(E+x), & i=1, \\ (\bar{P}_{1,i-1} - \bar{\Phi}_{1,i-1})(E+x), & i \geqslant 2, \end{cases}$$

$$g_{i1}(x) = U_{i1}(E+x), \qquad i = 2, 3, \ldots, n,$$

$$g_{i2}(x) = U_{i2}(E+x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $E$ — некоторое фиксированное множество из $\zeta$. Пусть, как и раньше, $\bar{\Delta}_i$ — матрица вторых моментов с.в. $\xi_i$,

$$B_{i1} = \sum_{j=i}^{n} \bar{\Delta}_j, \qquad B_{i2} = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \bar{\Delta}_j, \qquad A_{i,j} = B_{ij} + \frac{1}{T^2} I, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2,$$

а $\varphi_{ij}(x)$ обозначает плотность распределения с.в. $N(0, \Lambda_{i,j})$. Аналогично формулам (3.5) и (3.6) можем записать

$$g_{i1}(x)=\int_{R_k} h_i(z)\,\varphi_{i+1,1}(x-z)\,dz, \qquad i=2,3,\ldots,n,$$

$$g_{i2}(x)=\int_{R_k} h_1(z)\,\varphi_{i2}(x-z)\,dz, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Проводя такие же вычисления, как и в доказательстве теоремы 1, получим

$$|W_{j1}(E)|\leqslant \frac{C_3k^3}{\sqrt{6}}\sup_{E\in\zeta}|(\bar{P}_{1,j-1}-\bar{\Phi}_{1,j-1})(E)|\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_j^{(i)}}{(B_n^{(i)})^3}\left(\frac{|A_{j+1,1}^{ii}|}{|A_{j+1,1}|}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{3.30}$$

$$|W_{j2}(E)|\leqslant \frac{C_3k^3}{\sqrt{6}}\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_j^{(i)}}{(B_n^{(i)})^3}\left(\frac{|A_{j,2}^{ii}|}{|A_{j,2}|}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{3.31}$$

Так как $A_{j,1}$ совпадает с $A_j$ (см. доказательство теоремы 2), то мы можем воспользоваться оценкой (3.11). Далее, из следствия леммы 6 следует

$$\frac{|K_j|}{|K_j^{ii}|}\geqslant \chi_n^{(i)},$$

поэтому

$$\frac{|A_{j,1}^{ii}|}{|A_{j,1}|}\leqslant\frac{1}{\chi_n^{(i)}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{B_{j,n}^{(i)}}{B_n^{(i)}}\right)^2+\frac{1}{T^2}}. \tag{3.32}$$

Заметим, что $\bar{P}_{1,j-1}$ является распределением с.в.

$$\frac{\sum_{i=1}^{j-1}\xi_i}{B_n},$$

который при помощи трансформации с диагональной матрицей сводится к с. в. $Z_{j-1}$. Поэтому, применяя индукционную предпосылку, имеем для всех $2\leqslant j\leqslant n$

$$\sup_{E\in\zeta}|\bar{P}_{1,j-1}(E)-\bar{\Phi}_{1,j-1}(E)|=$$

$$=\sup_{E\in\zeta}|P_{Z_{j-1}}(E)-\Phi_{Z'_{j-1}}(E)|\leqslant C_7(k)\frac{\Theta_{j-1}}{\sqrt{j-1}}\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i}{(\chi_{j-1}^{(i)}\cdot\sigma_i^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.33}$$

Из (3.30), (3.32), (3.33) и условий теоремы (1.11) следует

$$|W_{j1}(E)|\leqslant\frac{C_3k^3C_7(k)}{\sqrt{6}}\frac{\Theta_{j-1}}{\sqrt{j-1}}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i}{(\chi_{j-1}^{(i)}\sigma_i^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i}{\left[\chi_n^{(i)}((B_{j+1,n}^{(i)})^2+\frac{1}{T^2}(B_n^{(i)})^2)\right]^{\frac{3}{2}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_3k^3C_7(k)}{\sqrt{6}}\frac{\Theta_{j-1}}{\sqrt{j-1}\left(n-j+\frac{1}{T^2}n\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i}{(\chi_{j-1}^{(i)}\sigma_i^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i}{(\chi_n^{(i)}\sigma_i^2)^{\frac{3}{2}}}\right]. \tag{3.34}$$

В работе [1] приведена следующая оценка:

$$\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{i}\left(\frac{n-i-1}{n}+a\right)^{\frac{3}{2}}} \leqslant 2\left(\frac{n}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{n-2}{n}+a}, \tag{3.35}$$

где $a>0$.

Так как

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{j-1}\left(n-j+\frac{1}{T^2}n\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j}\left(\frac{n-j-1}{n}+\frac{1}{T^2}\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{T^3}{\sqrt{n-1}}+\sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{j}\left(\frac{n-j-1}{n}+\frac{1}{T^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{3.36}$$

и $\Theta_j \leqslant \Theta_{j+1}$, $\chi_j^{(i)} \geqslant \chi_{j+1}^{(i)}$, то из (3.34), (3.35) и (3.36) получаем

$$\sum_{j=2}^{n} |W_{j1}(E)| \leqslant \frac{C_3 k^3 C_7(k)}{\sqrt{6}} \Theta_n\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{(\chi_n^{(i)} \sigma_i^2)^{\frac{3}{2}}}\right]^2 \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{j-1}\left(n-j+\frac{n}{T^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3 k^3 C_7(k)}{\sqrt{6}} \frac{\Theta_n}{n^{\frac{3}{2}}}\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{(\chi_n^{(i)} \sigma_i^2)^{\frac{3}{2}}}\right]^2\left(\frac{T^3}{\sqrt{n-1}}+2\sqrt{3}\, T\sqrt{n}\right), \tag{3.37}$$

поскольку в (3.35) $n \geqslant 3$ (при $n=2$ из (3.36) видно, что сумма пустая и остается только член $\left.\frac{T^3}{\sqrt{n-1}}\right)$. Теперь рассмотрим величину $\frac{|A_{j,2}^{ii}|}{|A_{j,2}|}$. Если через $K_{j2}$ обозначить корреляционную матрицу с.в. $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \xi_i$, то, очевидно,

$$|B_{j2}| = \prod_{i=1}^{k}\left[\frac{(B_n^{(i)})^2-(\sigma_j^{(i)})^2}{(B_n^{(i)})^2}\right] |K_{j2}|.$$

Теперь, применяя леммы 4 и 6, аналогично оценке (3.22) получаем

$$\frac{|A_{j,2}^{ii}|}{|A_{j,2}|} \leqslant \frac{1}{\chi_n^{(i)}} \frac{1}{\frac{(B_n^{(i)})^2-(\sigma_j^{(i)})^2}{(B_n^{(i)})^2}+\frac{1}{T^2}}. \tag{3.38}$$

Так как $(\sigma_j^{(i)})^2 \leqslant (\beta_j^{(i)})^{\frac{2}{3}} \leqslant \max\limits_{j \leqslant n}(\beta_j^{(i)})^{\frac{2}{3}} \leqslant \beta_i^{\frac{2}{3}}$, то для достаточно больших $n$ будет

$$\frac{\max\limits_{j \leqslant n}(\sigma_j^{(i)})^2}{(B_n^{(i)})^2} \leqslant \frac{\beta_i^{\frac{2}{3}}}{n\sigma_i^2} < \frac{1}{2},$$

поэтому для всех $n$

$$\frac{\max\limits_{j\leq n}(\sigma_j^{(i)})^2}{(B_n^{(i)})^2} < C_{18} < 1\,. \tag{3.39}$$

Из (1.11), (3.31), (3.38) и (3.39) следует

$$\sum_{j=1}^{n} |W_{j2}(E)| \leqslant \frac{C_3 k^3}{\sqrt{6}(1-C_{18})^3}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i}{(\chi_n^{(i)}\sigma_i^2)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{3.40}$$

Из (2.8), (3.29), (3.37) и (3.40) имеем

$$\sup_{E\in\zeta}|(P_{Z_n}-\Phi_{Z_n'})(E)| \leqslant 2\sup_{E\in\zeta}|V_n(E)| + C_{12}(k)\frac{\Theta_n}{T} \leqslant$$

$$\leqslant k^2 C_7(k)\Theta_n\left[\sum_{i=1}^{k}\beta_i(\chi_n^{(i)}\sigma_i^2)^{-\frac{3}{2}}\right]^2\left(\frac{C_{19}T^3}{n^2}+\frac{C_{20}T}{n}\right)+$$

$$+C_{21}\frac{k^3}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i}{(\chi_n^{(i)}\sigma_i^2)^{\frac{3}{2}}}+C_{12}(k)\frac{\Theta_n}{T}\,. \tag{3.41}$$

Из (3.41) и получаем (1.12), если положить

$$T=\frac{\sqrt{n}\,k^{-3}}{\sum\limits_{i=1}^{k}[\beta_i(\chi_n^{(i)}\sigma_i^2)^{-\frac{3}{2}}]C_{22}}$$

и соответственно подобрать численные константы $C_8$ и $C_{22}$ (аналогичная задача решалась, например, в [4]). Теорема 3 доказана.

Теорема 4 доказывается тоже методом математической индукции. Но так как в доказательстве применяются рассуждения и вычисления, проведенные в доказательстве теоремы 3 настоящей статьи, а также в доказательстве теоремы 2 из [1], то мы укажем только путь доказательства.

Теперь рассматриваются функции распределения и аргументом функций $V_n$, $W_{j,i}$, $U_{ji}$, $i=1, 2$, $j=1, 2\ldots, n$ будет точка $x\in R_k$. Вместо оценки (3.30) получим:

$$|W_{j1}(x)| \leqslant \frac{C_3 k^3}{\sqrt{6}}\sup_{x\in R_k}|\bar{P}_{1,j-1}(x)-\bar{\Phi}_{1,j-1}(x)|\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_j^{(i)}}{(B_n^{(i)})^3}\left(\frac{|A_{j+1,1}^{ii}|}{|A_{j+1,1}|}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{3.42}$$

Для оценки величины $W_{j2}(x)$ мы применим лемму 7 вместо леммы 5 и получим:

$$|W_{j2}(x)| \leqslant \frac{C_3 k^3}{\sqrt{6}}\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_j^{(i)}}{(B_n^{(i)})^3\left(\frac{(B_n^{(i)})^2-(\sigma_j^{(i)})^2}{(B_n^{(i)})^2}+\frac{1}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{|A_{j2}^{ii}|}{|A_{j,2}|}\,. \tag{3.43}$$

Далее, вместо (3.32) мы возьмем более точную оценку

$$\frac{|A_{j,1}^{ii}|}{|A_{j,1}|} \leqslant \frac{1}{\chi_n^{(i)}}\,\frac{1}{\frac{(B_{j,n}^{(i)})^2}{(B_n^{(i)})^2}+\frac{1}{T^2\chi_n^{(i)}}}$$

и из (3.42), (3.35), (3.36) получим

$$\sum_{j=2}^{n} |W_{j1}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3 k^2 C_8(k)}{\sqrt{6}} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\chi_n^{(i)} \sigma_i^3}\right) \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\beta_i}{\sigma^3 (\chi_n^i)^{\frac{3}{2}} . n^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{j-1}\left(\frac{n-j}{n}+\frac{1}{T^2 \chi_n^{(i)}}\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3 k^2 C_8(k)}{\sqrt{6}} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\chi_n^{(i)} \sigma_i^3}\right) \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\sigma_i^3 (\chi_n^{(i)})^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{T^3 (\chi_n^{(i)})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n-1}} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\sqrt{3}\, T (\chi_n^{(i)})^{\frac{1}{2}} \sqrt{n}\right)\right] \leqslant k^2 C_8(k) \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\chi_n^{(i)} \sigma_i^3}\right]^2 \left(\frac{C_{19} T^3}{n^3} + \frac{C_{20} T}{n}\right). \quad (3.44)$$

Из (3.43), (3.38), (3.39) следует

$$\sum_{j=1}^{n} |W_{j2}(x)| \leqslant \frac{C_3 k^2}{\sqrt{6 (1-C_{18})^3}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\chi_n^{(i)} \sigma_i^3}. \quad (3.45)$$

И, наконец, применяя вместо оценки (2.8) следующую оценку для функций распределения

$$\sup_{x \in R_k} |P_{Z_n}(x) - \Phi_{Z_n'}(x)| \leqslant 2 \sup_{x \in R_k} |[(P_{Z_n} - \Phi_{Z_n'}) * \Phi_T](x)| + \frac{12k}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{T}$$

(доказательство см. в [1], лемма 6), из (3.44) и (3.45) получим утверждение теоремы 4.

В доказательстве теорем 5–7, мы будем существенно опираться на работу [1], поэтому примем все обозначения и нумерацию формул, введенные в [1]. В дальнейшем $P_{Z_n} \equiv P_n$.

Доказательство теоремы 5. Сперва будем считать, что $N_3 < 1$. Так как

$$\sup_{E \in \zeta} |P_n(E) - Q(E)| = \sup_{E \in \zeta} |P_{(n)}^{(n)}(E) - N_I(E)|,$$

то будем рассматривать $P_{(n)}^n(E) - N_I(E)$. Методом математической индукции покажем, что

$$\sup_{E \in \zeta} |P_{(n)}^n(E) - N_I(E)| \leqslant C_9(k) \frac{N_3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}}. \quad (3.46)$$

Для этого сначала надо доказать (3.46) при $n=1$ (этот шаг был не нужен в [1], так как $\chi_1 = \sum_{i=1}^{k} \bar{\beta}_i \geqslant k$). Аналогично формулам (11) и (12) имеем

$$f_0(x) = \delta_0(E+x)$$

$$g_0(x) \equiv U_0(E+x) = \delta_0 * N_T = \int_{R_k} \delta_0 (E+x-z) \varphi_T(z)\, dz =$$

$$= \int_{R_k} f_0(x-z) \varphi_T(z)\, dz = \int_{R_k} f_0(z) \varphi_T(x-z)\, dz.$$

Тогда

$$|[(\bar{P}-N_I) * N_T](E)| = |[(\bar{P}-N_I) * U_0](E)| =$$

$$= \left|\int_{R_k} U_0(E-x)(\bar{P}-N_I)(dx)\right| = \left|\int_{R_k} g_0(-x)(\bar{P}-N_I)(dx)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{6} \sum_{u,v,w=1}^{k} \sup_{x \in R_k} \left| \frac{\partial^3 g_0}{\partial x^{(u)} \partial x^{(v)} \partial x^{(w)}} \right| \cdot \int |x^{(u)} x^{(v)} x^{(w)}| |(\bar{P}-N_I)(dx)|.$$

Так как

$$\left| \frac{\partial^3 g_0}{\partial x^{(u)} \partial x^{(v)} \partial x^{(w)}} \right| \leqslant \int_{R_k} \left| \frac{\partial^3 \varphi_T}{\partial x^{(u)} \partial x^{(v)} \partial x^{(w)}} \right| dx \leqslant C_{23} T^3,$$

то

$$|[(\bar{P}-N_I) * N_T](E)| \leqslant C_{24} T^3 k^2 \sum_{i=1}^{k} \int_{R_k} |x^{(i)}|^3 |(\bar{P}-N_I)(dx)| =$$

$$= C_{24} T^3 k^2 N_3. \tag{3.47}$$

Из (3.47) и (2.1) следует (3.46) при $n=1$.

Дальнейшее доказательство утверждения (3.46) аналогично доказательству в [1], и мы отметим только места, требующие изменения. Вместо формулы (18) теперь надо воспользоваться индукционной предпосылкой

$$\sup_{E \in \zeta} \left| \left[ P^i_{(n)} - N^i_{\frac{1}{n^2}} \right](E) \right| \leqslant C_9(k) \frac{N_3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{i}},$$

поэтому формула (22) примет вид

$$\left| \left[ U_i * \left( P_n - N_{\frac{1}{n^2}} \right) \right] (E) \right| \leqslant \frac{C_1' C_9(k) k^2 N_3^{\frac{5}{4}}}{6n^{\frac{3}{2}}} \frac{\tau_i^3}{\sqrt{i}} \tag{3.48}$$

$\left(\text{где } C_1' \text{ — константа } C_1' = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (4e^{-\frac{3}{2}}+1) \text{ из [1]}\right)$. Для получения аналога формулы (24) условие $T^2 \leqslant n$ не нужно. А именно, если $n=2$, то

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\tau_i^3}{\sqrt{i}} = T^3, \text{ где } \tau_i = \left( \frac{n-i-1}{n} + \frac{1}{T^2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

а если $n \geqslant 3$, то

$$\sum_{i=1}^{n-2} \frac{\tau_i^3}{\sqrt{i}} \leqslant 2\sqrt{n} T \frac{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{n-2}{n} + \frac{1}{T^2}} \leqslant 2\sqrt{3}\sqrt{n}\, T.$$

Поэтому для всех $n \geqslant 2$ и всех $T > 0$ получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\tau_i^3}{\sqrt{i}} \leqslant \frac{T^3}{\sqrt{n-1}} + 2\sqrt{3}\sqrt{n}\, T. \tag{3.49}$$

Формула (21), если не применять оценки

$$\int |x^{(i)}|^3 |(\bar{P}-N_I)(dx)| \leqslant \int |x^{(i)}|^3 (P+N_I)(dx),$$

выглядит так:

$$n\left|\left[U_0 * \left(P_{(n)}-N_{\frac{1}{n^2}}\right)\right](E)\right| \leqslant \frac{C_1' \sqrt{2}}{3} k^3 \frac{N_3}{\sqrt{n}}. \tag{3.50}$$

Поэтому окончательно, используя (3.48), (3.49), (3.50) и (2.1), получим следующий аналог формулы (25):

$$\sup_{E\in\zeta} | P_{(n)}^n (E)-N_I(E)| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{3} C_I' k^3 \frac{N_3}{\sqrt{n}}+$$

$$+\frac{C_1' k^3 C_9(k) N_3^{\frac{5}{4}}}{6n^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{T^3}{\sqrt{n-1}}+2\sqrt{3}T\sqrt{n}\right)+$$

$$+C_{13}(k)\frac{1}{T}, \quad C_{13}(k)=\frac{24k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

Положив $T=\dfrac{\sqrt{n}}{N_3^{\frac{1}{4}} C_{14}(k)}$ и пользуясь тем, что $N_3<1$, имеем

$$\sup_{E\in\zeta} | P_{(n)}^n (E)-N_I(E)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N_3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3} C_1' k^3+\frac{C_1' k^3 C_9(k)}{6 C_{14}^3(k)}+\frac{C_1' k^3 C_9(k) 2\sqrt{3}}{6 C_{14}(k)}+C_{13}(k)\cdot C_{14}(k)\right],$$

а отсюда легко показать, что при $C_{14}(k)=C_{25}k^2$ и $C_9(k)=C_{10}k^4$ $C_{25}$ и $C_{10}$ можно подобрать так, чтобы выражение в скобках не превышало $C_9(k)$. Тем самым утверждение (3.46) доказано.

В том случае, когда $N_3\geqslant 1$, аналогичным образом доказывается оценка

$$\sup_{E\in\zeta} | P_{(n)}^n (E)-N_I(E)| \leqslant C_9(k) \frac{N_3}{\sqrt{n}}. \tag{3.51}$$

(3.46) и (3.51) доказывают теорему 5.

Доказательство теоремы 6 проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы 5: в случае $\bar{N}_3<1$ доказывается неравенство

$$\sup_{E\in A} |P_n(E)-Q(E)| \leqslant C_{10}(k) \frac{\bar{N}_3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}},$$

а если $\bar{N}_3\geqslant 1$, то

$$\sup_{E\in A} |P_n(E)-Q(E)| \leqslant C_{10}(k) \frac{\bar{N}_3}{\sqrt{n}}.$$

Подробностей доказательства приводить не будем, так как они не представят трудностей для читателя.

В доказательстве теоремы 7, проведя все рассуждения, как и в доказательстве теоремы 3 из [1], только не применяя оценки

$$\int |x^{(i)}|^3 |(F-G)(dx)| \leqslant \int |x^{(i)}|^3 (F+G)(dx),$$

формулу (76) получим в следующем виде:

$$\sup_{x\in R_k} |(F_n-G) * \Phi_T(x)| \leqslant V \leqslant \frac{k^2 \tilde{N}_3 T^2}{\sqrt{3}\, n^{\frac{3}{2}}} (2n+T). \tag{3.52}$$

Отметим, что оценка (74) следует из (2.10) и для вырожденных распределений $P \in \mathcal{P}_k$. Формула (77) при использовании (3.52) будет иметь следующий вид:

$$\sup_{x\in R_k} |F_n(x)-G(x)| \leqslant \frac{2k^2 T^2 \tilde{N}_3}{\sqrt{3}\, n^{\frac{3}{2}}} (2n+T) + \frac{12k}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{T}.$$

Теперь, если $\tilde{N}_3 \geqslant 1$, то, полагая $T = C_{15}(k)\left(\frac{\sqrt{n}}{\tilde{N}_3}\right)^{\frac{1}{3}}$, а если $\tilde{N}_3 < 1$, то

$$T = C_{15}(k) \frac{n^{\frac{1}{6}}}{\tilde{N}_3^{\frac{1}{4}}},$$

получаем утверждение теоремы 7.

В заключение хочу выразить искреннюю благодарность научному руководителю проф. В. А. Статулявичусу за внимание к настоящей работе и В. В. Сазонову, работа которого возродила интерес к методу композиций.

Вильнюсский Государственный университет им. Капсукаса

Поступило в редакцию 6.III.1969

## Литература


1. V. V. Sazonov, On the Multi-dimensional Central Limit Theorem, Sankhya, ser. A, vol. 30, part 2 (1968).
2. H. Bergström, On the Central Limit Theorem in the Case of Not Equally Distributed Random Variables, Skand. Aktuarietidskrift, N 1–2 (1949).
3. В. Паулаускас, Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. I, Лит. матем. сб., IX, № 2 (1969), 329–343.
4. В. Паулаускас, Об одном усилении теоремы Ляпунова, Лит. матем. сб., IX, № 2 (1969), 323–328.
5. Т. Корн, Г. Корн, Справочник по математике, 1968.
6. Высшая алгебра, Справочная матем. библиотека, 1965.
7. R. N. Bhattacharya, The central limit theorem in $R_k$, $k \geqslant 1$ and normal approximation to the probabilities of Borel sets, Analls of Mathematical Statistics, Vol. 39, N 4 (1968).

## APIE KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTINIMĄ DAUGIAMATĖJE CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE

V. Paulauskas

(*Reziumė*)

Sakykime, $\xi_i=(\xi_i^{(1)}, \ldots, \xi_i^{(k)})$, $i=1, 2, \ldots, n$ — nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai su nuline matematine viltimi. Pažymime

$$M(\xi_i^{(j)})^2=(\sigma_i^{(j)})^2, \quad (B_n^{(i)})^2=\sum_{j=1}^{n}(\sigma_j^{(i)})^2, \quad Z_n=\left(\frac{1}{B_n^{(1)}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(1)}, \ldots, \frac{1}{B_n^{(k)}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(k)}\right).$$

Tarkime, kad $Z'_n$ yra atsitiktinis normalinis vektorius su nuline matematine viltimi ir antrųjų momentų matrica, sutampančia su dydžio $Z_n$ atitinkama matrica. $P_{Z_n}$ ir $\Phi_{Z'_n}$ žymi atitinkamai dydžių $Z_n$ ir $Z'_n$ pasiskirstymus.

Tegul $\mathscr{A}$ žymi klasę aibių, turinčių pavidalą $\{x: x^{(1)}<y_1, \ldots, x^{(k)}<y_k\}$, $x=(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})\in R_k$, $y_i\in R_1$, o $\zeta$ — visų universaliai išmatuojamų iškilų aibių erdvėje $R_k$ klasę.

[3] darbe buvo nagrinėjami dydžio $\sup_{E\in A}|P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z'_n}(E)|$ įvertinimai. Šio darbo pirmose dviejose teoremose gaunami dydžio $\sup_{E\in\zeta}|P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z'_n}(E)|$ analogiški įvertinimai. Trečioje ir ketvirtoje teoremose atsitiktiniams vektoriams, tenkinantiems (1.11) sąlygas, šie įvertinimai pagerinami. Paskutinės trys teoremos sustiprina V. V. Sazonovo rezultatus [1].

## ON THE ESTIMATION OF THE RATE OF CONVERGENCE IN THE MULTIDIMENSIONAL CENTRAL LIMIT THEOREM

V. Paulauskas

(*Summary*)

Let $\xi_i=(\xi_i^{(1)},\ldots, \xi_i^{(k)})$, $i=1, 2, \ldots, n$ be independent random vectors with means zero. Let

$$M(\xi_i^{(j)})^2=(\sigma_i^{(j)})^2, \quad (B_n^{(i)})^2=\sum_{j=1}^{n}(\sigma_j^{(i)})^2, \quad Z_n=\left(\frac{1}{B_n^{(1)}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(1)}, \ldots, \frac{1}{B_n^{(k)}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(k)}\right).$$

Let $Z'_n$ stand for the normal random vector with the same first and second moments as $Z_n$. $P_{Z_n}$ and $\Phi_{Z'_n}$, respectively, denote distributions of $Z_n$ and $Z'_n$.

Let $\mathscr{A}$ denote the class of all subsets of $R_k$ of the form $\{x: x^{(1)}<y_1, \ldots, x^{(k)}<y_k\}$, $x=(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})$, $y_i\in R_1$ and $\zeta$ denote the class of all universally measurable convex subsets of $R_k$.

In the paper [3] the estimations of the quantity $\sup_{E\in A}|(P_{Z_n}-\Phi_{Z'_n})(E)|$ were obtained. The analogous estimations of the quantity $\sup_{E\in\zeta}|P_{Z_n}(E)-\Phi_{Z'_n}(E)|$ are given in the first two theorems of the present paper. The better estimations for the random vectors, satisfying (1.11), are obtained in theorems 3 and 4. The last three theorems strenghten the results of V. V. Sazonov [1].