IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1969

УДК–519.21

О СХОДИМОСТИ СУММ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ К МНОГОМЕРНОМУ ПРОЦЕССУ ПУАССОНА

И. Сапаговас

Пусть $\{I_n, n \geqslant 0\}$ – цепь Маркова с конечным множеством состояний $E=\{1, 2, \ldots, m\}$, задаваемая начальным распределением $a_i = \mathbf{P}\{I_0=i\}$ $(i \in E)$ и матрицей переходных вероятностей $\| p_{ij} \|$ $(i, j \in E)$. Рассмотрим случайные процессы $N(t)$ и $N^{(j)}(t)$ $(t \geqslant 0, j=1, 2, \ldots, m)$, определяемые следующим образом:

$$N(t) = \max \left\{ n : \sum_{k=0}^{n} X_k < t \right\},$$

где $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – неотрицательные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{P}\{X_0=0\}=1,$$

$$\mathbf{P}\{I_1=k, X_1<t / I_0\} = p_{I_0 k} \hat{F}_{I_0 k}(t), \tag{1}$$

$$\mathbf{P}\{I_{n+1}=k, X_{n+1}<t / (I_0, X_0), (I_1, X_1), \ldots, (I_n, X_n)\} = = p_{I_n k} F_{I_n k}(t) \qquad (n \geqslant 1) \tag{2}$$

для всех $t \geqslant 0$ и $k \in E$; $\hat{F}_{ik}(t)$, $F_{ik}(t)$ – заданные функции распределения;

$$N^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \delta_{j I_k},$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{при } i=k, \\ 0, & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$N(t) = \sum_{j=1}^{m} N^{(j)}(t).$$

Многомерный случайный процесс $\vec{\mathbf{N}}(t) = \left(N^{(1)}(t), N^{(2)}(t), \ldots, N^{(m)}(t) \right)$ называется марковским процессом восстановления (см., напр., [5], [6]).

Одна из возможных физических интерпретаций такого процесса следующая. Пусть имеется m групп, состоящих из различных, например, по качеству; элементов. С момента $t=0$ мы наблюдаем за работой одного такого элемента, который в случайный момент времени выходит из строя, после чего немедленно заменяется новым. Предполагается, что вероятность того, что наблюдаемый элемент принадлежит группе с номером j, равна a_j, т. е. $\mathbf{P}\{I_0=j\}=a_j$, а вероятность, что этот элемент в течение времени, меньшего t, будет заменен элементом из группы k, равна $p_{jk}\hat{F}_{jk}(t)$ $(j, k=1, 2, \ldots, m)$.

Вероятности всех дальнейших восстановлений, производимых в течение времени, меньшего t, из групп с номерами k, при условии, что заменяемый элемент принадлежал группе j, равны $p_{jk}F_{jk}(t)$. Если обозначить через X_1 длительность исправной работы начального элемента, а через X_n ($n \geqslant 2$) — длительность исправной работы последующих новых элементов, то процесс $N(t)$ будет обозначать общее число восстановлений наблюдаемого элемента до момента t, а $N^{(j)}(t)$ ($j=1, 2, \ldots, m$) — число восстановлений, произведенных из группы с номером j за отрезок времени $(0, t)$. То обстоятельство, что распределения (1) и (2) не предполагаются одинаковыми; можно интерпретировать как предположение о том, что начальный элемент мог работать и до момента $t=0$.

Ясно, что в случае $m=1$, марковский процесс восстановления просто совпадает с процессом восстановления.

Мы будем рассматривать последовательность процессов

$$\vec{\mathbf{N}}_n(t) = \sum_{r=1}^{n} \vec{\mathbf{N}}_{nr}(t),$$

где $\vec{\mathbf{N}}_{nr}(t)$ — взаимно независимые при каждом n марковские процессы восстановления, определенные следующими параметрами: $a_i^{(n,r)}$, $p_{ij}^{(n,r)}$, $\hat{F}_{ij}^{(n,r)}(t)$, $F_{ij}^{(n,r)}(t)$. По нашей интерпретации, компоненты $N_n^{(j)}(t)$ ($j=1, 2, \ldots, m$) процесса $\vec{\mathbf{N}}_n(t)$ будут обозначать общее число восстановлений, произведенных из групп с номерами j, до момента t в системе, состоящей из n таких элементов, длительности исправной работы которых не влияют друг на друга.

Вообще, многомерный случайный процесс

$$\vec{\mathbf{X}}(t) = \left(X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \ldots, X^{(m)}(t)\right) \qquad t \geqslant 0$$

называется ступенчатым, если приращения $X^{(k)}(t) - X^{(k)}(s)$ ($k=1, 2, \ldots, m$; $s<t$) принимают лишь целые неотрицательные значения и $\mathbf{P}\{X^{(k)}(0)=0\}=1$. Рассматриваемый нами марковский процесс восстановления является одним из примеров многомерных ступенчатых процессов.

Ступенчатый процесс $\vec{\mathbf{X}}(t)$ называется многомерным пуассоновским с ведущей функцией $\vec{\lambda}(t) = \left(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_m(t)\right)$, если его компоненты $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \ldots, X^{(m)}(t)$ взаимно независимы и $X^{(k)}(t)$ является одномерным пауссоновским процессом со средним $\mathbf{M}X^{(k)}(t) = \lambda_k(t)$ ($k=1, 2, \ldots, m$).

В данной заметке будут исследованы условия сходимости процессов $\vec{N}_n(t)$ к многомерному процессу Пуассона. Сходимость процессов понимается в смысле слабой сходимости любых конечномерных распределений к предельным. При доказательстве будем пользоваться результатами работы Б. Григелиониса (см. [1]), а также работой автора [4]. Всюду в дальнейшем суммирование, если это конкретно не указано, производится по множеству $E=(1, 2, \ldots, m)$.

Далее, для сокращения записей введем обозначения:

$$\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t) = p_{ij}^{(n,r)} \hat{F}_{ij}^{(n,r)}(t),$$

$$Q_{ij}^{(n,r)}(t) = p_{ij}^{(n,r)} F_{ij}^{(n,r)}(t).$$

Говорим, что процессы $\vec{\mathbf{N}}_{nr}(t)$ $(r=1, 2, \ldots, n)$ бесконечно малы, если при каждом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq r\leq n} \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{m} N_{nr}^{(k)}(t)>0\right\}=0. \tag{3}$$

Замечание. Условие бесконечной малости процессов $\vec{\mathbf{N}}_{nr}(t)$ (3) эквивалентно условию

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq r\leq n} \sum_{i,j} a_i^{(n,r)} \hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=0. \tag{4}$$

В самом деле,

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{m} N_{nr}^{(k)}(t)>0\right\}=\mathbf{P}\{X_1^{(n,r)}<t\}=\sum_i a_i^{(n,r)}\mathbf{P}\{X_1^{(n,r)}<t/I_0^{(n,r)}=i\}=$$

$$=\sum_{i,j} a_i^{(n,r)}\mathbf{P}\{I_1^{(n,r)}=j,\ X_1^{(n,r)}<t/I_0^{(n,r)}=i\}=\sum_{i,j} a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t).$$

Условие (4) равносильно требованию, чтобы каждый отдельно взятый элемент за любое фиксированное время t выходил из строя с сколь угодно малой вероятностью, когда n достаточно велико.

Теорема 1. *Для сходимости при $n\to\infty$ сумм независимых бесконечно малых марковских процессов восстановления*

$$\vec{\mathbf{N}}_n(t)=\sum_{r=1}^{n}\vec{\mathbf{N}}_{nr}(t)$$

к процессу Пуассона с ведущей функцией $\vec{\lambda}(t)=\left(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \ldots,\ \lambda_m(t)\right)$ необходимо и достаточно, чтобы при любом фиксированнот t выполнялись следующие условия:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\sum_i a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ik}^{(n,r)}(t)=\lambda_k(t) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{i,j,k} a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)*Q_{jk}^{(n,r)}(t)\right\}=0, \tag{6}$$

где символ $*$ означает свертку.

Прежде чем перейти к доказательству этого предположения, приведем одну теорему Б. Григелиониса, утверждение которой легко выводится из его работы [1].

Теорема. *Для сходимости сумм независимых бесконечно малых многомерных ступенчатых случайных процессов*

$$\vec{\mathbf{X}}_n(t)=\sum_{r=1}^{n}\vec{\mathbf{X}}_{nr}(t)$$

к пуассоновскому процессу с ведущей функцией $\vec{\lambda}(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы при любом фиксированном* t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}\{X_{nr}^{(k)}(t)=1\}=\lambda_k(t)\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{m}X_{nr}^{(k)}(t)>1\right\}=0.$$

Переходим к доказательству нашей теоремы.

Необходимость. Пусть при $n\to\infty$ процессы $\vec{\mathbf{N}}_n(t)$ сходятся к пуассоновскому с ведущей функцией $\vec{\lambda}(t)$. Тогда, так как

$$\mathbf{P}\{N_{nr}^{(k)}(t)=1,\ N_{nr}^{(s)}(t)=0,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ s\neq k\}=$$
$$=\mathbf{P}\{I_1^{(n,r)}=k,\ X_1^{(n,r)}<t,\ X_1^{(n,r)}+X_2^{(n,r)}\geqslant t\}=$$
$$=\mathbf{P}\{I_1^{(n,r)}=k,\ X_1^{(n,r)}<t\}-\mathbf{P}\{I_1^{(n,r)}=k,\ X_1^{(n,r)}+X_2^{(n,r)}<t\}=$$
$$=\sum_{i}a_i^{(n,r)}\mathbf{P}\{I_1^{(n,r)}=k,\ X_1^{(n,r)}<t/I_0^{(n,r)}=i\}-$$
$$-\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\mathbf{P}\{I_1^{(n,r)}=k,\ I_2^{(n,r)}=j,\ X_1^{(n,r)}+X_2^{(n,r)}<t/I_0^{(n,r)}=i\}=$$
$$=\sum_{i}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ik}^{(n,r)}(t)-\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ik}^{(n,r)}(t)*Q_{kj}^{(n,r)}(t)$$

и

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{m}N_{nr}^{(k)}(t)>1\right\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{m}N_{nr}^{(k)}(t)>0\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{m}N_{nr}^{(k)}(t)=1\right\}=$$
$$=\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)-\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)+\sum_{i,j,k}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)*Q_{jk}^{(n,r)}(t)=$$
$$=\sum_{i,j,k}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)*Q_{jk}^{(n,r)}(t),$$

то из ранее приведенной теоремы Б. Григелиониса следует необходимость условия (6), которое в свою очередь влечет за собой выполнения равенств

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ik}^{(n,r)}(t)*Q_{kj}^{(n,r)}(t)=0\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}\{N_{nr}^{(k)}(t)=1,\ N_{nr}^{(s)}(t)=0,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ s\neq k\}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}\{N_{nr}^{(k)}(t)=1\}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Следовательно, упомянутая теорема дает право утверждать, что условие (5) также имеет место.

Достаточность. Поскольку, ввиду (5) и (6), а также только что приведенных рассуждений

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{m}N_{nr}^{(k)}(t)>1\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{i,j,k}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)*Q_{jk}^{(n,r)}(t)\right\}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}\{N_{nr}^{(k)}(t)=1\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ik}^{(n,r)}(t)=\lambda_k(t)\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

то остается применить теорему Б. Григелиониса, откуда и следует достаточность наших условий. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Для сходимости сумм независимых бесконечно малых процессов восстановления к процессу Пуассона с ведущей функцией* $\lambda(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\hat{F}_{nr}(t)=\lambda(t)\tag{7}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\hat{F}_{nr}(t)*F_{nr}(t)=0.\tag{8}$$

Доказательство. В случае процесса восстановления, т. е. когда $E=\{1\}$, можем считать, что

$$a_1^{(n,r)}=1,\quad p_{11}^{(n,r)}=1,\quad \hat{F}_{11}^{(n,r)}(t)=\hat{F}_{nr}(t),\quad F_{11}^{(n,r)}(t)=F_{nr}(t),\quad \lambda_1(t)=\lambda(t).$$

Тогда соотношения (7) и (8) немедленно следуют из (5) и (6). Эти условия совпадают с условиями, приведенными в [2] и [4].

Предположим далее, что при каждом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant n}\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=\lim_{n\to\infty}\max_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}\sum_{k}Q_{jk}^{(n,r)}(t)=0.\tag{9}$$

Это в некотором смысле условие равномерной малости слагаемых $\vec{\mathbf{N}}_{nr}(t)$.

Следствие 2. *При условии* (9) *для сходимости* $\vec{\mathbf{N}}_n(t)$ *к процессу Пуассона с ведущей функцией* $\vec{\lambda}(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ik}^{(n,r)}(t)=\lambda_k(t)\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Доказательство. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{i,j,k} a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)*Q_{jk}^{(n,r)}(t)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\max_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\sum_{k} Q_{jk}^{(n,r)}(t)\sum_{r=1}^{n}\sum_{i,j} a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=0,$$

так как при условии (5)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i,j} a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)<\infty.$$

Отсюда следует условие (6), а вместе с тем из доказанной теоремы 1 вытекает и утверждение следствия 2.

Марковский процесс восстановления

$$\vec{\mathbf{N}}(t)=\left(N^{(1)}(t),\ N^{(2)}(t),\ \ldots,\ N^{(m)}(t)\right)$$

назовем ординарным, если

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{m} N^{(k)}(t)>1\right\}=0.$$

Так как

$$\mathbf{P}\{N^{(j)}(t)>1\}\leqslant\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{m} N^{(k)}(t)>1\right\},$$

то из ординарности самого процесса следует ординарность каждой его компоненты.

Пусть, далее,

$$H_i(t)=\sum_{j=1}^{m} Q_{ij}(t),\qquad \eta_i=\int_0^{\infty} t\,dH_i(t)<\infty$$

и

$$\sum_{j=1}^{m}\pi_j p_{jk}=\pi_k,\qquad \sum_{k=1}^{m}\pi_k=1$$

имеет единственное решение. Тогда, если

$$\mathbf{P}\{I_0=i\}=\frac{\pi_i\eta_i}{\sum_j \pi_j\eta_j}$$

и

$$\mathbf{P}\{I_1=j,\ X_1<t/I_0=i\}=\frac{1}{\eta_i}\int_0^{t}\left(p_{ij}-Q_{ij}(x)\right)dx,$$

то марковский процесс восстановления $\vec{\mathbf{N}}(t)$ является стационарным процессом (см., напр., [6], [7]). Очевидно, что в этом случае свойством стационарности также обладает каждая его компонента и процесс

$$N(t)=\sum_{k=1}^{m} N^{(k)}(t).$$

Рассмотрим теперь последовательность сумм стационарных и ординарных марковских процессов восстановления

$$\vec{\mathbf{N}}_n(t)=\sum_{r=1}^{n} \vec{\mathbf{N}}_{nr}(t).$$

Обозначим через $\lambda_{nr}^{(1)}, \lambda_{nr}^{(2)}, \ldots, \lambda_{nr}^{(m)}, \lambda_{nr}$ параметры процессов

$$N_{nr}^{(1)}(t),\ N_{nr}^{(2)}(t),\ \ldots,\ N_{nr}^{(m)}(t),\ N_{nr}(t)=\sum_{k=1}^{m} N_{nr}^{(k)}(t).$$

(Известно, что в случае стационарности и ординарности процессов эти параметры всегда существуют (см. [3].) Если

$$\eta_{nr}^{(k)}=\int_0^\infty t\,dH_k^{(n,r)}(t),\quad \text{где}\quad H_k^{(n,r)}(t)=\sum_{j=1}^{m} Q_{kj}^{(n,r)}(t)$$

и

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_{nr}^{(j)} p_{jk}^{(n,r)}=\pi_{nr}^{(k)},\qquad \sum_{k=1}^{m} \pi_{nr}^{(k)}=1,$$

то

$$\lambda_{nr}^{(k)}=\lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{P}\{N_{nr}^{(k)}(t)\geqslant 1\}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sum_i \frac{\pi_{nr}^{(i)}}{\sum_j \pi_{nr}^{(j)}\eta_{nr}^{(j)}}\int_0^t \left(p_{ik}^{(n,r)}-Q_{ik}^{(n,r)}(x)\right)dx=\frac{\pi_{nr}^{(k)}}{\sum_j \pi_{nr}^{(j)}\eta_{nr}^{(j)}}.$$

Пусть, далее, при каждом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\sum_k Q_{jk}^{(n,r)}(t)=0. \tag{10}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *При условии* (10) *для сходимости сумм независимых стационарных и ординарных марковских процессов восстановления*

$$\vec{\mathbf{N}}_n(t)=\sum_{r=1}^{n} \vec{\mathbf{N}}_{nr}(t)$$

к процессу Пуассона с параметром $\vec{\lambda}=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr}^{(k)}=\lambda_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{11}$$

Доказательство. В начале заметим, что из условия (10) в нашем случае следует бесконечная малость рассматриваемых процессов. В самом деле, для достаточно большого T

$$\min_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \eta_{nr}^{(j)} \geqslant \min_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \int_T^\infty t\,dH_j^{(n,r)}(t) \geqslant T \min_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \left(1-H_j^{(n,r)}(T)\right)=$$

$$=T\left(1-\max_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \sum_k Q_{jk}^{(n,r)}(T)\right). \tag{12}$$

Тогда из (10), (12) и ранее приведенного выражения для $\lambda_{nr}^{(j)}$ получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \lambda_{nr}^{(j)}=0,$$

а также и

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant n} \sum_{j=1}^m \lambda_{nr}^{(j)}=\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant n} \lambda_{nr}=0.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^m N_{nr}^{(k)}(t)>0\right\}=\mathbf{P}\{N_{nr}(t)>0\}\leqslant \mathbf{M}\,N_{nr}(t)=\lambda_{nr}t,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant n} \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^m N_{nr}^{(k)}(t)>0\right\}=0.$$

Следовательно, при условии (10) рассматриваемые процессы являются бесконечно малыми и по ранее указанному замечанию

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant n} \sum_{i,j} a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=0.$$

Далее, учитывая стационарность процессов и условия (10), (11), имеем:

$$\sum_{r=1}^n \sum_i a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ik}^{(n,r)}(t)=\sum_{r=1}^n \sum_i \frac{\pi_{nr}^{(i)}}{\sum_j \pi_{nr}^{(j)}\eta_{nr}^{(j)}} \int_0^t \left(p_{ik}^{(n,r)}-Q_{ik}^{(n,r)}(x)\right)dx=$$

$$=t\sum_{r=1}^n \frac{\pi_{nr}^{(k)}}{\sum_j \pi_{nr}^{(j)}\eta_{nr}^{(j)}}-\sum_{r=1}^n\sum_i \frac{\pi_{nr}^{(i)}}{\sum_j \pi_{nr}^{(j)}\eta_{nr}^{(j)}}\int_0^t Q_{ik}^{(n,r)}(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_k t,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^n \lambda_{nr}=\sum_{k=1}^m \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^n \lambda_{nr}^{(k)}=\sum_{k=1}^m \lambda_k<\infty.$$

Утверждение нашей теоремы теперь следует из следствия 2 теоремы 1, поскольку в случае однородного пуассоновского процесса $\lambda_k(t)=\lambda_k t$. Теорема 2 доказана.

В случае процесса восстановления, т. е. при $m=1$, как указано в доказательстве следствия 1 теоремы 1, можно считать, что

$$a_1^{(n,r)}=1,\ p_{11}^{(n,r)}=1,\ \hat{F}_{11}^{(n,r)}(t)=\hat{F}_{nr}(t),\ F_{11}^{(n,r)}(t)=F_{nr}(t),\ \lambda_{nr}^{(1)}=\lambda_{nr},\ \lambda_1=\lambda.$$

Тогда соотношение (10) совпадает с

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq r\leq n} F_{nr}(t)=0. \tag{13}$$

Из теоремы 2 получаем следующее очевидное следствие.

Следствие. *При условии* (13) *для сходимости сумм независимых стационарных и ординарных процессов восстановления к процессу Пуассона с параметром* λ, *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\lambda_{nr}=\lambda.$$

Заметим, что утверждение теоремы 2 иным методом было получено Е. Цинляром [8] при дополнительном условии, когда

$$\frac{\lambda_{nr}^{(k)}}{\lambda_{nr}}=\pi_{nr}^{(k)} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

не зависит от n и r. Таким образом, требование Е. Цинляра, чтобы $\pi_{nr}^{(k)}$ не зависели от n и r, является излишним.

В заключение хочу выразить искреннюю благодарность Б. Григелионису за ряд ценных советов и указаний при выполнении этой работы.

Институт физики и математики
Академии Наук Литовской ССР
Каунасский медицинский институт

Поступило в редакцию
24.II.1969

Литература

1. Б. Григелионис, О композициях целочисленных случайных мер, Лит. матем. сб., VI, 3 (1966), 359—363.
2. Б. Григелионис, К вопросу о сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Лит. матем. сб., VI, 2 (1966), 241—244.
3. А. Я. Хинчин, Работы по математической теории массового обслуживания, Физматгиз, 1963.
4. И. Сапаговас, О сходимости сумм марковских процессов восстановления к процессу Пуассона, Лит. матем. сб., VI, 2 (1966), 271—277.
5. R. Pyke, Markov renewal processes: definitions and preliminary properties, Ann. Math. statist., 32 (1961), 1231—1242.
6. R. Pyke, Markov renewal processes with finitely many states, Ann. Math. statist., 32 (1961), 1243—1259.
7. R. Pyke and R. Schaufele, The existence and uniqueness of stationary measures for Markov renewal processes, Ann. Math. statist., 37 (1966), 1439—1462.
8. E. Cinlar, On the superposition of m-dimensional point processes, J. Appl. Prob., 5 (1968), 169—176.

APIE MARKOVO ATSTATYMO PROCESŲ SUMŲ KONVERGENCIJĄ Į DAUGIAMATĮ PUASONO PROCESĄ

J. Sapagovas

(*Reziumė*)

Darbe randamos būtinos ir pakankamos sąlygos nepriklausomų nykstamai mažų Markovo atstatymo procesų sumų konvergencijai į daugiamatį Puasono procesą. Taip pat nurodytos sąlygos stacionarių ir ordinarių nagrinėjamų procesų sumų konvergencijai į homogeninį Puasono procesą.

ON THE CONVERGENCE OF THE SUMS OF THE MARKOV RENEWAL PROCESSES TO A MANY-DIMENSIONAL POISSON PROCESS

J. Sapagovas

(*Summary*)

In the paper the necessary and sufficient conditions for the sums of independent negligible Markov renewal processes to converge to a many-dimensional Poisson process are proved. The conditions for the convergence of sums of stationary and orderly Markov renewal processes to a homogeneous Poisson process are obtained as well.