IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969

УДК–519.21

О СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

Д. Сургайлис

Известно, что многие задачи теории случайных процессов (напр., проверка марковского свойства, вопросы абсолютной непрерывности мер, фильтрации, управления по неполным данным и т. д.) сравнительно легко решаются, когда рассматриваемый процесс является решением стохастического уравнения К. Ито, т. е. когда траектории этого процесса являются определенным образом построенными функционалами от винеровского процесса и пуассоновских случайных мер. Дубом (см. [1], стр. 259) была впервые поставлена обратная задача – какие процессы могут быть представлены как решения этих уравнений. Для непрерывного с вер. 1 одномерного процесса ответ был получен самим Дубом ([1], теор. 3.3), а также в марковском случае Маруямой [4], в виде условия на локальное поведение траектории процесса.

В последнее время Б. Григелионисом было получено для процесса более общего типа (допускающего разрывы первого рода) разложение в ,,диффузионную" и „скачкообразную" части, которое в одном частном случае превращается в уравнение типа Ито [2]. В нашей работе аналогичные результаты получены при вышеупомянутых условиях дубовского типа.

Ниже приведены вкратце основные результаты [2]. В дальнейшем будем пользоваться также и обозначениями этой работы, причем некоторые из них даются без определения.

Пусть $x(t)$, $t\in[0, T]$ – случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, почти все траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева, принимающий значения в m-мерном эвклидовом пространстве (R_m, B_m), а $\mathfrak{F}_t=\tilde{\mathfrak{F}}_{t+0}$, $0\leqslant t\leqslant T$, где $\tilde{\mathfrak{F}}_t$ – σ-алгебры, порожденные случайными величинами $x(u)$, $0\leqslant u\leqslant t$, и пополненные по мере P. Пусть выполняются следующие предположения.

A_1. Существует функция $\Pi(t, x, \Gamma)$, $B[0, T]\times B_m$ – измеримая при фиксированном $\Gamma\in B_m$, являющаяся мерой на B_m при любых t, x, такая, что для всех $\varepsilon>0$ и $\Gamma\in B_m\cap U_\varepsilon$

$$E\left\{\int_0^T \Pi\left(u,\ x(u),\ U_\varepsilon\right) du\right\}<\infty,$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left\{\int_0^T \int_{|y|\leqslant\varepsilon} y^2\,\Pi\left(u,\ x(u),\ dy\right) du\right\}=0,$$

$$q(t,\ \Gamma)=p(t,\ \Gamma)-\int_0^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \Gamma\right) du\in\mathfrak{M}^{(1)},$$

причем с вер. 1

$$\langle q(\cdot\,,\ \Gamma)\rangle_t=\int_0^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \Gamma\right)du$$

$$\left(p(t,\ \Gamma)=\sum_{0\leqslant u\leqslant t}\chi_\Gamma\left(x(u)-x(u-0)\right),\ \text{другие обозначения см. в [2]}\right).$$

A_2. Существуют функция

$$a(t,x)=\left(a_1(t,x),\ \ldots,\ a_m(t,x)\right)$$

и симметричная неотрицательно определенная матрица $A(t,x)=\|a_{ij}(t,x)\|_1^m$ такие, что функции $a_i(t,x)$, $a_{ij}(t,x)$, $i,j=1,\ \ldots,\ m$, $B[0,T]\times B_m$ – измеримые и

$$\tilde{x}(t)=x(t)-P_g(t)-Q_f(t)-\int_0^t a\left(u,\ x(u)\right)du\in\mathfrak{M}^{(m)},$$

причем

$$\langle\tilde{x}_i,\ \tilde{x}_j\rangle_t=\int_0^t a_{ij}\left(u,\ x(u)\right)du \text{ с вер. } 1,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ m.$$

(Определение стохастических интегралов $P_g(t)$ и $Q_f(t)$ от функции

$$g(y)=\left(g_1(y),\ \ldots,\ g_m(y)\right),\ g_i(y)=y_i$$

при $|y|>1$ и $=0$ при $|y|\leqslant 1$, $f(y)=y-g(y)$ по мерам p и q см. в [2].)

Доказывается [2], что если матрица $A(t,x)$ имеет ранг r, независящий от t и x, то при сделанных выше предположениях существует r-мерный винеровский процесс

$$w^{(r)}(t)=\left(w_1(t),\ \ldots,\ w_r(t)\right),$$

согласованный с $\mathfrak{F}_t$, такой, что $w^{(r)}(t)-w^{(r)}(s)$ не зависит от $\mathfrak{F}_s$, $0\leqslant s<t\leqslant T$, и $B[0,\ T]\times B_m$ – измеримые функции $b_k(t,x)\in R_m$, $k=1,\ \ldots,\ r$, что с вер. 1:

$$x(t)=x(0)+\int_0^t a\left(s,\ x(s)\right)ds+$$

$$+\sum_{k=1}^r\int_0^t b_k\left(s,\ x(s)\right)dw_k(s)+P_g(t)+Q_f(t)\ \ldots\ (*).$$

Если же $\Pi(t,x,\Gamma)=\Pi(t,\Gamma)$ для всех $x\in R_m$ и

$$\int_0^T\int_{y\in R_m} y^2\,\Pi(s,\ dy)\,ds<\infty,$$

то мера p является пуассоновской и независимой от $w^{(r)}(t)$, и (*) равенство, таким образом, есть стохастическое уравнение К. Ито, и $x(t)$ является решением этого уравнения.

Сформулируем ниже основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть вышеопределенный процесс $x(t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $E\{x^2(t)\}<\infty$ *для всех* $t\in[0, T]$ *и для* $0\leqslant s<t\leqslant T$ *с вер.* 1 $E\{x^2(t) \mid \mathfrak{F}_s\}\leqslant \leqslant z_s$, *где* z_s *при каждом* s *является случайной величиной, согласованной с* $\mathfrak{F}_s$, *независимой от* t *и* $E\{z_s\}<\infty$;

(ii) *существует ядро* $\Pi(t, x, \Gamma)$ *на* B_m, *определенное для всех* $(t, x)\in[0, T]\times \times R_m$, *такое, что для каждого* $\varepsilon>0$ $(t, x)\in[0, T]\times R_m$ *и* $\Gamma\in B_m\cap U_\varepsilon$ $\Pi(t, x, \Gamma)$ *и*

$$\int\limits_{y\in R_m} y^2\,\Pi(t, x, dy)$$

конечны и непрерывны по совокупности (t, x). *Пусть для каждого* $\varepsilon>0$ *и* $\Gamma\in B_m\cap U_\varepsilon$, *такой, что*

$$P\left\{\int\limits_0^T \Pi\left(u, x(u), \tilde{\Gamma}\right)du=0\right\}=1$$

($\tilde{\Gamma}$ — *граница области*), $0\leqslant t<t+h\leqslant T$ *с вер.* 1:

$$E\left\{\chi_\Gamma\left(x(t+h)-x(t)\right)\Big|\,\mathfrak{F}_t\right\}=\Pi\left(t, x(t), \Gamma\right)h+\left(1+x^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} hf_\varepsilon(h);$$

(iii) *существует непрерывная по* (t, x), *неотрицательно определенная матрица* $A(t, x)=\| a_{ij}(t, x)\|_1^m$, *ранг которой* r *не зависит от* t, x, *что для* $0\leqslant t<t+h\leqslant T$ *с вер.* 1:

$$E\left\{\left(x_i(t+h)-x_i(t)\right)\left(x_j(t+h)-x_j(t)\right)\Big|\,\mathfrak{F}_t\right\}=a_{ij}\left(t, x(t)\right)h+$$

$$+\int\limits_{y\in R_m} y_i y_j\,\Pi\left(t, x(t), dy\right)h+\left(1+x^2(t)\right)h\,f(h);$$

(iv) *существует непрерывная по* (t,x) *функция*

$$\tilde{a}(t, x)=\left(\tilde{a}_1(t,x), \ldots, \tilde{a}_m(t,x)\right),$$

что для $0\leqslant t<t+h\leqslant T$ *с вер.* 1

$$E\left\{\left(x_i(t+h)-x_i(t)\right)\Big|\,\mathfrak{F}_t\right\}=\tilde{a}_i\left(t, x(t)\right)h+\left(1+x^2(t)\right)hf(h),\quad i=1, \ldots, m;$$

(v) *существует для каждого* $\varepsilon>0$ *и* $\Gamma\in B_m\cap U_\varepsilon$ *константы* K *и* K_Γ, *что для всех* $t\in[0, T]$:

$$\Pi(t,x, \Gamma)\leqslant K_\Gamma\,(1+x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{a}(t,x)^2+\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, x)+\int\limits_{y\in R_m} y^2\,\Pi(t,x,dy)\leqslant K(1+x^2).$$

Величины $f(h)$ *и* $f_\varepsilon(h)$ *в условиях* (ii)—(iv) *являются монотонно невозрастающими функциями от* h *и сходятся к нулю, когда* $h\downarrow 0$ *при каждом* $\varepsilon>0$. *Обозначим* $\bar{a}(t, x)=\tilde{a}(t, x)-\int\limits_{|y|>1} y\,\Pi(t, x, dy)$. *Тогда для* $a(t, x), \Pi(t, x, \Gamma)$, $A(t, x)$ *и процесса* $x(t)$ *выполняются условия* A_1—A_2 *и соотношение* (*).

Доказательство будет проводиться следующими этапами. Заметим только, что для этого достаточно доказать свойства мартингала для процессов $\tilde{x}(t)$ и $q(t, \Gamma)$ (см. ниже леммы 5 и 6), так как все другие требования, имеющиеся в A_1-A_2, обеспечиваются теоремой очевидным образом.

Лемма 1. *Пусть* $f(t)\in R_m$, $t\in[0,T]$ *и в каждой точке интервала* $[0, T]$ *непрерывная справа и имеет предел слева. Пусть* $T^{(n)}$ *– последовательность разбиений интервала* $[0,T]$ $0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots<t_n^{(n)}=T$ *такова, что* $T^{(i)}\subset T^{(i+1)}$, $i=0, 1, \ldots$ *и* $\lambda_n=\max\limits_{0\leqslant i<n}(t_{i+1}^{(n)}-t_i^{(n)})\underset{n\to\infty}{\to}0$. *Обозначим*

$$p_t^\Gamma(f)=\sum_{0\leqslant s\leqslant t}\chi_\Gamma\Bigl(f(s)-f(s-0)\Bigr).$$

Тогда для каждого $\varepsilon>0$ *и* $\Gamma\in B_m\cap U_\varepsilon$ *такой, что*

$$p_T^{\bar{\Gamma}}(f)=0, \tag{1}$$

$$\gamma_{n,t}^\Gamma(f)=\sum_{0\leqslant t_k^{(n)}<t}\chi_\Gamma\Bigl(f(t_{k+1}^{(n)})-f(t_k^{(n)})\Bigr)\underset{n\to\infty}{\to}p_t^\Gamma(f)$$

при каждом $t\in[0, T]$.

Доказательство. Докажем сперва, что

$$p_t^\Gamma(f)\leqslant\varliminf\gamma_{n,t}^\Gamma(f). \tag{2}$$

Обозначим

$$\tau_i=\inf\{s: s\in[0, t], p_s^\Gamma(f)=i\},\quad N_t=\sum_{\tau_i\leqslant t}1.$$

Пусть индексы $k_i^{(n)}$ таковы, что

$$\tau_i\in[t_{k_i^{(n)}}^{(n)},\quad t_{k_i^{(n)}+1}^{(n)}),$$

$i=1, \ldots, N_t$. Допустим, что τ_j таков, что с некоторого $n^{(j)}$, $\tau_j\in T^{(n)}$, т. е. $\tau_j=t_{k_j^{(n)}}^{(n)}$ для всех $n\geqslant n^{(j)}$. Очевидно, что в этом случае $t_{k_j^{(n)}-1}^{(n)}\to\tau_j$ слева, и в силу существования предела функции слева в точке τ_j:

$$x_j^{(n)}=f(\tau_j)-f(t_{k_j^{(n)}-1}^{(n)})\to f(\tau_j)-f(\tau_j-0)=x_j\in\Gamma.$$

Заметим, что так как x_j не является пограничной точкой области Γ, то найдется $\tilde{n}^{(j)}$, что $x_j^{(n)}\in\Gamma$ для всех $n\geqslant\tilde{n}^{(j)}$, и в сумме индикаторов, составляющей по определению $\gamma_{n,t}^\Gamma(f)$, слагаемое $\chi_\Gamma\Bigl(f(t_{k_j^{(n)}}^{(n)})-f(t_{k_j^{(n)}-1}^{(n)})\Bigr)=1$ для всех $n\geqslant\tilde{n}^{(j)}$. Если же $\tau_j\bar{\in}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}T^{(n)}$, то очевидным образом $t_{k_j^{(n)}}^{(n)}\to\tau_j$ слева, а $t_{k_j^{(n)}+1}^{(n)}\to\tau_j$ справа, так что и в этот раз $x_j^{(n)}=f(t_{k_j^{(n)}+1}^{(n)})-f(t_{k_j^{(n)}}^{(n)})$ сходится к $f(\tau_j)-f(\tau_j-0)$, и опять с некоторого $\tilde{n}^{(j)}$ $x_j^{(n)}\in\Gamma$ для всех $n\geqslant\tilde{n}^{(j)}$. Так как $j=1, \ldots, N_t<\infty$, то этим самым (2) доказано. Чтоб доказать лемму, нужна и обратная оценка:

$$\varlimsup\gamma_{n,t}^\Gamma(f)\leqslant p_t^\Gamma(f). \tag{3}$$

Обозначим

$$k_j^{(n)} = \inf\{\, k : \gamma^{\Gamma}_{n,\, t_{k+1}^{(n)}}(f) = j, \quad t_k^{(n)} < t \,\}.$$

Тогда в интервале $[0,\ T]$ можно выделить для каждого $n \geqslant 1$ $N(n) = \gamma^{\Gamma}_{n,t}(f)$ непересекающихся интервалов $(t^{(n)}_{k_j^{(n)}+1},\ t^{(n)}_{k_j^{(n)}})$ таких, что

$$f(t^{(n)}_{k_j^{(n)}+1}) - f(t^{(n)}_{k_j^{(n)}}) \in \Gamma, \quad j = 1,\ \ldots,\ N(n).$$

Обозначим для краткости

$$t^{-}_{n,i} = t^{(n)}_{k_i^{(n)}}, \quad t^{+}_{n,i} = t^{(n)}_{k_i^{(n)}+1}, \quad i = 1,\ \ldots,\ N(n).$$

Последовательности $\{t^{-}_{n,1}\}$ и $\{t^{+}_{n,1}\}$ таковы, что можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\tilde{\tau}_1 \in [0,\ t]$. Примем для простоты, что $\lim t^{-}_{n,1} = \lim t^{+}_{n,1} = \tilde{\tau}_1$.

Очевидно, что с некоторого $n^{(1)}$:

$$t^{-}_{n,1} < \tilde{\tau}_1 \leqslant t^{+}_{n,1} \tag{4}$$

для всех $n \geqslant n^{(1)}$. Тогда $x_1^{(n)} = f(t^{+}_{n,1}) - f(t^{-}_{n,1}) \to f(\tilde{\tau}_1) - f(\tilde{\tau}_1 - 0) = x_1$, и $x_1^{(n)} \in \Gamma$, так что $x_1 \in \Gamma \cup \bar{\Gamma}$. Слагаемое

$$\chi_{\Gamma \cup \bar{\Gamma}}\Big(f(\tilde{\tau}_1) - f(\tilde{\tau}_1 - 0)\Big) = 1$$

очевидно входит в $p_t^{\Gamma \cup \bar{\Gamma}}(f)$, но в силу (1) оно войдет и в $p_t^{\Gamma}(f)$.

Пусть теперь $\overline{\lim}\, N(n) < \infty$, тогда найдется подпоследовательность n_k и k_0, что $N(n_k) = \overline{\lim}\, N(n)$ для всех $k \geqslant k_0$, и вышеописанным образом мы найдем точки $\tilde{\tau}_i \in [0, \mathrm{T}]$, что

$$\chi_{\Gamma}\Big(f(\tilde{\tau}_i) - f(\tilde{\tau}_i - 0)\Big) = 1$$

и $\tilde{\tau}_i < \tilde{\tau}_j$ при $i < j$ в силу (4), $i,\ j = 1,\ \ldots,\ \overline{\lim}\, N(n)$, так что (3) верно. Если же $\overline{\lim}\, \gamma^{\Gamma}_{n,t}(f) = \infty$, то для некоторой подпоследовательности n_k и k_0 $N(n_k) > p_t^{\Gamma}(f)$ для всех $k \geqslant k_0$. В этом случае мы можем ограничиться первыми $N(n_{k_0})$ парами интервалов $(t^{-}_{n,i},\ t^{+}_{n,i})$, сходящимися к некоторым $\tilde{\tau}_i$, $i = 1, \ldots, N(n_{k_0})$. Но это очевидно ведет к противоречию, ибо

$$\sum_{\tilde{\tau}_i \leqslant t} 1 \leqslant p_t^{\Gamma}(f).$$

Лемма доказана.

Обозначим далее

$$p\,(t,\ \Gamma) = p_t^{\Gamma}\big(x(\cdot)\big), \quad \gamma^{\Gamma}_{n,t} = \gamma^{\Gamma}_{n,t}\big(x(\cdot)\big).$$

Ясно, что $p(t,\ \Gamma)$ суть аддитивный функционал от процесса $x(t)$, согласованый с $\mathfrak{F}_t$. Кроме того, при доказательствах лемм 3, 4, 5 и 6 для некоторых фиксированных $0 \leqslant s < t \leqslant T$ будем считать, что s и t принадлежат к точкам разбиений интервала, т. е. $s,\ t \in T^{(n)}$ с некоторого n (что является возможным ввиду вспомогательного характера $\gamma^{\Gamma}_{n,t}$). Из предыдущей леммы следует следующее предположение.

Лемма 2. *Пусть* $\Gamma \in B_m \cap U_\varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$ и $P\{p(T, \tilde{\Gamma}) = 0\} = 1$. *Тогда для каждого* $t \in [0, T]$ $\gamma_{n,t}^{\Gamma} \to p(t, \Gamma)$ *с вер.* 1.

Лемма 3. *Пусть* $\Gamma \in B_m \cap U_\varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$ *и*

$$P\left\{\int_0^T \Pi\left(s, x(s), \tilde{\Gamma}\right) ds = 0\right\} = 1.$$

Тогда для всех $0 \leqslant s < t \leqslant T$ *с вер.* 1:

$$E\{(\gamma_{n,t}^{\Gamma} - \gamma_{n,s}^{\Gamma}) \mid \mathfrak{F}_s\} \to E\left\{\int_s^t \Pi\left(u, x(u), \Gamma\right) du \mid \mathfrak{F}_s\right\}.$$

Доказательство. В силу условия (ii) теоремы

$$\left| E\{(\gamma_{n,t}^{\Gamma} - \gamma_{n,s}^{\Gamma}) \mid \mathfrak{F}_s\} - E\left\{\int_s^t \Pi\left(u, x(u), \Gamma\right) du \,\Big|\, \mathfrak{F}_s\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant E\left\{\sum_{s \leqslant t_k^{(n)} < t} \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \left| \Pi\left(u, x(u), \Gamma\right) - \Pi\left(t_t^{(n)}, x(t_k^{(n)}), \Gamma\right)\right| du \mid \mathfrak{F}_s\right\} +$$

$$+ E\left\{\sum_{s \leqslant t_k^{(n)} < t} \left(1 + x^2(t_k^{(n)})\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t_k^{(n)} f_\varepsilon(\Delta t_k^{(n)}) \mid \mathfrak{F}_s\right\} =$$

$$= E\{\varphi_1 \mid \mathfrak{F}_s\} + E\{\varphi_1 \mid \mathfrak{F}_s\}.$$

Очевидно, что при условиях теоремы $\varphi_1 + \varphi_2 \to 0$ с вер. 1. Заметим, что в последнем равенстве можно переходить к пределу под знаком условного мат. ожидания. Действительно,

$$\varphi_1^2 \leqslant \left(\int_s^t \Pi\left(u, x(u), \Gamma\right) du + \sum_{s \leqslant t_k^{(n)} < t} \Pi\left(t_k^{(n)}, x(t_k^{(n)}), \Gamma\right) \Delta t_k^{(n)}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(K_\Gamma \int_s^t \left(1 + x^2(u)\right)^{\frac{1}{2}} du + K_\Gamma \sum_{s \leqslant t_k^{(n)} < t} \left(1 + x^2(t_k^{(n)})\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t_k^{(n)}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2K_\Gamma^2 T^2 \left(\int_s^t \left(1 + x^2(u)\right) du + \sum_{s \leqslant t_k^{(n)} < t} \left(1 + x^2(t_k^{(n)})\right) \Delta t_k^{(n)}\right).$$

Так что, принимая во внимание условие (i),

$$E\left\{\varphi_1^2 \mid \mathfrak{F}_s\right\} \leqslant 4K_\Gamma^2 T^2 (1 + z_s).$$

Таким же путем для достаточно больших $n = n(\varepsilon)$:

$$E\left\{\varphi_2^2 \mid \mathfrak{F}_s\right\} \leqslant T^2 f_\varepsilon^2(\lambda_n)(1 + z_s) \leqslant T^2 (1 + z_s).$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если* Γ *удовлетворяет условиям леммы* 3, *то существует сл. величина* $z=z(s,t,\Gamma)$, *что* $E\{z\}<\infty$ *и* $E\{(\gamma^{\Gamma}_{n,t}-\gamma^{\Gamma}_{n,s})^2 \mid \mathfrak{F}_s\}\leqslant z$ *п.вс. равномерно по* $n=1,2,\dots$

Доказательство. По определению имеем:

$$(\gamma^{\Gamma}_{n,t}-\gamma^{\Gamma}_{n,s})^2=\left(\sum_{s\leqslant t_k^{(n)}<t}\chi_{\Gamma}\left(x(t_{k+1}^{(n)})-x(t_k^{(n)})\right)\right)^2=$$

$$=\sum_{s\leqslant t_k^{(n)}<t}\chi_{\Gamma}\left(x(t_{k+1}^{(n)})-x(t_k^{(n)})\right)+$$

$$+2\sum_{s\leqslant t_i^{(n)}<t}\chi_{\Gamma}\left(x(t_{i+1}^{(n)})-x(t_i^{(n)})\right)\sum_{t>t_j^{(n)}>t_i^{(n)}}\chi_{\Gamma}\left(x(t_{j+1}^{(n)})-x(t_j^{(n)})\right).$$

Так что

$$E\left\{(\gamma^{\Gamma}_{n,t}-\gamma^{\Gamma}_{n,s})^2\mid\mathfrak{F}_s\right\}=E\left\{\sum_{s\leqslant t_k^{(n)}<t}\Pi\left(t_k^{(n)},\ x(t_k^{(n)}),\Gamma\right)\Delta t_k^{(n)}+\right.$$

$$\left.+\left(1+x^2(t_k^{(n)})\right)^{\frac{1}{2}}\Delta t_k^{(n)}f_{\varepsilon}(\Delta t_k^{(n)})\mid\mathfrak{F}_s\right\}+$$

$$+E\left\{2\sum_{s\leqslant t_i^{(n)}<t}\chi_{\Gamma}\left(x(t_{i+1}^{(n)})-x(t_i^{(n)})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{t>t_j^{(n)}<t_i^{(n)}}\Pi\left(t_j^{(n)},x(t_j^{(n)}),\Gamma\right)\Delta t_j^{(n)}+\left(1+x^2(t_j^{(n)})\right)^{\frac{1}{2}}\Delta t_j^{(n)}f_{\varepsilon}(\Delta t_j^{(n)})\mid\mathfrak{F}_s\right\}.$$

Так как все слагаемые под знаком мат. ожидания неотрицательны, то

$$E\left\{(\gamma^{\Gamma}_{n,t}-\gamma^{\Gamma}_{n,s})^2\mid\mathfrak{F}_s\right\}\leqslant E\left\{(\varphi_n+\varepsilon_n)(\gamma^{\Gamma}_{n,t}-\gamma^{\Gamma}_{n,s}+1)\mid\mathfrak{F}_s\right\},$$

где

$$\varphi_n=2\sum_{s\leqslant t_j^{(n)}<t}\Pi\left(t_j^{(n)},\ x(t_j^{(n)}),\Gamma\right)\Delta t_j^{(n)},$$

$$\varepsilon_n=\sum_{s\leqslant t_j^{(n)}<t}\left(1+x^2(t_j^{(n)})\right)^{\frac{1}{2}}\Delta t_j^{(n)}f_{\varepsilon}(\Delta t_j^{(n)}).$$

По соображениям, аналогичным доказательству леммы 3, имеем:

$$E\left\{\varphi_n^2\mid\mathfrak{F}_s\right\}\leqslant 4K_{\Gamma}^2T^2(1+z_s),\quad E\left\{\varepsilon_n^2\mid\mathfrak{F}_s\right\}\leqslant T^2(1+z_s),$$

поэтому

$$E\left\{(\varphi_n+\varepsilon_n)(\gamma^{\Gamma}_{n,t}-\gamma^{\Gamma}_{n,s}+1)\mid\mathfrak{F}_s\right\}\leqslant E^{\frac{1}{2}}\left\{(\varphi_n+\varepsilon_n)^2\mid\mathfrak{F}_s\right\}\times$$

$$\times E^{\frac{1}{2}}\left\{(\gamma^{\Gamma}_{n,t}-\gamma^{\Gamma}_{n,s}+1)^2\mid\mathfrak{F}_s\right\}\leqslant 2E^{\frac{1}{2}}\left\{(\varphi_n^2+\varepsilon_n^2)\mid\mathfrak{F}_s\right\}\times$$

$$\times E^{\frac{1}{2}}\left\{(\gamma^{\Gamma}_{n,t}-\gamma^{\Gamma}_{n,s})^2+1\mid\mathfrak{F}_s\right\},$$

и в силу (5):

$$\frac{E^{2}\{(\gamma^{\Gamma}_{n,t}-\gamma^{\Gamma}_{n,s})^{2}\mid\mathfrak{F}_s\}}{E\{(\gamma^{\Gamma}_{n,t}-\gamma^{\Gamma}_{n,s})^{2}+1\mid\mathfrak{F}_s\}}\leqslant 4\,(E\{\varphi_n^2\mid\mathfrak{F}_s\}+E\{\varepsilon_n^2\mid\mathfrak{F}_s\}),$$

что окончательно дает

$$E\left\{(\gamma^{\Gamma}_{n,t}-\gamma^{\Gamma}_{n,s})^{2}\mid\mathfrak{F}_s\right\}\leqslant z,\quad \text{где}\quad z=1+4T^{2}(1+z_s)(4K_{\Gamma}^{2}+1).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\Gamma\in B_m\cap U_\varepsilon$, *где* $\varepsilon>0$. *Тогда для всех* $0\leqslant s<t\leqslant T$ *с вер.* 1:

$$E\left\{\left(p(t,\ \Gamma)-p(s,\ \Gamma)\right)\mid\mathfrak{F}_s\right\}=E\left\{\int_s^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \Gamma\right)du\mid\mathfrak{F}_s\right\}. \qquad (6)$$

Доказательство. Предположим сначала, что для Γ выполняются следующие пограничные условия:

$$(\alpha)\quad P\left\{p(T,\ \tilde{\Gamma})=0\right\}=1,$$

$$(\beta)\quad P\left\{\int_0^T \Pi\left(s,\ x(s),\ \tilde{\Gamma}\right)ds=0\right\}=1.$$

В этом случае (6) является простым следствием лемм 2, 3 и 4. Обозначим далее

$$\pi'(\Gamma)=E\left\{p(T,\ \Gamma)\right\}\ \text{ и }\ \pi''(\Gamma)=E\left\{\int_0^T \Pi\left(s,\ x(s),\ \Gamma\right)ds\right\}.$$

Очевидно, что π' и π'' являются борелевскими мерами на $(R_m,\ B_m)$, конечными на всяком замкнутом множестве, не содержащем нуля. Поэтому, для каждого $\Gamma\in B_m\cap U_\varepsilon$ и $\varepsilon>0$ можно найти последовательность монотонно возрастающих множеств Γ_n^-, что $\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n^-=\Gamma\setminus\tilde{\Gamma}$ таких, что $\pi'(\tilde{\Gamma}_n^-)=\pi''(\tilde{\Gamma}_n^-)=0$. Так как $p(t,\ \Gamma_n^-)-p(s,\ \Gamma_n^-)$ является монотонно неубывающей последовательностью, ограниченной, как легко заметить, интегрируемой функцией, то существует предел

$$\lim E\left\{\left(p(t,\ \Gamma_n^-)-p(s,\ \Gamma_n^-)\right)\mid\mathfrak{F}_s\right\}=$$
$$=E\left\{\lim\left(p(t,\ \Gamma_n^-)-p(s,\ \Gamma_n^-)\right)\mid\mathfrak{F}_s\right\}.$$

Таким же образом доказывается существование и равенство:

$$\lim E\left\{\int_s^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \Gamma_n^-\right)du\mid\mathfrak{F}_s\right\}=$$
$$=E\left\{\lim\int_s^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \Gamma_n^-\right)du\mid\mathfrak{F}_s\right\}.$$

Напомним, что для Γ_n^- выполняются (α) и (β), поэтому

$$E\left\{\lim\left(p,\ (t,\ \Gamma_n^-)-p\,(s,\ \Gamma_n^-)\right)\Big|\,\mathfrak{F}_s\right\}=$$

$$=E\left\{\lim\int\limits_s^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \Gamma_n^-\right)du\mid\mathfrak{F}_s\right\}. \tag{7}$$

Подобным образом можно построить последовательность монотонно убывающих множеств Γ_n^+, $n\geqslant 1$, чтобы $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Gamma_n^+=\Gamma\cup\tilde\Gamma$, $\pi'(\tilde\Gamma_n^+)=\pi''(\tilde\Gamma_n^+)=0$ для каждого $n\geqslant 1$ и выполнялось следующее (с вер. 1):

$$E\left\{\lim\left(p\,(t,\ \Gamma_n^+)-p\,(s,\ \Gamma_n^+)\right)\Big|\,\mathfrak{F}_s\right\}=$$

$$=E\left\{\lim\int\limits_s^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \Gamma_n^+\right)du\,|\,\mathfrak{F}_s\right). \tag{8}$$

Ясно, что с вер. 1.

$$\lim\left\{\left(p\,(t,\ \Gamma_n^+)-p\,(s,\ \Gamma_n^+)\right)-\left(p\,(t,\ \Gamma_n^-)-p\,(s,\ \Gamma_n^-)\right)\right\}=$$

$$=p\,(t,\ \tilde\Gamma)-p\,(s,\ \tilde\Gamma),$$

а

$$\lim\left(\int\limits_s^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \Gamma_n^+\right)du-\int\limits_s^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \Gamma_n^-\right)du\right)=$$

$$=\int\limits_s^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \tilde\Gamma\right)du,$$

поэтому (7) и (8) влечет за собой

$$E\left\{\left(p\,(t,\ \tilde\Gamma)-p\,(s,\ \tilde\Gamma)\right)\Big|\,\mathfrak{F}_s\right\}=E\left\{\int\limits_s^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \tilde\Gamma\right)du\,|\,\mathfrak{F}_s\right\}, \tag{9}$$

что дает нам (6) для произвольного замкнутого или открытого $\Gamma\in B_m\cap U_\varepsilon$. Заметим наконец, что (9) легко можно распространить на случай произвольного борелевского подмножества $\tilde\Gamma_1\subset\tilde\Gamma$, что дает нам окончательный результат.

Применив к последовательности $\gamma_{n,t}^{\Gamma}$ лемму Фату, в связи с оценкой ле м м ı 4 можно утверждать, что $E\,\{p^2\,(t,\ \Gamma)\}<\infty$, так что из равенства (6) след ует что

$$q\,(t,\ \Gamma)=p\,(t,\ \Gamma)-\int\limits_0^t \Pi\left(u,\ x\,(u),\ \Gamma\right)du\in\mathfrak{M}^{(1)}.$$

Нетрудно можно показать, что в таком случае

$$\langle\ q(\cdot,\ \Gamma)\ \rangle_t=\int\limits_0^t \Pi\left(u,\ x(u),\ \Gamma\right)du.$$

Таким образом, условие A_1 оказывается выполненным полностью, так что можно определить стохастические интегралы $P_g(t)$ и $Q_f(t)$. Заметим далее, что при условии $\Pi(t, x, dy)$ – интегрируемости в квадрате функции $\tilde{f}(y) = f(y)+g(y)=y\in R_m$ выполняется п.вс.:

$$Q_f(t)+P_g(t)=Q_{\tilde{f}}(t)+\int_0^t \int_{|y|>1} y\,\Pi\left(u,\ x(u),\ dy\right) du$$

и поскольку

$$a(t,\ x)=\tilde{a}(t,\ x)-\int_{|y|>1} y\,\Pi(t,\ x,\ dy)\ \text{ является }\ B[0,\ T]\times B_m\ \text{ изме-}$$

римой, то для доказательства условия A_2 достаточно следующего утверждения.

Лемма 6. *Процесс*

$$\tilde{x}(t)=x(t)-Q_{\tilde{f}}(t)-\int_0^t \tilde{a}\left(s,\ x(s)\right) ds\in\mathfrak{M}^{(m)}$$

и с вер. 1:

$$\langle\tilde{x}_i,\ \tilde{x}_j\rangle_t=\int_0^t a_{ij}\left(s,\ x(s)\right) ds,\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ m. \tag{10}$$

Доказательство. Так как в определении $\tilde{x}(t)$ все слагаемые интегрируемы в квадрате, то очевидно $E\{x^2(t)\}<\infty$. Далее,

$$\left|E\left\{\left(\tilde{x}(t)-\tilde{x}(s)\right)\Big|\,\mathfrak{F}_s\right\}\right|\leqslant\left|E\left\{\sum_{s\leqslant t_k^{(n)}<t}\left(x(t_{k+1}^{(n)})-x(t_k^{(n)})\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}}\tilde{a}\left(u,\ x(u)\right) du-\Delta Q_{\tilde{f}}(t_k^{(n)})\,\Big|\,\mathfrak{F}_s\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant E\left\{\sum_{s\leqslant t_k^{(n)}<t}\int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}}\left|\tilde{a}\left(u,\ x(u)\right)-\tilde{a}\left(t_k^{(n)},\ x(t_k^{(n)})\right)\right| du\,\Big|\,\mathfrak{F}_s\right\}+$$

$$+mE\left\{\sum_{s\leqslant t_k^{(n)}<t}\left(1+x^2(t_k^{(n)})\right)^{\frac{1}{2}}\Delta t_k^{(n)} f(\Delta t_k^{(n)})\,\Big|\,\mathfrak{F}_s\right\}=$$

$$=E\left\{\psi_1\,|\,\mathfrak{F}_s\right\}+E\left\{\psi_2\,|\,\mathfrak{F}_s\right\}.$$

Аналогично, как уже делалось раньше, можно показать, что $E\{\psi_i\,|\,\mathfrak{F}_s\}\to 0$ с вер. 1, $i=1, 2$, так что остается проверить (10).

Заметим, что $x_0(t)=\tilde{x}(t)+Q_{\tilde{f}}(t)\in\mathfrak{M}^{(m)}$ и $\tilde{x}(t)\in\mathfrak{M}_c^{(m)}$, в то время как $Q_{\tilde{f}}(t)\in\mathfrak{M}_d^{(m)}$. Поэтому $\tilde{x}(t)\perp Q_{\tilde{f}}(t)$ (см. [3]) и

$$\langle x_{0i},\ x_{0j}\rangle_t=\langle\tilde{x}_i,\ \tilde{x}_j\rangle_t+\langle Q_{\tilde{f}_i},\ Q_{\tilde{f}_j}\rangle_t. \tag{11}$$

Так как

$$\langle Q_{\tilde{f}i}, Q_{\tilde{f}j} \rangle_t = \int_0^t \int_{y \in R_m} y_i y_j \Pi\left(u, x(u), dy\right) du, \quad i, j = 1, \ldots, m$$

с вер. 1, то достаточно найти $\langle x_{0i}, x_{0j} \rangle_t$. Заметим, что так как $x_0(t) \in \mathfrak{M}^{(m)}$, то с вер. 1:

$$E\left\{\left(x_{0i}(t) - x_{0i}(s)\right)\left(x_{0j}(t) - x_{0j}(s)\right) \mid \mathfrak{F}_s\right\} =$$

$$= E\left\{\sum_{s \leqslant t_k^{(n)} < t} \left(x_{0i}(t_{k+1}^{(n)}) - x_{0i}(t_k^{(n)})\right)\left(x_{0j}(t_{k+1}^{(n)}) - x_{0j}(t_k^{(n)})\right) \mid \mathfrak{F}_s\right\},$$

поэтому в силу условия (iii):

$$\Bigg| E\left\{\left(x_{0i}(t) - x_{0i}(s)\right)\left(x_{0j}(t) - x_{0j}(s)\right) \mid \mathfrak{F}_s\right\} -$$

$$- E\left\{\int_s^t a_{ij}\left(u, x(u)\right) du + \right.$$

$$\left. + \int_s^t \int_{y \in R_m} y_i y_j \Pi\left(u, x(u), dy\right) du \mid \mathfrak{F}_s\right\} \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant E\left\{\sum_{s \leqslant t_k^{(n)} < t} \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \left| a_{ij}\left(u, x(u)\right) - a_{ij}\left(t_k^{(n)}, x(t_k^{(n)})\right)\right| du + \right.$$

$$+ \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} \Bigg| \int_{y \in R_m} y_i y_j \Pi\left(u, x(u), dy\right) -$$

$$\left. - \int_{y \in R_m} y_i y_j \Pi\left(t_k^{(n)}, x(t_k^{(n)}), dy\right) \Bigg| du \mid \mathfrak{F}_s\right\} +$$

$$+ E\left\{\sum_{s \leqslant t_k^{(n)} < t} \left(1 + x^2(t_k^{(n)})\right) \times \Delta t_k^{(n)} f(\Delta t_k^{(n)}) \mid \mathfrak{F}_s\right\} =$$

$$= E\left\{\varphi_1 \mid \mathfrak{F}_s\right\} + E\left\{\varphi_2 \mid \mathfrak{F}_s\right\}.$$

В силу условия (v), так как это делалось Дубом ([1], теор. 3.3), можно показать, что φ_1 и φ_2 мажорируется интегрируемой функцией, так что можно переходить под знаком мат. ожидания к пределу, когда $n \to \infty$. Лемма доказана, а тем самым и теорема.

Автор благодарит Б. Григелиониса за руководство и внимание.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
28.III.1969

Литература

1. Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.
2. Б. Григелионис, О марковском свойстве случайных процессов, Лит. матем. сб., **VIII**, № 3 (1968), 489–502.
3. H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J., 30 (1967).
4. G. Maruyama, Continous Markov processes and stochastic equations, Rendiconti Circolo Math. Palermo, 4 (1955).

APIE STOCHASTINES LYGTIS

D. Surgailis

(Reziumė)

[2] darbo rezultatai gauti, esant sąlygoms, analogiškoms Dubo (žr. jo monografijos teoremą 3.3) sąlygoms tolydinio proceso atveju.

ON STOCHASTIC EQUATIONS

D. Surgailis

(Summary)

The results of [2] paper are proved under conditions similar to those of Doob for the case of continuous process (see th. 3.3 of his "Stochastic processes").