X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1970

УДК – 513.88:513.83+517.948

К ТЕОРИИ МНОГОЗНАЧНЫХ Φ_+-ОПЕРАТОРОВ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. I

Ю. Н. Владимирский

За последнее время появился ряд работ, посвященных теории фредгольмовских и „полуфредгольмовских" операторов в топологических линейных пространствах (см. библиографию в [8] и [9], см. также [10], [11]). Цель настоящей статьи – распространение ряда результатов на случай многозначных отображений, подобно тому, как это сделано Г. Нейбауэром в [2] и [3] для банаховых пространств*. Основное внимание в данной статье будет уделено рассмотрению ограниченных возмущений многозначных Φ_+-операторов** и доказательству соответствующих теорем устойчивости. В последующей статье мы надеемся рассмотреть вопросы, связанные с компактными возмущениями многозначных Φ_+-операторов.

§ 1. Буквами E, X, Y мы будем обозначать топологические линейные пространства. Запись $\varphi: X \to Y$ будет обозначать, что φ есть линейное (и однозначное, если не оговорено противное) отображение из X в Y; при этом через D_φ, N_φ, R_φ и Γ_φ будем обозначать область определения, пространство нулей, множество значений и график φ. Несколько слов по поводу определений. Многозначные Φ_+-операторы будут рассматриваться с несколько более общей точки зрения, чем у Г. Нейбауэра. Если точно следовать [2], то следует назвать многозначное линейное отображение*** $\varphi: X \to Y$ многозначным Φ_+-оператором, если Γ_φ замкнуто в $X \times Y$, R_φ замкнуто в Y, N_φ конечномерно и φ открыто. Понятие открытого отображения (в „многозначном" случае) рассматривалось Д. А. Райковым [6]. Оно состоит в следующем: для каждой окрестности нуля $U \subset X$ множество $\varphi U = \bigcup_{x \in U \cap D_\varphi} \varphi(x)$ есть окрестность нуля в R_φ. Заметим, что требование открытости φ равносильно следующему: сужение проектора P_Y (проектирующего $X \times Y$ на Y параллельно X) на Γ_φ дает открытое отображение. Данное выше определение многозначного Φ_+-оператора нехорошо тем, что оно „привязано" к осям координат, а точнее – к „оси X",

* Некоторые результаты из [2] и [3] были независимо получены В. И. Параской [15].

** Г Нейбауэр называет многозначные Φ_+ и Φ_--операторы „полуфредгольмовскими графиками"; мы будем следовать терминологии, принятой в [1].

*** По поводу определения и основных свойств многозначных линейных отображений см. [6].

потому что открытость $P_Y|_{\Gamma_\varphi}$ — все равно, что открытость сквозного отображения πi:

$$\begin{array}{ccc} X\times Y & \xrightarrow{\pi} & X\times Y/X \\ \uparrow{\scriptstyle i} & & \\ \Gamma_\varphi & & \end{array}$$

(где i — каноническое вложение, π — каноническое факторное отображение). Отметим еще, что замкнутость R_φ в Y равносильна замкнутости $\Gamma_\varphi+X$ в $X\times Y$; $N_\varphi=\Gamma_\varphi\cap X$; $\dim\ Y/R_\varphi=\dim\ (X\times Y)/(\Gamma_\varphi+X)$. На наш взгляд, естественнее рассматривать в E пару замкнутых подпространств Γ_1 и Γ_2 и говорить, что Γ_1 „находится в отношении Φ_+" к Γ_2 (условия этого будут даны ниже). Будем обозначать это так: $\Gamma_1\Phi_+\Gamma_2$. Тогда то, что $\varphi: X\to Y$ есть многозначный Φ_+-оператор, запишется так: $\Gamma_\varphi\Phi_+X$ (здесь X можно рассматривать как график нулевого оператора $0\ \ X\to Y$). Отметим, что такая точка зрения проводится в книге Като (см. [4], глава IV, § 4). В пользу такого более общего подхода говорит то, что нигде в последующем исключительная роль X, как подпространства в $X\times Y$, использоваться не будет (в частности, не используется то, что X имеет в $X\times Y$ топологическое прямое дополнение Y).

Условимся еще о некоторых обозначениях. Буквами Γ, Γ_1, Γ_2 будем обозначать замкнутые подпространства в E; буквами i, i_1, i_2 — канонические инъекции $i:\Gamma\to E$, $i_1\ \ \Gamma_1\to E$, $i_2:\Gamma_2\to E$; буквами π, π_1, π_2 — канонические факторные отображения $\pi: E\to E/\Gamma$, $\pi_1: E\to E/\Gamma_1$, $\pi_2: E\to E/\Gamma_2$. Если U — абсолютно выпуклая окрестность нуля в E, то через N_U будем обозначать ядро преднормы p_U. Говоря о размерности $\dim\ L$ векторного пространства L, мы не будем различать бесконечных размерностей. Через $L(X, Y)$ будем обозначать совокупность непрерывных и всюду определенных однозначных линейных отображений из X в Y.

Определение 1.1. Будем говорить, что $\Gamma_1\ O\ \Gamma_2$ („Γ_1 находится в отношении открытости с Γ_2"), если $\pi_2 i_1:\Gamma_1\to E/\Gamma_2$ открыто.

Замечание. Это определение обобщает понятие многозначного открытого отображения. В самом деле, пусть $\varphi: X\to Y$— многозначное линейное отображение. Тогда открытость φ равносильна тому, что $\Gamma_\varphi OX$ (в $X\times Y$).

Лемма 1.2. *Пусть U и V — окрестности нуля в E. Следующие утверждения равносильны:*

а) $\pi_2(U\cap\Gamma_1)\supset\pi_2 V\cap\pi_2\Gamma_1$;

б) $U\cap\Gamma_1+\Gamma_2\supset V\cap(\Gamma_1+\Gamma_2)$.

Если же вдобавок $\Gamma_1\cap\Gamma_2=0$, то а) *и* б) *равносильны утверждению*

в) $P\left(V\cap(\Gamma_1+\Gamma_2)\right)\subset U$,

где $P:\Gamma_1+\Gamma_2\to\Gamma_1+\Gamma_2$ — проектор с $R_P=\Gamma_1$ и $N_P=\Gamma_2$.

Следствие 1.3. *Пусть $\Gamma_1\cap\Gamma_2=0$. Тогда условие $\Gamma_1 O\Gamma_2$ равносильно тому, что проектор $P:\Gamma_1+\Gamma_2\to\Gamma_1+\Gamma_2$ с $R_P=\Gamma_1$ и $N_P=\Gamma_2$ непрерывен.*

Замечание. Пользуясь терминологией И. Ц. Гохберга и А. С. Маркуса из [5], можно охарактеризовать ситуацию следствия 1.3 (т.е. случай, когда $\Gamma_1\cap\Gamma_2=0$ и P непрерывен) так: „угол между подпространствами Γ_1 и Γ_2

положителен". Заметим еще, что из следствия 1.3 вытекает, что если $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0$, то из $\Gamma_1 O \Gamma_2$ следует, что $\Gamma_2 O \Gamma_1$. Оказывается, это верно и в общем случае.

Лемма 1.4. *Пусть U и V — окрестности нуля в E. Тогда если* $U \cap \Gamma_1 + \Gamma_2 \supset V \cap (\Gamma_1 + \Gamma_2)$, *то* $(U \cap V) \cap (\Gamma_1 + \Gamma_2) \subset (U + U) \cap \Gamma_2 + \Gamma_1$.

Предложение 1.5. Отношение O симметрично и рефлексивно, но, вообще говоря, не транзитивно.

Доказательство. Докажем симметричность. Пусть $\Gamma_1 O \Gamma_2$ и U — произвольная окрестность нуля в E. Возьмем окрестность нуля $U_1 \subset E$ такую, что $U_1 + U_1 \subset U$. По лемме 1.2 найдется окрестность нуля $V_1 \subset E$ такая, что $U_1 \cap \Gamma_1 + \Gamma_2 \supset V_1 \cap (\Gamma_1 + \Gamma_2)$ (потому что по условию $\pi_2 i_1$ открыто). Тогда по лемме 1.4

$$(U_1 \cap V_1) \cap (\Gamma_1 + \Gamma_2) \subset (U_1 + U_1) \cap \Gamma_2 + \Gamma_1 \subset U \cap \Gamma_2 + \Gamma_1.$$

Из леммы 1.2 заключаем, что $\pi_1 i_2$ открыто, что и требовалось. Рефлексивность O очевидна, ибо нулевое отображение открыто. Чтобы доказать последнее утверждение, рассмотрим следующий пример.

Пусть X, Y — бесконечномерные банаховы пространства, k $X \to Y$ — компактный оператор с $\dim R_k = \infty$. Будем рассматривать X, Y и Γ_k как подпространства в $X \times Y$. Так как k^{-1} открыто, то $\Gamma_k O Y$ (см. замечание к определению 1.1). Далее, YOX по следствию 1.3. Но если бы $\Gamma_k O X$, то это означало бы, что k открыто, чего не может быть ([7], гл. 1, § 2, теорема 3).

Примеры. Следствие 1.3 уже дает пример, когда пара подпространств находится в отношении O. Рассмотрим другие примеры. Пусть E — пространство Фреше. Тогда для того, чтобы $\Gamma_1 O \Gamma_2$, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma_1 + \Gamma_2$ было замкнуто в E. (Это следует из теоремы о замкнутом графике.)

Вот еще один пример. Будем говорить, что Γ_1 является конечномерным возмущением Γ_2, если $\dim \Gamma_1 / \Gamma_1 \cap \Gamma_2 < \infty$ (т.е. область значений отображения $\pi_2 i_1$ конечномерна). В этом случае также $\Gamma_1 O \Gamma_2$, поскольку из отделимости E/Γ_2 и конечномерности $\pi_2(\Gamma_1)$ следует, что $\pi_2 i_1$ открыто (см. [7], гл. 1, §2, следствие 2).

Укажем теперь одно применение введенных понятий.

Предложение 1.6. Пусть $\varphi : X \to Y$ открыто, X_1 — замкнутое подпространство в X. Для того, чтобы $\varphi|_{X_1}$ было открыто, достаточно, чтобы $X_1 O N_\varphi$. Это условие также и необходимо, если $\varphi \in L(X, Y)$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, "\psi"] & & Y \\
X_1 \arrow[u, dashed] & & X/N_\varphi \arrow[u, dashed, "\tilde{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

Здесь ψ — каноническое факторное отображение, $\tilde{\varphi}$ — инъективное открытое отображение, замыкающее диаграмму до коммутативной (при этом $D_{\tilde{\varphi}} = \psi(D_\varphi)$). Если ψj_1 открыто, то и φj_1 тоже; если же φ непрерывно и $D_\varphi = X$, то из открытости $\varphi j_1 = \tilde{\varphi}\psi j_1$ следует открытость ψj_1.

Замечание. Для выполнения условия $X_1 O N_\varphi$ предложения 1.6 достаточно, чтобы N_φ было конечномерным возмущением X_1 (т.е. $\dim N_\varphi / X_1 \cap N_\varphi < \infty$). В частности, это условие выполнено в каждом из 3-х следующих случаев:

$$X_1 \supset N_\varphi, \quad \dim N_\varphi < \infty, \quad \operatorname{codim} X_1 < \infty.$$

Применим теперь имеющиеся у нас сведения к доказательству одной теоремы о $\Phi_\pm$ — операторах.

Теорема 1.7. *Пусть (X, t), (Y, τ) — топологические линейные пространства, X_1 — замкнутое подпространство в X, причем $\dim X/X_1 < \infty$.*
Пусть $\varphi : X \to Y$, а $\varphi_1 = \varphi_{|X_1} : X_1 \to Y$ Тогда:*

а) *φ замкнуто тогда и только тогда, когда φ_1 замкнуто;*

б) *утверждения „φ открыто и R_φ замкнуто" и „φ_1 открыто и R_{φ_1} замкнуто" равносильны;*

в) *φ есть $\Phi_+ - (\Phi_-, \Phi)$-оператор в том и только том случае, когда φ_1 соответственно $\Phi_+ - (\Phi_-, \Phi)$-оператор. Если при этом $\dim D_\varphi / D_{\varphi_1} = n$, то $\operatorname{ind} \varphi = \operatorname{ind} \varphi_1 - n$.*

Доказательство. Так как $\Gamma_{\varphi_1} = \Gamma_\varphi \cap (X_1 \times Y)$, то из замкнутости Γ_φ следует замкнутость Γ_{φ_1}; а так как $\Gamma_\varphi / \Gamma_{\varphi_1}$ конечномерно, то из замкнутости Γ_{φ_1} следует замкнутость Γ_φ ([7], гл. 1, § 2, следствие 4). Пусть φ открыто и R_φ замкнуто. Так как $\operatorname{codim} X_1 < \infty$, то $N_\varphi + X_1$ замкнуто, откуда по лемме 2 в [10] $R_{\varphi_1} = \varphi\,(N_\varphi + X_1)$ замкнуто в R_φ и значит в Y. А в силу предложения 1.6.* φ_1 открыто. Пусть φ_1 открыто и R_{φ_1} замкнуто. Покажем, что φ открыто. Пусть $U \subset X$ — произвольная окрестность нуля. Возьмем окрестность нуля $V \subset X$ такую, что $V + V \subset U$. Так как

$$\varphi V \cap R_{\varphi_1} = \varphi V \cap \varphi\,(N_\varphi + X_1) = \varphi\Big(V \cap (N_\varphi + X_1)\Big) \supset \varphi\,(V \cap X_1)$$

и φ_1 открыто, то $\varphi V \cap R_{\varphi_1}$ — окрестность нуля в R_{φ_1}. А так как R_{φ_1} замкнуто в Y, то и подавно замкнуто в R_φ. Пусть N — алгебраическое прямое дополнение к R_{φ_1} в R_φ. Из замкнутости R_{φ_1} следует, что (N, τ) отделимо, и, следовательно, τ мажорирует $\varphi\,(t)$ на N ([7], гл. 1, § 2, следствие 2). Итак, $\varphi V \cap N$ — окрестность нуля в N. Следовательно, $\varphi V \cap R_{\varphi_1} + \varphi V \cap N$ — окрестность нуля в R_φ ([7], гл. 1, § 2, предложение 3), и подавно $\varphi U \cap R_\varphi$ — окрестность нуля. Таким образом, φ открыто. А так как $\dim R_\varphi / R_{\varphi_1} < \infty$, то R_φ замкнуто. Утверждения а) и б) доказаны. Заметим теперь, что N_φ и N_{φ_1} одновременно конечномерны или бесконечномерны; то же относится к паре Y/R_φ и Y/R_{φ_1}. Нам остается доказать формулу, связывающую индексы.

Пусть $\dim D_\varphi / D_{\varphi_1} = n$, и хотя бы одно из чисел $\dim N_\varphi$, $\operatorname{codim} R_\varphi$ конечно. Разобьем D_φ в алгебраическую прямую сумму: $D_\varphi = D_\varphi \cap (N_\varphi + X_1) \dot{+} N = D_\varphi \cap X_1 \dot{+} N_1 \dot{+} N$, где $N_1 \subset N_\varphi$ и $\dim (N_1 + N) = n$. Так как $N_{\varphi_1} = N_\varphi \cap X_1$, то $N_\varphi = N_{\varphi_1} \dot{+} N_1$ и $\dim N_\varphi = \dim N_{\varphi_1} + \dim N_1$. А так как $R_\varphi = R_{\varphi_1} \dot{+} \varphi\,(N)$ и $\varphi|_N$ инъективно, то $\operatorname{codim} R_\varphi = \operatorname{codim} R_{\varphi_1} - \dim N$. Итак, $\operatorname{codim} R_\varphi - \dim N_\varphi = \operatorname{codim} R_{\varphi_1} - \dim N - \dim N_{\varphi_1} - \dim N_1 = (\operatorname{codim} R_{\varphi_1} - \dim N_{\varphi_1}) - n$, что и требовалось.

* Т. е. φ_1 — это сужение φ на X_1.

Отметим, что в качестве следствия теоремы 1.7 можно получить теоремы 1 и 2 из [10]. Заметим еще, что предложение 1.6 допускает следующее обобщение.

Предложение 1.8. Если $\Gamma_1 O \Gamma_2$ и $\Gamma O(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$, то $(\Gamma_1 \cap \Gamma) O(\Gamma_2 \cap \Gamma)$.

Определение 1.9. Будем говорить, что $\Gamma_1 \Phi \Gamma_2$* ($\Gamma_1 \Phi_+ \Gamma_2$, $\Gamma_1 \Phi_- \Gamma_2$), если $\pi_2 i_1$ $\Phi-(\Phi_+, \Phi_-)$-оператор. При этом индексом ind (Γ_1, Γ_2) назовем ind $(\pi_2 i_1)$.

Выясним смысл этого определения. Для того, чтобы $\pi_2 i_1$ был Φ — оператором, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

а) $\pi_2 i_1$ открыто, б) $R_{\pi_2 i_1}$ замкнуто, в) $\dim N_{\pi_2 i_1} < \infty$, г) codim $R_{\pi_2 i_1} < \infty$. А эти условия равносильны следующим: а′) $\Gamma_1 O \Gamma_2$, б′) $\Gamma_1 + \Gamma_2$ замкнуто в E, в′) $\dim \Gamma_1 \cap \Gamma_2 < \infty$, г′) $\dim E/(\Gamma_1 + \Gamma_2) < \infty$. При этом $\mathrm{ind}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \dim E/(\Gamma_1 + \Gamma_2) - \dim \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Соответственно, для того, чтобы $\Gamma_1 \Phi_+ \Gamma_2$ ($\Gamma_1 \Phi_- \Gamma_2$), необходимо и достаточно выполнения условий а′, б′ и в′ (а′, б′ и г′).

Предложение 1.10. Отношения Φ, Φ_+ и Φ_- симметричны.

Лемма 1.11. (ср. с [2], 1.4.6). *Пусть* $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ *и* $\dim \Gamma_2/\Gamma_1 = n < \infty$. *Тогда* $\Gamma_1 \Phi_+ \Gamma$ ($\Gamma_1 \Phi_- \Gamma$) *в том и только том случае, когда* $\Gamma_2 \Phi_+ \Gamma$ ($\Gamma_2 \Phi_- \Gamma$). *При этом* ind $(\Gamma_1, \Gamma) = $ ind $(\Gamma_2, \Gamma) + n$.

Доказательство. Лемма следует из теоремы 1.7.

Замечание. В заключение параграфа рассмотрим один пример. Пусть X, Y — отделимые топологические линейные пространства, Γ — замкнутое подпространство в $X \times Y$. Как и всякое подпространство в $X \times Y$, Γ является графиком некоторого многозначного линейного отображения φ $X \to Y$. Необходимыми и достаточными условиями того, чтобы $\varphi \in L(X, Y)$, являются следующие: $\Gamma \Phi Y$, $\Gamma \cap Y = 0$, ind $(\Gamma, Y) = 0$ (иными словами, Γ должно быть топологическим прямым дополнением для Y в $X \times Y$). Действительно, однозначность φ означает, что $\Gamma \cap Y = 0$, непрерывность φ равносильна тому, что $\Gamma O Y$, а условие $D_\varphi = X$ равносильно тому, что $\Gamma + Y = X \times Y$.

§ 2. Перейдем к рассмотрению „ограниченных возмущений" подпространств топологического линейного пространства. Основные результаты этого параграфа будут относиться к локально выпуклым пространствам. Мы покажем, что если $\Gamma_2 \Phi_+ \Gamma$, а Γ_1 является ограниченным возмущением Γ_2, достаточно „близким" к Γ_2, то и $\Gamma_1 \Phi_+ \Gamma$ (теорема 2.15). Если же Γ_1 и Γ_2 являются ограниченными возмущениями друг друга и при этом „близки" (в смысле некоторого раствора), то вдобавок ind $(\Gamma_1, \Gamma) = $ ind (Γ_2, Γ) (теорема 2.18).

Определение 2.1. Будем говорить, что $\Gamma_1 B \Gamma_2$**, если $\pi_2 i_1$ ограничено.

Замечание. Чтобы подчеркнуть, что $\pi_2 i_1$ отображает в ограниченное множество именно окрестность нуля $U \cap \Gamma_1$, будем пользоваться обозначением $\Gamma_1 B_U \Gamma_2$.

Следующее предложение устанавливает связь введенного понятия с понятием ограниченного оператора.

---

* Т. е. Γ_1 находится в отношении Φ к Γ_2.

** Т. е. Γ_1 „находится в отношении B" к Γ_2. Заметим, что определение 2.1 и значительная часть утверждений § 2 сохраняют смысл и для незамкнутых подпространств.

Предложение 2.2. Пусть $\alpha \in L(X, Y)$. Тогда:

а) если α ограничено, то $\Gamma_{\varphi+\alpha} B\Gamma_\varphi$ для любого $\varphi : X \to Y$;

б) если существует $\varphi \in L(X, Y)$ такое, что $\Gamma_{\varphi+\alpha} B\Gamma_\varphi$, то α ограничено.

Доказательство. а) Пусть $\alpha(U)$ ограничено. Возьмем произвольную окрестность нуля $V \subset Y$. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\lambda \cdot \alpha(U) \subset V$ при $|\lambda| \leqslant \varepsilon$. Тогда при $x \in U \cap D_\varphi$ имеем:

$$\lambda \cdot \big(x, (\varphi+\alpha)x\big) = \lambda \cdot (x, \varphi x) + \lambda \cdot (0, \alpha x) \in \Gamma_\varphi + \{0\} \times V$$

при $|\lambda| \leqslant \varepsilon$, откуда $\Gamma_{\varphi+\alpha} B\Gamma_\varphi$. Обратно, пусть существует $\varphi \in L(X, Y)$ такой, что $\Gamma_{\varphi+\alpha} B\Gamma_\varphi$. Тогда найдутся окрестности нуля $U \subset X$, $V \subset Y$ такие, что для любой пары окрестностей $U_1 \subset X$, $V_1 \subset Y$ имеем: $U_1 \times V_1 + \Gamma_\varphi$ поглощает $(U \times V) \cap \Gamma_{\varphi+\alpha}$. Так как $\varphi+\alpha$ непрерывно, то найдется окрестность нуля $U_0 \subset U$ такая, что $(U_0 \times Y) \cap \Gamma_{\varphi+\alpha} \subset (U \times V) \cap \Gamma_{\varphi+\alpha}$. Покажем, что $\alpha(U_0)$ ограничено. Пусть $V_1 \subset Y$ — произвольная окрестность нуля, и пусть $V_2 \subset Y$ — окрестность нуля такая, что $V_2 + V_2 \subset V_1$. Возьмем уравновешенную окрестность нуля $\tilde{U} \subset X$ такую, что $\varphi \tilde{U} \subset V_2$. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при $|\lambda| < \varepsilon$, $x \in U_0$ имеем:

$$\lambda \cdot \big(x, (\varphi+\alpha)x\big) \in \tilde{U} \times V_1 + \Gamma_\varphi, \text{ откуда } \lambda \cdot (0, \alpha x) \in \tilde{U} \times V_1 + \Gamma_\varphi.$$

Это означает, что $\big(0, \lambda \cdot \alpha(x)\big) = (x', y') + (x'', \varphi x'')$, где $x' \in \tilde{U}$, $y' \in V_1$. Тогда $x'' \in \tilde{U}$, откуда $\varphi x'' \in V_2$ и $\lambda \cdot \alpha(x) \in V_2 + V_2 \subset V_1$. Итак, V_1 поглощает $\alpha(U_0)$, что и требовалось.

Аналогом теоремы об ограниченности суммы двух ограниченных операторов служит лемма.

Лемма 2.3. *Пусть* $\Gamma_1 B_{U_1} \Gamma_2$, $\Gamma_2 B_{U_2} \Gamma_3$. *И пусть* V — *уравновешенная окрестность нуля такая, что* $V + V \subset U_2$. *Тогда* $\Gamma_1 B_{U_1 \cap V} \Gamma_3$. *Если же* U_2 *абсолютно выпукла, то* $\Gamma_1 B_{U_1 \cap U_2} \Gamma_3$.

Доказательство. Пусть $U \subset E$ — произвольная окрестность нуля. Возьмем окрестность нуля $U' \subset E$ такую, что $U' + U' \subset U$. Так как $\Gamma_1 B_{U_1} \Gamma_2$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon \cdot (V \cap U_1) \cap \Gamma_1 \subset V \cap U' + \Gamma_2$. Отсюда следует, что $\varepsilon \cdot (V \cap U_1) \cap \Gamma_1 \subset V \cap U' + \Gamma_2 \cap U_2$. Так как $U' + \Gamma_3$ поглощает $\Gamma_2 \cap U_2$, то $U + \Gamma_3 \supset U' + U' + \Gamma_3$ поглощает $(V \cup U_1) \cap \Gamma_1$, что и требовалось. Аналогично рассматривается случай, когда U_2 абсолютно выпукла.

Предложение 2.4. Отношение B рефлексивно и транзитивно, но, вообще говоря, не симметрично.

Доказательство. Транзитивность следует из леммы 2.3, рефлексивность тривиальна. Если E — не нормируемо, то „$EB\{0\}$" неверно, но $\{0\}BE$ всегда.

Отметим без доказательства еще одно свойство отношения B.

Предложение 2.5. Пусть E — отделимо и локально выпукло. Если Γ_2 нормируемо (метризуемо) и $\Gamma_1 B\Gamma_2$, то Γ_1 тоже нормируемо (метризуемо).

Основным теоремам данного параграфа предпошлем несколько лемм. В качестве вспомогательного средства нам будет удобно воспользоваться понятием сети (см. [12]*, гл. 1, § 7 и [13], стр. 207).

---

* В [12] вместо термина „сеть" используется термин „обобщенная последовательность".

Лемма 2.6. *Пусть $(x_i)_{i\in I}$ — есть в E.*
Для того, чтобы сеть (x_i) сходилась к x, необходимо и достаточно, чтобы для всякой ее подсети (x_{i_j}) нашлась подсеть $(x_{i_{j_k}})$, сходящаяся к x.

Доказательство. Необходимость очевидна. Пусть теперь $x_i \not\to x$. Тогда найдется окрестность U точки x такая, что для всякого $i\in I$ найдется $i' \geqslant i$ такой, что $x_{i'} \notin U$. Выбирая для каждого $i\in I$ соответствующее i', получим отображение $\alpha : I \to I$ (где $\alpha(i)=i'$). Так как $\alpha(i) \geqslant i$ для всех $i\in I$, то $(x_{\alpha(i)})_{i\in I}$ — подсеть $(x_i)_{i\in I}$. Но так как $x_{\alpha(i)} \notin U$ для всех $i\in I$, то у $(x_{\alpha(i)})_{i\in I}$ не существует подсети, сходящейся к x.

Определение 2.7. Пусть (x_i) — сеть в E. Будем говорить, что $x_i \to x \pmod \Gamma$, если $\pi x_i \to \pi x$.

Лемма 2.8. *Пусть $(x_i)_{i\in I}$ — сеть в E. Для того, чтобы $x_i \to x \pmod \Gamma$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой ее подсети (x_{i_j}) нашлись подсеть $(x_{i_{j_k}})$ и сеть $(x_k) \subset \Gamma$ такие, что $x_{i_{j_k}} + x_k \to x$.*

Доказательство. Достаточность следует из леммы 2.6. Пусть теперь $x_i \to x \pmod \Gamma$. Достаточно показать, что найдутся подсеть (x_{i_j}) и сеть $(x_j) \subset \Gamma$ такие, что $x_{i_j} + x_j \to x$. Пусть $\mathcal{U}$ — фундаментальная система окрестностей нуля в E. Будем рассматривать $\mathcal{U}$ как множество, элементами которого являются окрестности U. Рассмотрим множество $I\times\mathcal{U}$ (направленное естественным образом). Каждому $j=(i, U) \in I\times\mathcal{U}$ сопоставим $\alpha(j) \in I$ такой, что $\alpha(j) \geqslant i$, и при $i' \geqslant \alpha(j)$ имеем: $x_{i'} \in x + U + \Gamma$ (это можно сделать, пользуясь тем, что $x_i \to x \pmod \Gamma$). Ясно, что $(x_{\alpha(j)})_{j\in I\times U}$ — подсеть $(x_i)_{i\in I}$. Теперь для каждого $j \in I\times\mathcal{U}$ выберем $x_j \in \Gamma$ такой, что $x_{\alpha(j)} + x_j \in x + U$. Тогда $x_{\alpha(j)} + x_j \to x$, что и требовалось.

Нам понадобятся еще следующие простые леммы.

Лемма 2.9. *Пусть U, V — абсолютно выпуклые окрестности нуля в E, причем U замкнута. И пусть $N_U \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0$. Тогда следующие условия равносильны:*

а) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0$ *и* $U \cap \Gamma_1 + \Gamma_2 \supset V \cap (\Gamma_1 + \Gamma_2)$;

б) *для любых* $x_1 \in \Gamma_1$, $x_2 \in \Gamma_2$ $p_V(x_1 + x_2) \geqslant p_U(x_1)$.

Лемма 2.10. *Пусть L — векторное пространство, M и N — его подпространства. Если $\dim L/M > \dim L/N$, то $\dim N/(M\cap N) > \dim M/(M \cap N)$.*

Лемма 2.11 (ср. с [2], 2.3.1). *Если $\Gamma_1 B_U \Gamma_2$ и $\pi(\Gamma_1 \cap U) \supset \pi(\Gamma_1) \cap \pi V$, то $(\Gamma_1 + \Gamma) B_V (\Gamma_2 + \Gamma)$. В частности, если $\Gamma_1 B \Gamma_2$ и $\Gamma_1 O \Gamma$, то $(\Gamma_1 + \Gamma) B (\Gamma_2 + \Gamma)$*.*

Теорема 2.12. *Пусть E — отделимо и локально выпукло, причем или E полно, или E/Γ_2 локально полно. Пусть U и V — абсолютно выпуклые окрестности нуля в E, причем U замкнута. И пусть выполнены условия:* а) $\Gamma_2 \Phi_+ \Gamma$, б) $\Gamma_2 \cap \Gamma = 0$, в) $\pi(\Gamma_2 \cap U) \supset \pi(\Gamma_2) \cap \pi V$, г) $\Gamma_1 B_U \Gamma_2$, д) $\pi_2(\Gamma_1 \cap U) \subset q\cdot\pi_2 W$, *где* $W = U \cap V$, $0 < q < \frac{1}{2}$. *Тогда:* а′) $\Gamma_1 \Phi_+ \Gamma$, б′) $\Gamma_1 \cap \Gamma = 0$, в′) $\pi(\Gamma_1 \cap U) \supset (1-2q)\pi(\Gamma_1) \cap \pi(V)$.

* Нам удобно не исключать и случаи, когда $\Gamma_1 + \Gamma$ или $\Gamma_2 + \Gamma$ незамкнуто (см. следствие 2.18).

Доказательство. Сначала докажем б′) и в′). Заметим, что $N_U \cap (\Gamma \cap \Gamma_1) = 0$. Действительно, так как $\pi_2(\Gamma_1 \cap N_U) = 0$, то $\Gamma_1 \cap N_U \subset \Gamma_2$, а $\Gamma_2 \cap \Gamma = 0$ по условию. Таким образом, можно применить лемму 2.9. Пусть $x_1 \in \Gamma_1$ и $x_2 \in \Gamma$ – произвольные элементы. Если $p_U(x_1) = 0$, то $p_V(x_1 + x_2) \geqslant (1-2q)\, p_U(x_1)$; если же $p_U(x_1) > 0$, то без ограничения общности можно считать, что $p_U(x_1) = 1$. Тогда из условия д) следует, что $x_1 = qx' + x''$, где $x' \in W$, $x'' \in \Gamma_2$. Следовательно, $p_V(x_1 + x_2) = p_V(qx' + x'' + x_2) \geqslant p_V(x'' + x_2) - p_V(qx')$. Но из условий б), в) и леммы 2.9 следует, что $p_V(x'' + x_2) \geqslant p_U(x'')$. А $p_U(x'') \geqslant p_U(x_1) - p_U(qx') = 1 - p_U(qx')$. Итак, $p_V(x_1 + x_2) \geqslant 1 - p_U(qx') - p_V(qx') \geqslant 1 - 2q$. Из леммы 2.9 следуют утверждения б′) и в′).

Теперь покажем, что $\Gamma_1 O \Gamma$. Пусть (x_i) – сеть в Γ_1 такая, что $x_i \to 0 \pmod{\Gamma}$. Из утверждений б′) и в′) следует, что $P_u(x_i) \to 0$. Тогда из условия г) получаем: $x_i \to 0 \pmod{\Gamma_2}$. Возьмем любую ее подсеть (x_{ij}). По лемме 2.8 найдутся подсеть $(x_{i_{jk}})$ и сеть $(x_k) \subset \Gamma$ такие, что $x_{i_{jk}} + x_k \to 0$. Но тогда $x_k \to 0 \pmod{\Gamma_2}$, и из условий а) и б) следует, что $x_k \to 0$, а, значит, и $x_{i_{jk}} \to 0$. Из леммы 2.6 следует, что $x_i \to 0$. Итак, $\Gamma_1 O \Gamma$.

Нам осталось показать, что $\Gamma_1 + \Gamma$ замкнуто в E. Если E полно, то замкнутость $\Gamma_1 + \Gamma$ следует из непрерывности проектора P (см. лемму 1.2) и замкнутости Γ_1 и Γ. Рассмотрим случай, когда E/Γ_2 локально полно. Покажем, что $\pi(\Gamma_1)$ замкнуто. Пусть (x_i) – сеть в Γ_1, и пусть $\pi x_i \to \pi x_0$. Так как πx_i – сеть Коши, то и x_i тоже (в силу того, что $\Gamma_1 O \Gamma$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma = 0$). А так как E/Γ_2 локально полно и $\Gamma_1 B \Gamma_2$, то $\pi_2 x_i \to \pi_2 x'$ для некоторого $x' \in E$. По лемме 2.8 найдутся подсеть (x_{i_j}) и сеть $(x_j) \subset \Gamma_2$ – такие, что $x_{i_j} x_j \to x'$. Тогда $\pi x_j \to \pi x' - \pi x_0$, а так как $\Gamma_2 \Phi_+ \Gamma$ и $\Gamma_2 \cap \Gamma = 0$, то $\pi x' - \pi x_0 \in \pi(\Gamma_2)$, причем сеть (x_j) сходится к некоторому x''. А тогда $x_{i_j} \to x' - x'' \in \Gamma_1$, откуда $\pi x_0 \in \pi(\Gamma_1)$, что и требовалось.

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо и для общих топологических линейных пространств. Однако в дальнейшем мы будем существенно пользоваться локальной выпуклостью E (именно, при рассмотрении случая, когда $\Gamma_2 \Phi_+ \Gamma$, но $\Gamma_2 \cap \Gamma \neq 0$, и при доказательстве устойчивости индекса). Поэтому приведем формулировку соответствующего утверждения без доказательства.

Теорема 2.12а. *Пусть E – отделимое, полное топологическое линейное пространство. Пусть U, U', V', V'', W – уравновешенные окрестности нуля в E, причем U замкнута и имеются соотношения: $U' + U' \subset U$, $V'' + V'' \subset V'$, $W = U' \cap V''$. И пусть выполнены условия: а) $\Gamma_2 \Phi_+ \Gamma$, б) $\Gamma_2 \cap \Gamma = 0$, в) $\pi(\Gamma_2 \cap U') \supset \pi(\Gamma_2) \cap \pi V'$, г) $\Gamma_1 B_U \Gamma_2$, д) $\pi_2(\Gamma_1 \cap U) \subset q \cdot \pi_2 W$, где $0 < q < 1$. Тогда: а′) $\Gamma_1 \Phi_+ \Gamma$, б′) $\Gamma_1 \cap \Gamma = 0$, в′) $\pi(\Gamma_1 \cap U) \supset \pi(\Gamma_1) \cap \pi W$.*

Следствие 2.13. *Пусть X, Y – отделимые локально выпуклые пространства, $\varphi \in L(X, Y)$, Γ – замкнутое подпространство в $X \times Y$, U и V – абсолютно выпуклые окрестности нуля в $X \times Y$, причем U замкнута. И пусть выполнены условия: $\Gamma_\varphi \cap U + Y \supset V$*, $\Gamma B_U \Gamma_\varphi$, $\Gamma \cap U \subset q \cdot W + \Gamma_\varphi$ (где $W = U \cap V$, $0 < q < 1/2$). Тогда Γ – график однозначного и непрерывного отображения $\psi : X \to Y$ (при этом, вообще говоря, $D_\psi \subsetneqq X$).*

* То, что $\Gamma_\varphi \cap U + Y$ – окрестность нуля в $X \times Y$, следует из того, что $\varphi \in L(X, Y)$ (см. замечание в конце § 1).

Доказательство. Как замечено в конце § 1, условие $\varphi \in L(X, Y)$ равносильно тому, что $\Gamma_\varphi \Phi Y$, $\Gamma_\varphi \cap Y = 0$ и $\operatorname{ind}(\Gamma_\varphi, Y) = 0$. Тогда по теореме 2.12 $\Gamma O Y$ и $\Gamma \cap Y = 0$, что и требовалось (полноту $X \times Y$ требовать не нужно: она использовалась в теореме 2.12 лишь при доказательстве замкнутости $\Gamma_1 + \Gamma$).

Перейдем к рассмотрению случая, когда $\Gamma_2 \Phi_+ \Gamma$ и $\Gamma_2 \cap \Gamma \neq 0$. Нам понадобится следующая лемма, являющаяся простым следствием леммы Ауэрбаха ([14], стр. 205).

Лемма 2.14. *Пусть E — локально выпукло, N — n-мерное подпространство в E. И пусть U — абсолютно выпуклая окрестность нуля в E. Найдется непрерывный проектор $P: E \to E$ с $R_p = N$ такой, что $p_U(P_x) \leqslant n \cdot p_U(x)$ для всех $x \in E$.*

Теорема 2.15. *Пусть E — отделимо и локально выпукло, причем или E полно, или E/Γ_2 локально полно. Пусть U и V — абсолютно выпуклые окрестности нуля в E, причем U замкнута. И пусть выполнены условия: а) $\Gamma_2 \Phi_+ \Gamma$, б) $\pi(\Gamma_2 \cap U) \supset \pi(\Gamma_2) \cap \pi V$, в) $\Gamma_1 B_U \Gamma_2$, г) $\pi_2(\Gamma_1 \cap U) \subset q \cdot \frac{1}{2n+1} \pi_2 W$ (где $W = U \cap V$, $0 < q < \frac{1}{2}$, $n = \dim \Gamma_2 \cap \Gamma$). Тогда $\Gamma_1 \Phi_+ \Gamma$ и $\dim \Gamma_1 \cap \Gamma \leqslant n$.*

Доказательство. Пользуясь леммой 2.14, выберем непрерывный проектор $P: E \to E$ с $R_P = \Gamma_2 \cap \Gamma$ такой, что $p_U(Px) \leqslant n \cdot p_U(x)$. Тогда $\Gamma = \Gamma_2 \cap \Gamma \dotplus \Gamma \cap N_P$. Обозначим $\Gamma \cap N_P = \tilde{\Gamma}$. Так как $\dim \Gamma/\tilde{\Gamma} = n < \infty$, то по лемме 1.11 $\Gamma_2 \Phi_+ \tilde{\Gamma}$, причем $\operatorname{ind}(\Gamma_2, \tilde{\Gamma}) = \operatorname{ind}(\Gamma_2, \Gamma) + n$ и $\Gamma_2 \cap \tilde{\Gamma} = 0$. Теперь заметим, что

$$(2n+1)\, U \cap \Gamma_2 + \tilde{\Gamma} \supset (\Gamma_2 + \tilde{\Gamma}) \cap W. \tag{1}$$

Действительно, пусть $x \in (\Gamma_2 + \tilde{\Gamma}) \cap W$. Тогда $x \in V \cap (\Gamma_2 + \Gamma) \subset U \cap \Gamma_2 + \Gamma$ (в силу условия б)). Поэтому $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in U \cap \Gamma_2$, $x_2 \in \Gamma$ и $p_U(x_2) \leqslant p_U(x) + p_U(x_1) \leqslant 2$. Но с другой стороны $x_2 = x' + x''$, где $x' \in \Gamma_2 \cap \Gamma$, $x'' \in \tilde{\Gamma}$. Следовательно, $p_U(x') \leqslant 2n$ и $x' \in 2nU \cap \Gamma_2$. Итак, $x = (x_1 + x') + x'' \in (2n+1)\, U \cap \Gamma_2 + \tilde{\Gamma}$, что и требовалось. По лемме 1.2 соотношение (1) можно переписать так:

$$\tilde{\pi}(U \cap \Gamma_2) \supset \tilde{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} W\right) \cap \tilde{\pi}\, \Gamma_2,$$

где $\tilde{\pi}: E \to E/\tilde{\Gamma}$ — каноническое факторное отображение. Поскольку

$$\left(\frac{1}{2n+1} W\right) \cap U = \frac{1}{2n+1} W,$$

то для тройки подпространств Γ_1, Γ_2 и $\tilde{\Gamma}$ и пары окрестностей U, $\frac{1}{2n+1} W$ выполнены все условия теоремы 2.12. Следовательно, $\Gamma_1 \Phi_+ \tilde{\Gamma}$, причем $\Gamma_1 \cap \tilde{\Gamma} = 0$. Применяя теперь лемму 1.11, получаем а′) и б′), что и требовалось.

Перейдем к исследованию устойчивости индекса. Нам понадобится обобщение на локально выпуклые пространства одного предложения М. Г. Крейна, М. А. Красносельского и Д. П. Мильмана о растворе подпространств банахового пространства (см., например, [1], теорема 1.1).

Теорема 2.16. *Пусть E — локально выпукло, U — абсолютно выпуклая окрестность нуля. И пусть выполнены условия: а)* $\Gamma_1 B_U \Gamma_2$, *б)* $\pi_2(U \cap \Gamma_1) \subset q \cdot \pi_2 U$ $(0 < q < 1)$. *Тогда* $\dim \Gamma_1 \leqslant \dim \Gamma_2$ *и* $\dim E / \Gamma_1 \geqslant \dim E / \Gamma_2$.

Доказательство. Докажем, что $\dim \Gamma_1 \leqslant \dim \Gamma_2$. Мы будем идти от противного. Докажем следующее утверждение.

Если $\Gamma_1 B_U \Gamma_2$ и $\dim \Gamma_1 > \dim \Gamma_2$, то $\pi_2(U \cap \Gamma_1) \not\subset q \cdot \pi_2 U$ при любом $0 < q < 1$.

Пусть π: $E \to E/N_U$ — каноническое факторное отображение. Так как $\Gamma_1 B_U \Gamma_2$, то $N_U \cap \Gamma_1 \subset \Gamma_2$, откуда $\dim N_U \cap \Gamma_1 \leqslant \dim \Gamma_2 < \infty$ и $\dim \pi(\Gamma_1) = \dim \Gamma_1 - \dim N_U \cap \Gamma_1 > \dim \Gamma_2 - \dim N_U \cap \Gamma_1 \geqslant \dim \Gamma_2 - \dim N_U \cap \Gamma_2 = \dim \pi(\Gamma_2)$. Рассматривая E/N_U как нормированное пространство (с нормой $\|\pi x\| = p_U(x)$), мы можем воспользоваться теоремой 1.1 из [1], на основании которой заключаем, что найдется $x \in \Gamma_1$ такой, что $\|\pi x\| = 1$ и $\inf\limits_{y \in \Gamma_2} \|\pi x - \pi y\| = 1$. Последние соотношения означают, что $p_U(x) = 1$ и $\inf\limits_{y \in \Gamma_2} p_U(x - y) = 1$. Отсюда следует, что при всяком $0 < q < 1$ $\pi_2(U \subset \Gamma_1) \not\subset q \cdot \pi_2 U$, что и требовалось.

Теперь докажем, что $\dim E/\Gamma_1 \geqslant \dim E/\Gamma_2$. Будем идти от противного. Докажем следующее утверждение.

Если $\Gamma_1 B_U \Gamma_2$ и $\dim E/\Gamma_1 < \dim E/\Gamma_2$, то $\pi_2(U \cap \Gamma_1) \not\subset q \cdot \pi_2 U$ при любом $0 < q < 1$.

Пусть $\pi: E \to E/\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ — каноническое факторное отображение. Из условия $\dim E/\Gamma_1 < \dim E/\Gamma_2$ следует, (по лемме 2.10), что $\dim \Gamma_1 / (\Gamma_1 \cap \Gamma_2) > \dim \Gamma_2 / (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$, а так как $\pi(\Gamma_1)$ можно отождествить с $\Gamma_1 / (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$, а $\pi(\Gamma_2)$ — с $\Gamma_2 / (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$, то $\dim \pi(\Gamma_1) > \dim \pi(\Gamma_2)$. Далее, по лемме 2 в [5] $\pi(\Gamma_1)$ и $\pi(\Gamma_2)$ замкнуты. Наконец, $\pi(\Gamma_1) B_{\pi(U)} \pi(\Gamma_2)$. Действительно, из $\Gamma_1 B_U \Gamma_2$ следует, что для любой окрестности нуля $V \subset E$ $\Gamma_2 + V$ поглощает $U \cap \Gamma_1$, откуда $\pi(\Gamma_2) + \pi V$ поглощает $\pi(U \cap \Gamma_1) = \pi U \cap \pi \Gamma_1$ (последнее равенство следует из $N_\pi \subset \Gamma_1$). Применяя утверждение, доказанное в первой части теоремы, получаем: $\pi U \cap \pi \Gamma_1 \not\subset q \cdot \pi U + \pi \Gamma_2$ при любом $0 < q < 1$. Но это соотношение равносильно такому: $\pi(U \cap \Gamma_1) \not\subset \pi(qU + \Gamma_2)$, а последнее равносильно следующему: $U \cap \Gamma_1 \not\subset qU + \Gamma$, что и требовалось.

Замечание. Условия теоремы 2.16 можно ослабить. Верно следующее утверждение.

Пусть (E, t_U) преднормированное пространство (с преднормой p_U), Γ_1 и Γ_2 — подпространства в E (не обязательно замкнутые). И пусть

$$\pi_2(U \cap \Gamma_1) \subset q \cdot \pi_2 U (0 < q < 1). \text{ Тогда:}$$

а) если $\Gamma_1 \cap N_U \subset \Gamma_2$, то $\dim \Gamma_1 \leqslant \dim \Gamma_2$;

б) если $\Gamma_1 \cap \overline{(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)} \subset \Gamma_2$, то $\dim \Gamma_1 \leqslant \dim \Gamma_2$ и $\dim E / \Gamma_1 \geqslant \dim E/\Gamma_2$ (здесь черта обозначает замыкание в (E, t_U)).

Следствие 2.17. *Если при сохранении всех условий теоремы* 2.12 *дополнительно потребовать, чтобы* $0 < q < \frac{1}{3}$, *то* $\dim E / (\Gamma_1 + \Gamma) \geqslant \dim E / (\Gamma_2 + \Gamma)$. *Если же вдобавок выполнены условия:* е) $\Gamma_2 B_U \Gamma_1$, ж) $\pi_1(\Gamma_2 \cap U) \subset q \cdot \pi_1 V$, *то* $\mathrm{ind}(\Gamma_1, \Gamma) = \mathrm{ind}(\Gamma_2, \Gamma)$.

Доказательство. Проверим, что для пары пространств $\Gamma_1+\Gamma$, $\Gamma_2+\Gamma$ и окрестности нуля V выполнены все условия теоремы 2.16. Так как $\Gamma_1\Phi_+\Gamma$ и $\Gamma_2\Phi_+\Gamma$, то $\Gamma_1+\Gamma$ и $\Gamma_2+\Gamma$ замкнуты в E. Из условия $\Gamma_1 B_U \Gamma_2$ и утверждения в′) теоремы 2.12 заключаем (по лемме 2.11), что $(\Gamma_1+\Gamma) B_V (\Gamma_2+\Gamma)$. Комбинируя утверждение в′) теоремы 2.12 с ее условием д), получаем:

$$V\cap(\Gamma_1+\Gamma)\subset\frac{1}{1-2q}(U\cap\Gamma_1)+\Gamma\subset\frac{q}{1-2q}W+\Gamma_2+\Gamma\subset$$
$$\subset\frac{q}{1-2q}V+\Gamma_2+\Gamma,\ \text{где}\ 0<\frac{q}{1-2q}<1,\ \text{ибо}\ 0<q<\frac{1}{3}.$$

На основании теоремы 2.16 заключаем, что $\dim E/(\Gamma_1+\Gamma)\geqslant\dim E/(\Gamma_2+\Gamma)$. Пусть теперь дополнительно выполнены условия е) и ж). Из условий в) и е) следует (по лемме 2.11), что $(\Gamma_2+\Gamma) B_V (\Gamma_1+\Gamma)$. А из условия ж) и условия в) следует, что $V\cap(\Gamma_2+\Gamma)\subset qV+\Gamma_1+\Gamma$. По теореме 2.16, $\dim E/(\Gamma_2+\Gamma)\geqslant \dim E/\Gamma_1+\Gamma$, и следовательно, $\operatorname{ind}(\Gamma_1,\Gamma)=\dim E/(\Gamma_1+\Gamma)=\dim E/(\Gamma_2+\Gamma)=\operatorname{ind}(\Gamma_2,\Gamma)$, что и требовалось.

Следствие 2.18. *Пусть X, Y — отделимые локально выпуклые пространства, $\varphi\in L(X,Y)$, Γ — замкнутое подпространство в $X\times Y$, U и V — абсолютно выпуклые окрестности нуля в $X\times Y$, причем U замкнуто. И пусть выполнены условия:* $\Gamma_\varphi\cap U+Y\supset V$, $\Gamma B_U\Gamma_\varphi$, $\Gamma\cap U\subset qW+\Gamma_\varphi$,

$$\left(\text{где}\ W=U\cap V,\ 0<q<\frac{1}{3}\right),\ \Gamma_\varphi B_U\Gamma,\ \Gamma_\varphi\cap U\subset qV+\Gamma.$$

Тогда Γ — график однозначного, непрерывного оператора $\psi: X\to Y$, причем D_ψ плотно в X. Если же Y полно, то $\psi\in L(X,Y)$.

Доказательство. Все утверждения, кроме двух последних, следуют из следствия 2.13. Рассуждая, как в доказательстве следствия 2.17, имеем:

$$\dim(X\times Y)/\overline{\Gamma+Y}\leqslant\dim(X\times Y)/(\Gamma_\varphi+Y)=0,$$

откуда $\Gamma+Y$ плотно в $X\times Y$, а, значит, D_ψ плотно в X. Если же Y полно, то из замкнутости Γ следует, что $D_\psi=X$.

Теорема 2.19 (ср. с предложением 3.3.1 в [2]). *Пусть E — отделимо и локально выпукло, причем или E полно, или E/Γ_2 локально полно. Пусть U и V — абсолютно выпуклые окрестности нуля в E, причем U замкнута. И пусть выполнены условия: а)* $\Gamma_2\Phi_+\Gamma$, *б)* $\pi(\Gamma_2\cap U)\supset\pi(\Gamma_2)\cap\pi V$, *в)* $\Gamma_1 B_U\Gamma_2$; *г)* $\pi_2(\Gamma_1\cap U)\subset q\cdot\frac{1}{2n+1}\pi_2 W$ (*где* $W=U\cap V$, $0<q<1/3$, $n=\dim\Gamma_2\cap\Gamma$); *д)* $\Gamma_2 B_U\Gamma_1$; *е)* $\pi_1(\Gamma_2\cap U)\subset q\cdot\frac{1}{2n+1}\pi_1 W$. Тогда $\Gamma_1\Phi_+\Gamma$, $\dim\Gamma_1\cap\Gamma\leqslant n$, $\operatorname{ind}(\Gamma_1,\Gamma)=\operatorname{ind}(\Gamma_2,\Gamma)$.

Доказательство. Поскольку выполнены все условия теоремы 2.15, то $\Gamma_1\Phi_+\Gamma$ и $\dim\Gamma_1\cap\Gamma\leqslant n$. Осталось доказать равенство индексов. Используя обозначения, примененные при доказательстве теоремы 2.15, можно (на основании леммы 1.11) записать: $\operatorname{ind}(\Gamma_1,\Gamma)=\operatorname{ind}(\Gamma_1,\tilde\Gamma)-n$ и $\operatorname{ind}(\Gamma_2,\tilde\Gamma)=\operatorname{ind}(\Gamma_2,\tilde\Gamma)-n$, Таким образом, достаточно показать, что $\operatorname{ind}(\Gamma_1,\tilde\Gamma)=\operatorname{ind}(\Gamma_2,\tilde\Gamma)$. Для этого достаточно проверить, что для тройки пространств Γ_1, Γ_2 и $\tilde\Gamma$ и пары окрестностей U, $\frac{1}{2n+1}W$ выполнены все условия следствия 2.17. Выполнение условий теоремы 2.12 уже проверялось при доказательстве теоремы 2.15; а условия е) и ж) следствия 2.17 – это условия д) и е) доказываемой теоремы. Теорема доказана.

Автор благодарит А. С. Маркуса и Д. А. Райкова за постановку задачи и внимание к работе.

Кострома

Поступило в редакцию 18.X.1968

Литература

1. И. Ц. Гохберг и М. Г Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, XII вып. 2 (74), (1957), 43–118.
2. G. Neubauer, Über den Index abgeschlossener Operatoren in Banachräumen. I, Math. Ann., 160, 2 (1965), 93–130.
3. G. Neubauer, Über den Index abgechlossener Operatoren in Banachräumen. II, Math. Ann., 162, 1 (1965), 92–119.
4. T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Berlin, 1966.
5. И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус, Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства, УМН, XIV, вып. 5 (89), (1959), 135–140.
6. Д. А. Райков, Двусторонняя теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств, Сибирский матем. журнал, VII, № 2 (1966), 353–372.
7. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, М., ИЛ, 1959.
8. А. С. Маркус и И. А. Фельдман, Об ограниченных операторах в локально выпуклых пространствах, Изв. Молдавск. филиала АН СССР, 10 (76), (1960), 71–78.
9. A. Pietsch, Homomorphismen in lokalkonvexen Vektorräumen, Math. Nachrichten, 22, 3–4 (1960), 162–174.
10. М. А. Гольдман, С. Н. Крачковский, О возмущениях гомоморфизмов операторами конечного ранга, ДАН, 174, № 4 (1967), 743–747.
11. Ю. Н. Владимирский, Φ_+-операторы в локально выпуклых пространствах, УМН, XXIII, № 3 (1968), 175–176.
12. Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы (общая теория). М., ИЛ, 1962.
13. М. Дэй. Нормированные линейные пространства, М., ИЛ, 1961.
14. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.
15. В. И. Параска, Об одной метрике в множестве замкнутых операторов и ее применениях в теории возмущений, Изв. АН Молд. ССР, 6 (1964), 91–96.

DAUGIAREIKŠMIŲ Φ_+-OPERATORIŲ TOPOLOGINĖSE TIESINĖSE ERDVĖSE TEORIJOS KLAUSIMU

J. Vladimirskis

(Reziumė)

G. Neibauerio teorema apie daugiareikšmio Φ_+-operatoriaus savybių stabilumą, esant pakankamai mažiems aprėžtiems sužadinimams, apibendrinama lokaliai iškilos erdvės atvejui.

ON THE THEORY OF SEMI-FREDHOLM GRAPHS IN TOPOLOGICAL LINEAR SPACES

J. Vladimirskij

(Summary)

G. Neubauer's theorem on the stability of properties of semi-Fredholm graphs is generalised to local convex spaces.