X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1970

УДК – 519.21

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ МНОГОМЕРНЫХ СТУПЕНЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Б. Григелионис

## Введение

Поток однородных случайных событий полностью описывается случайным процессом $X(t)$, являющимся числом случайных событий, происшедших в интервале времени $(0, t)$. Случайные процессы такого типа характеризуются тем, что приращения $X(t) - X(s)$, $s<t$, принимают лишь целые неотрицательные значения и $X(0)=0$. Их мы будем называть ступенчатыми. Если же рассматривается поток неоднородных случайных событий $N$ типов, то мы приходим к рассмотрению $N$-мерных ступенчатых случайных процессов $X(t)=$ $=\left(X^{(1)}(t), \ldots, X^{(N)}(t)\right)$, где компонента $X^{(k)}(t)$, $k=1, \ldots, N$ обозначает число случайных событий $k$-го типа, происшедших в интервале времени $(0, t)$.

В значительном большинстве работ по теории массового обслуживания и теории надежности предполагается, что входящий поток требований или поток отказов сложных систем является пуассоновским, т.е. что соответствующий случайный процесс $X(t)=\left(X^{(1)}(t), \ldots, X^{(N)}(t)\right)$ имеет независимые компоненты, которые имеют независимые приращения, распределенные по пуассоновскому закону. Теоретические выводы, основанные на этой предпосылке, во многих случаях хорошо согласуются с опытными данными. Попытка объяснить это явление впервые была предпринята К. Пальмом [1]. В предположении, что данный поток однородных случайных событий является суммой большого числа взаимно независимых потоков малой интенсивности, каждый из которых является стационарным и ординарным, А. Я. Хинчиным [2] и Г. А. Ососковым [3] найдены общие условия близости суммарного потока к пуассоновскому. Необходимые и достаточные условия сходимости сумм независимых бесконечно малых одномерных ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому получены автором в [4] (см. также [5]).

В настоящей работе аналогичные условия доказаны в многомерном случае. Некоторый многомерный аналог результата А. Я. Хинчина недавно был найден Э. Цинларом [6]. Общий критерий сходимости сумм многомерных ступенчатых случайных процессов к пуассоновским в § 2 настоящей статьи выводится из теорем о сходимости сумм целочисленных случайных мер к пуассоновским, полученных в § 1. Доказательство последних теорем было ранее намечено в работе автора [7].

В § 3 условия сходимости для сумм стационарных целочисленных случайных мер и сумм многомерных ступенчатых случайных процессов со стационарными приращениями к пуассоновским выражаются в терминах функций

Пальма—Хинчина. Условия сходимости сумм стационарных целочисленных случайных мер к стационарным целочисленным случайным мерам с безгранично делимыми конечномерными распределениями в терминах распределений Пальма, введенных Рыль-Нардзевским [8] и Сливняком [9], исследованы И. Керстаном и К. Маттесом в [10] — [12] (см. также [13]).

## § 1. Сходимость сумм целочисленных случайных мер

Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство, такое, что

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2,\quad \mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2,\quad \mathfrak{X}_2=[0,\ \infty)$$

и $\mathfrak{A}_2$ — $\sigma$-алгебра борелевских подмножеств $\mathfrak{X}_2$.

**Определение 1.** *Система случайных величин $Q(A)=Q(A,\ \omega)$, заданных при каждом $A\in\mathfrak{A}$ на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ \mathbf{P})$, называется целочисленной случайной мерой, если $Q(A)$ принимает лишь неотрицательные целые значения, $Q(\varnothing)=0$ и для любых непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k\in\mathfrak{A}$, $k\geqslant 1$, с вероятностью 1 (п. в.)*

$$Q\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}Q(A_k).$$

Мы далее будем предполагать, что при каждом конечном $t$

$$\mathbf{P}\left\{Q\left(\mathfrak{X}_1\times[0,\ t)\right)<\infty\right\}=1.$$

Случайную величину $Q\left(\Gamma\times[0,\ t)\right)$, $\Gamma\in\mathfrak{A}_1$, можно интерпретировать, как число маркированных случайных событий, происшедших в интервале времени $[0,\ t)$ с марками $x_1\in\Gamma$.

**Определение 2.** *Целочисленная случайная мера называется стационарной, если распределение вероятностей вектора*

$$\left(Q(\Gamma_1\times[t_{11}+t,\ t_{12}+t]),\qquad Q(\Gamma_m\times[t_{m1}+t,\ t_{m2}+t))\right)$$

*не зависит от $t$, $t>0$, при любых $m$, $\Gamma_k\in\mathfrak{A}_1$, $0\leqslant t_{k1}<t_{k2}$, $k=1,\ \ldots,\ m$.*

**Определение 3.** *Целочисленная случайная мера $Q$ называется пуассоновской, если для каждого фиксированного $t$ $\mathbf{M}\,Q(\mathfrak{X}_1\times[0,\ t))<\infty$ и для любого конечного набора непересекающихся множеств $A_k=\Gamma_k\times[t_{k1},\ t_{k2})$, $A_k\in\mathfrak{A}$, $k=1,\ \ldots,\ m$, случайные величины $Q(A_k)$, $k=1,\ \ldots,\ m$, взаимно независимы и имеют пуассоновское распределение.*

Очевидно, что $\lambda(A)=\mathbf{M}\,Q(A)$ является мерой на $\mathfrak{A}$. Пуассоновские меры мы будем обозначать $P_\lambda$.

Пусть

$$\lambda(\Gamma,\ t)=\lambda\left(\Gamma\times[0,\ t)\right),\quad \Gamma\in\mathfrak{A}_1.$$

Если $\lambda(\Gamma,\ t)=t\,\lambda(\Gamma)$, где $\lambda(\Gamma)$ — конечная мера на $\mathfrak{A}_1$, то мера $P_\lambda$ стационарна.

**Определение 4.** *Последовательность целочисленных случайных мер $Q_n$, $n\geqslant 1$, сходится к мере $Q$, если для любого конечного набора попарно непе-*

*ресекающихся множеств* $A_k=\Gamma_k\times[t_{k1}, t_{k2})$, $A_k\in\mathfrak{A}$, $k=1, \ldots, m$, *распределения вероятностей векторов* $\left(Q_n(A_1), \ldots, Q_n(A_m)\right)$, *слабо сходятся к распределению вероятностей вектора* $\left(Q(A_1), \ldots, Q(A_m)\right)$.

Далее мы будем рассматривать последовательность серий взаимно независимых в каждой серии целочисленных случайных мер $Q_{n1}, \ldots, Q_{nk_n}$ и пусть

$$Q_n(A)=\sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}(A), \quad A\in\mathfrak{A}.$$

Говорим, что случайные меры $Q_{nr}$, $r=1, \ldots, k_n$, *бесконечно малы*, если при каждом фиксированном $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1\times[0, t)\right)>0\right\}=0. \tag{1}$$

Имеет место следующий общий критерий сходимости мер $Q_n$ к пуассоновской мере.

**Теорема 1.** *Для сходимости сумм* $Q_n=\sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}$ *независимых бесконечно малых целочисленных случайных мер к пуассоновской мере* $P_\lambda$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* $t>0$ и $\Gamma\in\mathfrak{A}_1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\Gamma\times[0, t)\right)=1\right\}=\lambda(\Gamma, t) \tag{2}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1\times[0, t)\right)>1\right\}=0. \tag{3}$$

При доказательстве этого утверждения нам понадобится следующее неравенство.

**Лемма 1.** *Для любой целочисленной случайной меры* $Q$ *и для любых непересекающихся множеств* $A_1, A_2\in\mathfrak{A}$

$$|\mathbf{P}\{Q(A_1\cup A_2)=1\}-\mathbf{P}\{Q(A_1)=1\}-\mathbf{P}\{Q(A_2)=1\}|\leqslant$$
$$\leqslant 2\mathbf{P}\{Q(A_1\cup A_2)>1\}. \tag{4}$$

Доказательство. Используя элементарное свойство вероятности, что для любых событий $A$ и $B$

$$\mathbf{P}\{A\}+\mathbf{P}\{B\}=\mathbf{P}\{A\cup B\}+\mathbf{P}\{A\cap B\},$$

имеем, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{Q(A_1\cup A_2)=1\}-\mathbf{P}\{Q(A_1)=1\}-\mathbf{P}\{Q(A_2)=1\}=\\
&=\mathbf{P}\{Q(A_1\cup A_2)\geqslant 1\}-\mathbf{P}\{Q(A_1)\geqslant 1\}-\mathbf{P}\{Q(A_2)\geqslant 1\}-\\
&-\mathbf{P}\{Q(A_1\cup A_2)>1\}+\mathbf{P}\{Q(A_1)>1\}+\mathbf{P}\{Q(A_2)>1\}=\\
&=\mathbf{P}\{Q(A_1\cup A_2)\geqslant 1\}-\mathbf{P}\left\{\left(Q(A_1)\geqslant 1\right)\cup\left(Q(A_2)\geqslant 1\right)\right\}-\\
&-\mathbf{P}\left\{\left(Q(A_1)\geqslant 1\right)\cap\left(Q(A_2)\geqslant 1\right)\right\}-\mathbf{P}\{Q(A_1\cup A_2)>1\}+\\
&+\mathbf{P}\{Q(A_1)>1\}+\mathbf{P}\{Q(A_2)>1\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\left\{\left(Q(A_1)\geqslant 1\right)\cup\left(Q(A_2)\geqslant 1\right)\right\}=\mathbf{P}\left\{Q(A_1\cup A_2)\geqslant 1\right\}$$

и

$$\mathbf{P}\left\{\left(Q(A_1)\geqslant 1\right)\cap\left(Q(A_2)\geqslant 1\right)\right\}\leqslant\mathbf{P}\left\{Q(A_1\cup A_2)>1\right\},$$

то из (5) получаем, что

$$-2\mathbf{P}\left\{Q(A_1\cup A_2)>1\right\}\leqslant\mathbf{P}\left\{Q(A_1\cup A_2)=1\right\}-\mathbf{P}\left\{Q(A_1)=1\right\}-$$
$$-\mathbf{P}\left\{Q(A_2)=1\right\}\leqslant\mathbf{P}\left\{Q(A_1)>1\right\}+\mathbf{P}\left\{Q(A_2)>1\right\}\leqslant$$
$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{Q(A_1\cup A_2)>1\right\}.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. **Необходимость** условий (2) – (3) следует из известной теоремы Б. В. Гнеденко теории суммирования независимых бесконечно малых случайных величин (см. [14], стр. 141), поскольку необходимо, чтобы распределения $Q_n\left(\Gamma\times[0, t)\right)$ слабо сходились к закону Пуассона с параметром $\lambda(\Gamma, t)$.

Перейдем к доказательству достаточности условий (2) и (3).

Обозначим

$$l=(l_1, \ldots, l_m),$$

где $l_k$, $k=1, \ldots, m$, — неотрицательные целые числа,

$$0=(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m\text{ раз}}),\quad e_k=(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1\text{ раз}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-k\text{ раз}}),$$

$\alpha=\{A_k=\Gamma_k\times[t_{k1}, t_{k2}), k=1, \ldots, m\}$ — любой набор попарно непересекающихся множеств из $\mathfrak{A}$,

$$Q_{nr}(\alpha)=\left(Q_{nr}(A_1), \ldots, Q_{nr}(A_m)\right),$$

$$Q_n(\alpha)=\sum_{r=1}^{k_n}Q_{nr}(\alpha),$$

$$p_{nr}(l, \alpha)=\mathbf{P}\left\{Q_{nr}(\alpha)=l\right\},$$

$$f_{nr}(z, \alpha)=\mathbf{M}\exp\left\{i\left(z, Q_{nr}(\alpha)\right)\right\},$$

$$f_n(z, \alpha)=\mathbf{M}\exp\left\{i\left(z, Q_n(\alpha)\right)\right\},$$

где

$$z=(z_1, \ldots, z_m)$$

$$(z, l)=\sum_{k=1}^{m}z_k l_k.$$

Для доказательства слабой сходимости распределений векторов $Q_n(\alpha)$ к соответствующим пуассоновским, достаточно показать сходимость их характеристических функций (х.ф.) к х.ф. предельного распределения, т.е. показать, что при каждом $z\in R_m$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z, \alpha)=\prod_{k=1}^{m}\exp\left\{\lambda(A_k)(e^{iz_k}-1)\right\}. \tag{6}$$

В силу независимости мер $Q_{nr}$

$$f_n(z, \alpha) = \prod_{r=1}^{k_n} f_{nr}(z, \alpha). \tag{7}$$

Но,

$$f_{nr}(z, \alpha) = \sum_l p_{nr}(l, \alpha) e^{i(z, l)} = 1 + \sum_{l \neq 0} p_{nr}(l, \alpha)(e^{i(z, l)} - 1) =$$

$$= \exp\left\{\sum_{l \neq 0} p_{nr}(l, \alpha)(e^{i(z, l)} - 1) + O\left(\left(\sum_{l \neq 0} p_{nr}(l, \alpha)\right)^2\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=1}^{m} p_{nr}(e_k, \alpha)(e^{iz_k} - 1) + O\left(\sum_{\substack{l \neq 0,\ l_k \\ k=\overline{1, m}}} p_{nr}(l, \alpha) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{l \neq 0} p_{nr}(l, \alpha)\right)^2\right)\right\}, \tag{8}$$

где символ $\sum\limits_{l \in I}$ обозначает суммирование по всем $l \in I$.

Обозначим $t = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} t_{k2}$.

Тогда

$$\sum_{l \neq 0} p_{nr}(l, \alpha) = 1 - \mathbf{P}\{Q_{nr}(\alpha) = 0\} \leqslant 1 - \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0, t)\right) = 0\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0, t)\right) > 0\right\}, \tag{9}$$

$$\sum_{\substack{l \neq 0,\ e_k \\ k=\overline{1, nr}}} p_{nr}(l, \alpha) \leqslant \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0, t)\right) > 1\right\} \tag{10}$$

$$\sum_{l \neq 0} p_{nr}(l, \alpha) \leqslant \sum_{k=1}^{nr} p_{nr}(e_k, \alpha) + \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0, t)\right) > 1\right\}. \tag{11}$$

Далее имеем, что

$$0 \leqslant \mathbf{P}\{Q_{nr}(A_k) = 1\} - p_{nr}(e_k, \alpha) = \sum_{\substack{l \\ l_k = 1}} p_{nr}(l, \alpha) - p_{nr}(e_k, \alpha) =$$

$$= \sum_{\substack{l \neq e_k \\ l_k = 1}} p_{nr}(l, \alpha) \leqslant \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0, t)\right) > 1\right\}. \tag{12}$$

Из соотношений (8) – (12) получаем, что

$$f_{nr}(z, \alpha) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\{Q_{nr}(A_k) = 1\}(e^{iz_k} - 1) + \right.$$

$$+ O\left(\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0, t)\right) > 1\right\} + \right.$$

$$\left.\left. + \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0, t)\right) > 0\right\} \cdot \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\{Q_{nr}(A_k) = 1\}\right)\right\}. \tag{13}$$

Но поскольку

$$\Gamma_k \times [0,\ t_{k2}) = \left(\Gamma_k \times [0,\ t_{k1})\right) \cup A_k,$$

то по лемме 1

$$\left| \mathbf{P}\ \{ Q_{nr}(A_k) = 1 \} - \left(\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\Gamma_k \times [0,\ t_{k2})\right) = 1\right\} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\Gamma_k \times [0,\ t_{k1})\right) = 1\right\}\right)\right| \leqslant 2\,\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\Gamma_k \times [0,\ t_{k2})\right) > 1\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0,\ t)\right) > 1\right\}. \tag{14}$$

Из (7), (13) и (14) получаем, что

$$f_n(z,\ \alpha) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{k_n}\left[\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\Gamma_k \times [0,\ t_{k2})\right) = 1\right\} - \right.\right.$$

$$\left. - \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\Gamma_k \times [0,\ t_{k1})\right) = 1\right\}\right]\left(e^{iz_k} - 1\right) +$$

$$+ O\left(\max_{1 \leqslant r \leqslant k_n} \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0,\ t)\right) > 0\right\} \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\Gamma_k \times [0,\ t_{k2})\right) = \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. = 1\right\} + \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0,\ t)\right) > 1\right\}\right)\right\}.$$

Отсюда в силу (1)—(3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z,\ \alpha) = \sum_{k=1}^{m} \exp\left\{[\lambda(\Gamma_k,\ t_{k2}) - \lambda(\Gamma_k,\ t_{k1})]\left(e^{iz_k} - 1\right)\right\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \exp\left\{\lambda(A_k)\left(e^{iz_k} - 1\right)\right\},$$

так как $\lambda(\Gamma_k,\ t_{k2}) - \lambda(\Gamma_k,\ t_{k1}) = \lambda(A_k)$.

Таким образом равенство (6) и, тем самым, теорема 1 доказаны.

**Замечание 1.** Если выполнено условие (3) и соотношение (2) верно для попарно непересекающихся множеств $\Gamma_1, \quad \Gamma_m,\ \Gamma_k \in \mathfrak{A}_1,\ k=1, \quad m$, то оно верно и для множеств $\Gamma = \bigcup_k \Gamma_k$, где объединение берется по любому подмножеству $\{1,\ \ldots,\ m\}$.

Действительно, из леммы 1 имеем, что

$$\left| \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\bigcup_k \Gamma_k \times [0,\ t)\right) = 1\right\} - \sum_k \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\Gamma_k \times [0,\ t)\right) = 1\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2m\,\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0,\ t)\right) > 1\right\}, \tag{15}$$

откуда следует утверждение замечания 1.

Так как для стационарной меры $\lambda(\Gamma,\ t) = t\,\lambda(\Gamma)$, то из теоремы 1 получаем следующий критерий сходимости сумм $Q_n$ к стационарным пуассоновским мерам.

**Следствие 1.** *Для сходимости сумм* $Q_n=\sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}$ *независимых бесконечно малых целочисленных случайных мер к стационарной пуассоновской мере* $P_\lambda$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* $t>0$ *и* $\Gamma\in\mathfrak{A}_1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\Big(\Gamma\times[0,\ t)\Big)=1\right\}=t\lambda(\Gamma)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\Big(\mathfrak{X}_1\times[0,\ t)\Big)>1\right\}=0.$$

**Теорема 2.** *Если выполнены условия* (1) *и* (3), *то предельной мерой последовательности* $Q_n$, $n\geqslant 1$, *может быть лишь пуассоновская и класс предельных мер совпадает с классом всех пауссоновских мер.*

Доказательство. Пусть меры $Q_n$ сходятся к некоторой предельной мере $Q$. При условии (1) для слабой сходимости функции распределения случайной величины $Q_n\Big(\Gamma\times[0,\ t)\Big)$ необходимо (см. [14]), чтобы существовала конечная функция $\lambda(\Gamma,\ t)$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\Big(\Gamma\times[0,\ t)\Big)\geqslant 1\right\}=\lambda(\Gamma,\ t). \tag{16}$$

Поскольку

$$0\leqslant\sum_{r=1}^{k_n}\left[\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\Big(\Gamma\times[0,\ t)\Big)\geqslant 1\right\}-\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\Big(\Gamma\times[0,\ t)\Big)=1\right\}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\Big(\mathfrak{X}_1\times[0,\ t)\Big)>1\right\}, \tag{17}$$

то из (3) и (16) следует (2).

Тогда по теореме 1 предельная мера $Q=P_\lambda$, где мера $\lambda$ для множеств вида $A=\Gamma\times[t_1,\ t_2)$ задается равенством

$$\lambda(A)=\lambda(\Gamma,\ t_2)-\lambda(\Gamma,\ t_1).$$

Второе утверждение теоремы 2 очевидным образом следует из того, что сумма двух независимых пуассоновских мер $P_{\lambda_1}$ и $P_{\lambda_2}$ является пуассоновской мерой $P_{\lambda_1+\lambda_2}$. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим один частный случай, когда пространство $\mathfrak{X}_1$ содержит лишь конечное число элементов.

Пусть

$$\mathfrak{X}_1=\{x_1,\ \ldots,\ x_N\},$$

$$\tau_{nr}^{(j)}=\inf\left\{t:Q_{nr}\Big(\mathfrak{X}_1\times[0,\ t)\Big)\geqslant j\right\},\qquad j=1,\ 2,$$

$$\tau_{nr}^{(k,\,j)}=\inf\left\{t:Q_{nr}\Big(\{x_k\}\times[0,\ t)\Big)\geqslant j\right\},\qquad k=1,\ \ldots,\ N.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\{\tau_{nr}^{(1)} < t\} = \mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0,\ t)\right) > 0\right\},$$

то условие бесконечной малости мер $Q_{nr}$, $r=1, \ldots, k_n$, равносильно требованию, что при каждом фиксированном $t>0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} \mathbf{P}\{\tau_{nr}^{(1)} < t\} = 0. \tag{18}$$

Обозначим

$$\lambda_k(t) = \lambda(\{x_k\} \times [0, t)), \qquad k=1, \ldots, N.$$

**Теорема 3.** *При условии* (18) *для сходимости сумм независимых целочисленных случайных мер* $Q_n = \sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}$ *к пуассоновской мере* $P_\lambda$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* $t>0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\{\tau_{nr}^{(k,1)} < t\} = \lambda_k(t), \qquad k=1, \ldots, N, \tag{19}$$

*и*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\{\tau_{nr}^{(2)} < t\} = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Достаточно проверить выполнимость условий (2) и (3). Так как

$$\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1 \times [0,\ t)\right) > 1\right\} = \mathbf{P}\{\tau_{nr}^{(2)} < t\}, \tag{21}$$

то из (20) следует (3).

Далее, поскольку

$$\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\{x_k\} \times [0,\ t)\right) > 0\right\} = \mathbf{P}\{\tau_{nr}^{(k,1)} < t\},$$

то из (17) и (19)–(21) получаем, что (2) выполнено для множеств $\Gamma = \{x_k\}$, $k=1, \ldots, N$. Но отсюда, в силу замечания 1, следует выполнимость (2) для любых $\Gamma = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\} \subset \mathfrak{X}_1$. Теорема 3 доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{X}_2$ – произвольное топологическое пространство $\mathfrak{A}_2$ – $\sigma$-алгебра его борелевских подмножеств.

Множество $A \in \mathfrak{A}$ назовем *ограниченным*, если существует компактное множество $\Gamma_2 \in \mathfrak{A}_2$, такое, что $A \subset \mathfrak{X}_1 \times \Gamma_2$.

Рассмотрим целочисленные случайные меры $Q(A)$, заданные на $\sigma$-алгебре $\mathfrak{A} \doteq \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ и такие, что для каждого компактного множества $\Gamma_2 \in \mathfrak{A}_2$

$$\mathbf{P}\{Q(\mathfrak{X}_1 \times \Gamma_2) < \infty\} = 1.$$

Меру $Q$ назовем *пуассоновской*, если для каждого компактного множества $\Gamma_2 \in \mathfrak{A}_2$ $\mathbf{M}\, Q\{\mathfrak{X}_1 \times \Gamma_2) < \infty$ и для любого конечного набора ограниченных попарно непересекающихся множеств $A_k$, $A_k \in \mathfrak{A}$, $k=1, \ldots, m$, случайные величины $Q(A_k)$, $k=1, \ldots, m$, взаимно независимы и имеют пуассоновское распределение.

Будем говорить, что последовательность целочисленных случайных мер $Q_n$, $n \geqslant 1$, *сходится к мере* $Q$, если для любого конечного набора попарно непересекающихся ограниченных множеств $A_k$, $k=1, \ldots, m$, распределения вероятностей векторов $\left(Q_n(A_1), \quad Q_n(A_m)\right)$ слабо сходятся к распределению вероятностей вектора $\left(Q(A_1), \quad Q(A_m)\right)$.

Пусть целочисленные случайные меры $Q_{n1}, \quad Q_{nk_n}$ при каждом $n$ взаимно независимы и

$$Q_n = \sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}.$$

Если случайные меры $Q_{nr}$, $r=1, \ldots, k_n$, назвать *бесконечно малыми*, когда при каждом компактном множестве $\Gamma_2 \in \mathfrak{A}_2$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq r\leq k_n} \mathbf{P}\left\{ Q_{nr}(\mathfrak{X}_1 \times \Gamma_2) > 0 \right\} = 0, \tag{22}$$

то, с очевидными изменениями повторяя доказательства теорем 1 и 2, установим следующие утверждения.

**Теорема 1'.** *Для сходимости сумм* $Q_n = \sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}$ *независимых бесконечно малых целочисленных случайных мер к пуассоновской мере* $P_\lambda$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом ограниченном множестве* $A \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{ Q_{nr}(A) = 1 \right\} = \lambda(A) \tag{23}$$

*и при каждом компактном множестве* $\Gamma_2 \in \mathfrak{A}_2$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{ Q_{nr}(\mathfrak{X}_1 \times \Gamma_2) > 1 \right\} = 0. \tag{24}$$

**Теорема 2'.** *Если выполнены условия* (22) *и* (24), *то класс предельных мер для последовательностей* $Q_n = \sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}$, $n \geq 1$, *совпадает с классом всех пуассоновских мер.*

**Замечание 2.** При $\mathfrak{X}_1 = \varnothing$, $\mathfrak{X}_2 = R_m$ и $\lambda(A) = \lambda\mu(A)$, где $\lambda > 0$ — константа, $\mu$ — мера Лебега в $m$-мерном евклидовом пространстве $R_m$, из теоремы 1' вытекает один результат Дж. Гольдмана [15], полученный другим путем.

## § 2. О сходимости сумм многомерных ступенчатых случайных процессов

**Определение 5.** *Случайный процесс* $X(t) = \left(X^{(1)}(t), \ldots, X^{(N)}(t)\right)$, $t \geq 0$, *называется ступенчатым, если приращения* $X^{(k)}(t) - X^{(k)}(s)$, $k=1, \ldots, N$, $s < t$, *принимают лишь целые неотрицательные значения и* $\mathbf{P}\{X^{(k)}(0) = 0\} = 1$, $k=1, \ldots, N$.

**Определение 6.** *Ступенчатый случайный процесс* $X(t)$ *называется пуассоновским с ведущей функцией* $\lambda(t) = \left(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_N(t)\right)$, *если компоненты* $X^{(1)}(t), \ldots, X^{(N)}(t)$ *взаимно независимы и* $X^{(k)}(t)$ *является пуассоновским процессом со средним* $\mathbf{M}X^{(k)}(t) = \lambda_k(t)$, $k=1, \ldots, N$ (см. [16], [17]).

**Определение 7.** *Последовательность ступенчатых случайных процессов $X_n(t)$, $n \geqslant 1$, сходится к процессу $X(t)$, если любые конечномерные распределения процессов $X_n(t)$ слабо сходятся к соответствующим распределениям процесса $X(t)$.*

Пусть

$$X_n(t) = \sum_{r=1}^{k_n} X_{nr}(t),$$

где $X_{nr}(t)$, $r=1, \ldots, k_n$, — при каждом $n$ взаимно независимые $N$-мерные ступенчатые случайные процессы.

Говорим, что процессы $X_{nr}(t)$, $r=1, \ldots, k_n$, *бесконечно малы*, если при любом фиксированном $t>0$.

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{N} X_{nr}^{(k)}(t) > 0\right\} = 0. \tag{25}$$

Имеет место следующий критерий сходимости $X_n(t)$ к пуассоновским процессам.

**Теорема 4.** *Для сходимости сумм независимых бесконечно малых $N$-мерных ступенчатых случайных поцессов $X_n(t) = \sum_{r=1}^{k_n} X_{nr}(t)$ к пуассоновскому процессу с ведущей функцией $\lambda(t)$ необходимо и достаточно, чтобы при любом фиксированном $t>0$*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\{X_{nr}^{(k)}(t) > 0\} = \lambda_k(t), \qquad k=1, \ldots, N, \tag{26}$$

*и*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{N} X_{nr}^{(k)}(t) > 1\right\} = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Рассмотрим измеримое пространство $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$, где $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{X}_1 = \{x_1, \quad x_N\}$, $\mathfrak{X}_2 = [0, \infty)$, $\mathfrak{A}_1$ — система любых подмножеств $\mathfrak{X}_1$, а $\mathfrak{A}_2$ — $\sigma$-алгебра борелевских подмножеств $\mathfrak{X}_2$. Между целочисленными случайными мерами $Q$ на $\mathfrak{A}$, такими, что

$$\mathbf{P}\left\{Q\left(\mathfrak{X}_1 \times [0, t)\right) < \infty\right\} = 1$$

при каждом фиксированном $t>0$ и $\mathbf{P}\left\{Q(\mathfrak{X}_1 \times \{0\}) = 0\right\} = 1$, и $N$-мерными ступенчатыми процессами $X(t)$ равенствами

$$Q\left(\{x_k\} \times [0, t)\right) = X^{(k)}(t), \qquad k=1, \ldots, N,$$

устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Пусть $Q_{nr}$, $r=1, \ldots, k_n$, — целочисленные случайные меры, соответствующие процессам $X_{nr}(t)$, $r=1, \ldots, k_n$. Очевидно, что последовательность процессов $X_n(t) = \sum_{r=1}^{k_n} X_{nr}(t)$ сходится к пуассоновскому процессу с ведущей функцией $\lambda(t)$ тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность мер $Q_n=\sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}$, $n\geqslant 1$, сходится к пуассоновской мере $P_\lambda$, где мера $\lambda(A)$ задается равенствами

$$\lambda\left(\{x_k\}\times[0,\ t)\right)=\lambda_k(t), \qquad k=1,\ \ldots,\ N.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\,\{\tau_{nr}^{(1)}<t\}=\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1\times[0,\ t)\right)>0\right\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{N} X_{nr}^{(k)}(t)>0\right\},$$

$$\mathbf{P}\,\{\tau_{nr}^{(k,\ 1)}<t\}=\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\{x_k\}\times[0,\ t)\right)>0\right\}=\mathbf{P}\,\{X_{nr}^{(k)}(t)>0\}$$

$$\mathbf{P}\,\{\tau_{nr}^{(2)}<t\}=\mathbf{P}\left\{Q_{nr}\left(\mathfrak{X}_1\times[0,\ t)\right)>1\right\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{N} X_{nr}^{(k)}(t)>0\right\},$$

то утверждение теоремы 4 следует из теоремы 3.

Из доказательства теоремы 4 и теоремы 2 немедленно получаем такое утверждение.

**Теорема 5.** *Если выполнены условия* (25) *и* (27), *то класс предельных процессов для сумм* $X_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n} X_{nr}(t)$ *совпадает с классом всех N-мерных пуассоновских процессов.*

В качестве примера рассмотрим случай, когда $N=1$ и $X_{nr}(t)$ являются процессами восстановления, т. е. такими ступенчатыми случайными процессами, для которых расстояния $\tilde{\tau}_{nr}^{(k)}$ между $k-1$-тым и $k$-тым единичными скачками независимы между собой ($\tilde{\tau}_{nr}^{(1)}$ – расстояние от 0 до первого скачка).

Обозначим

$$\hat{F}_{nr}(t)=\mathbf{P}\,\{\tilde{\tau}_{nr}^{(1)}<t\},\quad F_{nr}(t)=\mathbf{P}\,\{\tilde{\tau}_{nr}^{(2)}<t\}.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\,\{X_{nr}(t)>0\}=\mathbf{P}\,\{\tilde{\tau}_{nr}^{(1)}<t\}=\hat{F}_{nr}(t)$$

и

$$\mathbf{P}\,\{X_{nr}(t)>1\}=\mathbf{P}\,\{\tilde{\tau}_{nr}^{(1)}+\tilde{\tau}_{nr}^{(2)}<t\}=\hat{F}_{nr}(t)*F_{nr}(t),$$

где символ * обозначает свертку функций распределения, то из теорем 4 и 5 следует такое утверждение.

**Следствие 2.** *При условии, что*

$$\lim_{n\to\infty}\ \max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\hat{F}_{nr}(t)=0$$

*для каждого фиксированного* $t>0$, *для сходимости сумм независимых процессов восстановления* $X_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n} X_{nr}(t)$ *к пуассоновскому процессу с ведущей функцией* $\lambda(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\hat{F}_{nr}(t)=\lambda(t) \tag{29}$$

*и*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \hat{F}_{nr}(t) * F_{nr}(t) = 0. \tag{30}$$

*Если при каждом фиксированном* $t>0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} \hat{F}_{nr}(t) = \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} F_{nr}(t) = 0, \tag{31}$$

*то предельным процессом может быть лишь пуассоновский.*

Доказательство. В силу теоремы 5 мы должны показать, что если выполнено (31) и $X_n(t)$ сходится к некоторому предельному процессу $X(t)$, то выполняется (30). Но если распределение вероятностей $X_n(t)$ слабо сходится к некоторому предельному, то должна существовать конечная функция $\bar{\lambda}(t)$, такая, что (см. [14])

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\{X_{nr}(t)>0\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \hat{F}_{nr}(t) = \bar{\lambda}(t). \tag{32}$$

Поскольку

$$\hat{F}_{nr}(t) * F_{nr}(t) = \int_0^t \hat{F}_{nr}(t-s)\, dF_{nr}(s) \leqslant \hat{F}_{nr}(t) F_{nr}(t),$$

то из (31) и (32) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \hat{F}_{nr}(t) * F_{nr}(t) \leqslant \bar{\lambda}(t) \cdot \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} F_{nr}(t) = 0.$$

Следствие 2 доказано.

**Замечание 3.** Условия сходимости сумм процессов восстановления к пуассоновским изучались в работах [18]–[20], [5]. Отметим еще, что некоторые условия сходимости сумм марковских процессов восстановления (определение см. в [21]) к пуассоновскому получены в работе [6], а общий случай исследован И. Сапаговасом в [22] и [23].

## § 3. Предельные теоремы для сумм многомерных ступенчатых случайных процессов со стационарными приращениями

Рассмотрим ступенчатые случайные процессы $X(t) = \left(X^{(1)}(t), \ldots, X^{(N)}(t)\right)$, $t\geqslant 0$, имеющие стационарные приращения, т. е. для любых $m$, $0\leqslant t_0 < t_1 < \quad < t_m$ и $t>0$ распределение вероятностей приращений $X(t_k+t) - X(t_{k-1}+t)$, $k=1, \ldots, N$, не зависит от $t$.

Обозначим

$$\bar{X}(t) = \sum_{k=1}^{N} X^{(k)}(t).$$

Если ступенчатый случайный процесс $X(t)$ имеет стационарные приращения, то, очевидно, что тогда одномерные ступенчатые случайные процессы $\bar{X}(t)$, $X^{(k)}(t)$, $k=1, \ldots, N$, также будут иметь стационарные приращения.

**Определение 8.** *Многомерный ступенчатый процесс $X(t)$ называется ординарным, если*

$$\lim_{t\to 0+} t^{-1}\mathbf{P}\ \{\ \bar{X}(t)>1\ \}=0.$$

Поскольку для всех $k=1, \qquad N$

$$\mathbf{P}\ \{\ X^{(k)}(t)>1\}\leqslant \mathbf{P}\ \{\ \bar{X}(t)>1\},$$

то из однородности процесса $X(t)$ следует ординарность его компонент.

Известно (см. [2]), что для любого одномерного ординарного ступенчатого случайного процесса со стационарными приращениями $X(t)$ существует предел

$$\lambda=\lim_{t\to 0+} t^{-1}\mathbf{P}\ \{\ X(t)>0\ \}, \tag{33}$$

называемый *параметром*, и $\lambda=\mathbf{M}\,X(1)$.

Если, кроме того, $\lambda<\infty$, то существуют пределы

$$\varphi(j,\ t)=\lim_{s\to 0+}\mathbf{P}\ \{\ X(t+s)-X(s)=j\mid X(s)>0\ \},\qquad j=0,\ 1, \tag{34}$$

называемые *функциями Пальма—Хинчина*, и имеют место равенства (*формулы Пальма—Хинчина*):

$$\mathbf{P}\ \{\ X(t)=0\ \}=1-\lambda\int_0^t \varphi\ (0,\ u)\ du \tag{35}$$

и

$$\mathbf{P}\ \{\ X(t)=j\ \}=\lambda\int_0^t\Big(\varphi(j-1,u)-\varphi(j,u)\Big)du,\qquad j=1,\ 2, \tag{36}$$

Пусть $X(t)=\Big(X^{(1)}(t), \qquad X^{(N)}(t)\Big)$ — многомерный ординарный ступенчатый случайный процесс со стационарными приращениями. Обозначим $\lambda^{(1)}, \qquad \lambda^{(N)}$ и $\bar{\lambda}=\sum\limits_{k=1}^{N}\lambda^{(k)}$ параметры процессов $X^{(1)}(t),\ \ldots,\ X^{(N)}(t)$ и $\bar{X}(t)$, соответственно, и предположим, что $\bar{\lambda}<\infty$. Пусть $\varphi^{(1)}(j,\ t),\ldots,\varphi^{(N)}(j,\ t)$ и $\bar{\varphi}\ (j,\ t)$, $j=0,\ 1,\ \ldots,$ — функции Пальма—Хинчина процессов $X^{(1)}\ (t),\ \ldots,$ $X^{(N)}(t)$ и $X\ (t)$, соответственно. Вектор $\lambda=(\lambda^{(1)},\ \ldots,\ \lambda^{(N)})$ назовем *параметром* процесса $X(t)$.

Далее нам понадобится следующее неравенство.

**Лемма 2.** *Для всех $k=1, \qquad N$ и $t\geqslant 0$*

$$1-\bar{\varphi}(0,\ t)\geqslant\frac{\lambda^{(k)}}{\bar{\lambda}}\Big(1-\varphi^{(k)}(0,\ t)\Big). \tag{37}$$

Доказательство. Имеем

$$1-\tilde{\varphi}(0,\ t)=\lim_{s\to 0+}\mathbf{P}\ \{\ \tilde{X}(t+s)-\tilde{X}(s)>0\ |\ \tilde{X}(s)>0\ \}=$$

$$=\lim_{s\to 0+}\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left(X^{(k)}(t+s)-X^{(k)}(s)\right)>0\ \Big|\ \sum_{k=1}^{N}X^{(k)}(s)>0\right\}=$$

$$=\lim_{s\to 0+}\frac{\mathbf{P}\left\{\sum\limits_{k=1}^{N}\left(X^{(k)}(t+s)-X^{(k)}(s)\right)>0,\ \sum\limits_{k=1}^{N}X^{(k)}(s)>0\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sum\limits_{k=1}^{N}X^{(k)}(s)>0\right\}}\geqslant$$

$$\geqslant\lim_{s\to 0+}\frac{\mathbf{P}\ \{\ X^{(k)}(t+s)-X^{(k)}(s)>0,\quad X^{(k)}(s)>0\ \}}{\mathbf{P}\ \{\ \tilde{X}(s)>0\ \}}=$$

$$=\lim_{s\to 0+}\frac{\mathbf{P}\ \{\ X^{(k)}(s)>0\ \}}{\mathbf{P}\ \{\ \tilde{X}(s)>0\ \}}\cdot\lim_{s\to 0+}\mathbf{P}\ \{\ X^{(k)}(t+s)-X^{(k)}(s)>0\ |\ X^{(k)}(s)>0\ \}=$$

$$=\frac{\lambda^{(k)}}{\tilde{\lambda}}\left(1-\varphi^{(k)}(0,\ t)\right).$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим далее последовательность серий взаимно независимых в каждой серии многомерных ординарных ступенчатых случайных процессов со стационарными приращениями

$$X_{nr}(t)=\left(X_{nr}^{(1)}(t),\ \ldots,\ X_{nr}^{(N)}(t)\right),\qquad r=1,\ \ldots,\ k_n,$$

и обозначим

$$X_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}X_{nr}(t).$$

Пусть

$$\tilde{\lambda}_{nr},\ \tilde{\varphi}_{nr}(j,\ t),\ \lambda_{nr}^{(k)},\ \varphi_{nr}^{(k)}(j,\ t),\qquad k=1,\qquad N,\ j\geqslant 0,\ -$$

параметры и функции Пальма – Хинчина процессов

$$\tilde{X}_{nr}(t),\ X_{nr}^{(k)}(t),\qquad k=1,\ \ldots,\ N,$$

соответственно.

Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\tilde{\lambda}_{nr}=0. \tag{38}$$

**Теорема 6.** *При условии* (38) *для сходимости сумм*

$$X_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}X_{nr}(t)$$

*к пуассоновскому процессу с параметром* $\lambda=(\lambda^{(1)},\ \ldots,\ \lambda^{(N)})$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}^{(k)}\int_0^t\varphi_{nr}^{(k)}(0,\ u)\,du=\lambda^{(k)}t,\qquad k=1,\ \ldots,\ N, \tag{39}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\bar{\lambda}_{nr}\int_0^t\bar{\varphi}_{nr}(1,\ u)\,du=0. \tag{40}$$

Доказательство. Поскольку

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{N}X_{nr}^{(k)}(t)>0\right\}=\mathbf{P}\left\{\tilde{X}_{nr}(t)>0\right\}\leqslant\mathbf{M}\tilde{X}_{nr}(t)=\bar{\lambda}_{nr}t,$$

то при условии (38)

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\mathbf{P}\left\{\sum_{r=1}^{k_n}X_{nr}^{(k)}(t)>0\right\}=0,$$

т.е. слагаемые процессы $X_{nr}(t)$, $r=1,\ \ldots,\ k_n$, бесконечно малы.

Далее в силу формул (35)–(36) имеем, что

$$\mathbf{P}\left\{X_{nr}^{(k)}(t)>0\right\}=1-\mathbf{P}\left\{X_{nr}^{(k)}(t)=0\right\}=\lambda_{nr}^{(k)}\int_0^t\varphi_{nr}^{(k)}(0,\ u)\,du \tag{41}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{N}X_{nr}^{(k)}(t)>1\right\}=\mathbf{P}\left\{\tilde{X}_{nr}(t)>1\right\}=1-\mathbf{P}\left\{\tilde{X}_{nr}(t)=0\right\}-$$

$$-\mathbf{P}\left\{\tilde{X}_{nr}(t)=1\right\}=\bar{\lambda}_{nr}\int_0^t\bar{\varphi}_{nr}(1,\ u)\,du. \tag{42}$$

Из соотношений (39)–(42) следуют соотношения (26)–(27) при $\lambda_k(t)=\lambda^{(k)}t$. Верно и обратное. Таким образом утверждение теоремы 6 доказано.

Предположим теперь, что существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}^{(k)}=\lambda^{(k)},\qquad k=1,\ \ldots,\ N, \tag{43}$$

и обозначим

$$\bar{\lambda}=\sum_{k=1}^{N}\lambda^{(k)}.$$

**Следствие 3.** *При условиях* (38) *и* (43) *для сходимости сумм*

$$X_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}X_{nr}(t)$$

*к пуассоновскому процессу с параметром* $\lambda=(\lambda^{(1)},\ \ldots,\ \lambda^{(N)})$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}^{(k)}\varphi_{nr}^{(k)}(0,\ t)=\lambda^{(k)},\qquad k=1,\qquad N, \tag{44}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\bar{\lambda}_{nr}\bar{\varphi}_{nr}(0,\ t)=\bar{\lambda}. \tag{45}$$

Доказательство. Сначала покажем, что при условии (43) соотношения (44)–(45) эквивалентны требованиям, что при каждом фиксированном $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}^{(k)}\int_0^t \varphi_{nr}^{(k)}(0,\ u)\,du=\lambda^{(k)}t,\qquad k=1,\ \ldots,\ N,\tag{46}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\tilde\lambda_{nr}\int_0^t \varphi_{nr}^{(k)}(0,\ u)\,du=\tilde\lambda\, t.\tag{47}$$

Из (44) и (45) равенства (46) и (47) следуют тривиально. Докажем обратное. Заметим, что из (43) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\tilde\lambda_{nr}=\sum_{k=1}^{N}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}^{(k)}\right)=\tilde\lambda.\tag{48}$$

Из (43) и (46)–(48) получаем, что при каждом фиксированном $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}^{(k)}\int_0^t\left(1-\varphi_{nr}^{(k)}(0,\ u)\right)du=0,\qquad k=1,\qquad N,\tag{49}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\tilde\lambda_{nr}\int_0^t\left(1-\varphi_{nr}(0,\ u)\right)\,du=0.\tag{50}$$

Так как подынтегральные функции в (49) и (50) неотрицательны, то отсюда следует, что для почти всех $t$ по мере Лебега

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}^{(k)}\left(1-\varphi_{nr}^{(k)}(0,\ t)\right)=0,\qquad k=1,\ \ldots,\ N,\tag{51}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\tilde\lambda_{nr}\left(1-\varphi_{nr}(0,\ t)\right)=0.\tag{52}$$

Но функции $1-\varphi_{nr}^{(k)}(0,\ t)$, $k=1,\ldots,\ N$, и $1-\tilde\varphi_{nr}(0,\ t)$ являются монотонно возрастающими по $t$, поэтому (51) и (52) имеют место для всех фиксированных $t>0$. В силу (43) и (48) из (51)–(52) следуют (44)–(45).

Далее

$$\begin{aligned}\tilde\varphi_{nr}(1,\ t)&=\lim_{s\to0+}\mathbf{P}\ \{\tilde X_{nr}(t+s)-\tilde X_{nr}(s)=1\mid \tilde X_{nr}(s)>0\}\leqslant\\ &\leqslant\lim_{s\to0+}\mathbf{P}\ \{\tilde X_{nr}(t+s)-\tilde X_{nr}(s)>0\mid \tilde X_{nr}(s)>0\}=1-\\ &-\lim_{s\to0+}\mathbf{P}\ \{\tilde X_{nr}(t+s)-\tilde X_{nr}(s)=0\mid \tilde X_{nr}(s)>0\}=1-\tilde\varphi_{nr}(0,\ t).\end{aligned}\tag{53}$$

Из соотношений (50) и (53) имеем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\tilde\lambda_{nr}\int_0^t\tilde\varphi_{nr}(1,\ u)\,du\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\tilde\lambda_{nr}\int_0^t\left(1-\tilde\varphi_{nr}(0,\ u)\right)du=0,$$

т. е. из условий (43)–(45) вытекают условия (39)–(40). Следствие 3 доказано.

**Замечание 4.** При $N=1$ из следствия 3 вытекают результаты К. Пальма [1], А. Я. Хинчина [2] и Г. А. Ососкова [3]. Э. Цинларом [6] утверждение следствия 3 элементарными рассуждениями, аналогичными рассуждениям, примененным в одномерном случае в работе [2], было получено при условиях, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le r\le k_n}\bar{\lambda}_{nr}=0, \qquad \sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}^{(k)}$$

$$\frac{\lambda_{nr}^{(k)}}{\bar{\lambda}_{nr}}, \quad k=1, \ \dots, \ N,$$

не зависят от $n$ и $r$ и для каждого фиксированного $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\min_{1\le r\le k_n}\tilde{\varphi}_{nr}(0, \ t)=1. \tag{54}$$

Этот результат вытекает из следующего утверждения.

**Следствие 4.** *При условиях* (38), (43) *и* (54), *если*

$$\min_{1\le r\le k_n}\frac{\lambda_{nr}^{(k)}}{\bar{\lambda}_{nr}}\geqslant\gamma_k>0, \qquad k=1, \qquad N, \tag{55}$$

*где константы* $\gamma_k$, $k=1, \ \dots, \ N$, *не зависят от* $n$, *то суммы*

$$X_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}X_{nr}(t)$$

*сходятся к пуассоновскому процессу с параметром* $\lambda=(\lambda^{(1)}, \qquad \lambda^{(N)})$.

Действительно, из (43) и (54) следует (45).

Поскольку по лемме 2 и (55) для всех $k=1, \qquad N$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le r\le k_n}\left(1-\varphi_{nr}^{(k)}(0, \ t)\right)\leqslant\frac{1}{\gamma_k}\lim_{n\to\infty}\max_{1\le r\le k_n}\left(1-\bar{\varphi}_{nr}(0, \ t)\right)=0, \tag{56}$$

то из (38) и (56) следуют (44). Следствие 4 доказано.

Пусть $X_{nr}(t)$, $r=1, \qquad k_n$, – процессы восстановления со стационарными приращениями, такие, что

$$\mu_{nr}=\int_0^\infty t\,dF_{nr}(t)<\infty, \qquad r=1, \ \dots, \ k_n.$$

Известно [2], что тогда для процесса $X_{nr}(t)$

$$\hat{F}_{nr}(t)=\frac{1}{\mu_{nr}}\int_0^t\left(1-F_{nr}(u)\right)du, \tag{57}$$

параметр $\lambda_{nr}=\dfrac{1}{\mu_{nr}}$ и функция Пальма – Хинчина $\varphi_{nr}(0, \ t)=1-F_{nr}(t)$.

Допустим, что при каждом фиксированном $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le r\le k_n}F_{nr}(t)=0 \tag{59}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\frac{1}{\mu_{nr}}=\lambda. \tag{60}$$

Поскольку для сколь угодно большой константы $T$

$$\min_{1\leqslant r\leqslant k_n} \mu_{nr} \geqslant \min_{1\leqslant r\leqslant k_n} \int_T^\infty t dF_{nr}(t) \geqslant T \min_{1\leqslant r\leqslant k_n} \left(1-F_{nr}(T)\right)=$$
$$=T\left(1-\max_{1\leqslant r\leqslant k_n} F_{nr}(T)\right), \tag{61}$$

то из (59) и (61) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} \lambda_{nr}=0.$$

Таким образом, из (59)–(60) ввиду (58) вытекают все предположения следствия 4 (условие (55) при $N=1$ тривиально).

Итак, *при условиях* (59) *и* (60) *суммы процессов восстановления со стационарными приращениями* $X_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n} X_{nr}(t)$ *сходятся к процессу Пуассона с параметром* $\lambda$.

В заключение отметим, что все результаты этого параграфа с очевидными изменениями переносятся на случай суммирования стационарных целочисленных случайных мер (см. определение 2 в § 1).

Пусть $Q(A)$, $A\in\mathfrak{A}$, – стационарная целочисленная случайная мера. Назовем ее ординарной, если

$$\lim_{t\to 0+} t^{-1}\mathbf{P}\left\{Q\left(\mathfrak{X}_1\times[0,\ t)\right)>1\right\}=0. \tag{62}$$

Из определения стационарности и (62) следует, что если мера $Q$ стационарна и ординарна, то при каждом $\Gamma\in\mathfrak{A}_1$ случайный процесс

$$X_\Gamma(t)=Q\left(\Gamma\times[0,\ t)\right)$$

является ординарным и ступенчатым случайным процессом со стационарными приращениями. Обозначим $\lambda(\Gamma)$ и $\varphi(j,\ t,\ \Gamma)$, $j\geqslant 0$, – параметр и функции Пальма–Хинчина процесса $X_\Gamma(t)$.

Для стационарной пуассоновской меры, очевидно,

$$\varphi(0,\ t,\ \Gamma)=e^{-t\lambda(\Gamma)}$$

$$\varphi(j,\ t,\ \Gamma)=\frac{[t\lambda(\Gamma)]^j}{j!}e^{-t\lambda(\Gamma)},\ j\geqslant 1,$$

где

$$\lambda(\Gamma)=\mathbf{M}\,Q\left(\Gamma\times[0,\ 1)\right).$$

Предположим, что

$$\lambda(\mathfrak{X}_1)=\mathbf{M}\,Q\left(\mathfrak{X}_1\times[0,\ 1)\right)<\infty.$$

Тогда по формулам Пальма–Хинчина (35)–(36)

$$\mathbf{P}\left\{Q\left(\Gamma\times[0,\ t)\right)>0\right\}=\lambda(\Gamma)\int_0^t \varphi(0,\ u,\ \Gamma)\,du \tag{63}$$

$$\mathbf{P}\left\{Q\left(\Gamma\times[0,\ t)\right)>1\right\}=\lambda(\Gamma)\int_0^t \varphi(1,\ u,\ \Gamma)\,du. \tag{64}$$

Рассмотрим последовательность серий взаимно независимых в каждой серии стационарных ординарных целочисленных случайных мер $Q_{nr}$, $r=1, \ldots, k_n$, и обозначим

$$Q_n=\sum_{r=1}^{k_n} Q_{nr}. \tag{65}$$

Пусть $\lambda_{nr}(\Gamma)$ и $\varphi_{nr}(j, t, \Gamma)$ — параметр и функции Пальма–Хинчина процесса $Q_{nr}\Big(\Gamma\times[0,\ t)\Big)$, $\Gamma\in\mathfrak{A}_1$, $1\leqslant r\leqslant k_n$, $j\geqslant 0$.

Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} \lambda_{nr}(\mathfrak{X}_1)=0. \tag{66}$$

**Теорема 7.** *При условии* (66) *для сходимости сумм* (65) *к стационарной пуассоновской мере* $P_\lambda$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* $t>0$ *и* $\Gamma\in\mathfrak{A}_1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \lambda_{nr}(\Gamma) \int_0^t \varphi_{nr}(0,\ u,\ \Gamma)\,du=t\,\lambda(\Gamma) \tag{67}$$

*и*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \lambda_{nr}(\mathfrak{X}_1) \int_0^t \varphi_{nr}(1,\ u,\ \mathfrak{X}_1)\,du=0. \tag{68}$$

Доказательство. При условии (66) соотношения (67)–(68) в силу (63) и (64) эквивалентны условиям следствия 1, откуда и следует утверждение теоремы 7.

Пусть существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \lambda_{nr}(\Gamma)=\lambda(\Gamma),\ \ \Gamma\in\mathfrak{A}_1. \tag{69}$$

**Следствие 5.** *При условиях* (65) *и* (69) *для сходимости сумм* (65) *к стационарной пуассоновской мере* $P_\lambda$ *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном* $t>0$ *и* $\Gamma\in\mathfrak{A}_1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \lambda_{nr}(\Gamma)\,\varphi_{nr}(0,\ t,\ \Gamma)=\lambda(\Gamma).$$

**Следствие 6.** *При условиях* (65) *и* (69), *если при каждом фиксированном* $t>0$

$$\lim_{n\to\infty} \min_{1\leqslant r\leqslant k_n} \varphi_{nr}(0,\ t,\ \mathfrak{X}_1)=1$$

$$\min_{1\leqslant r\leqslant k_n} \frac{\lambda_{nr}(\Gamma)}{\lambda_{nr}(\mathfrak{X}_1)} \geqslant \gamma(\Gamma)>0,\ \ \Gamma\in\mathfrak{A}_1,\ \ \Gamma\neq\varnothing,$$

*где константы* $\gamma(\Gamma)$, $\Gamma \in \mathfrak{A}_1$, *не зависят от n, то суммы* (65) *сходятся к стационарной пуассоновской мере* $P_\lambda$.

Доказательство следствий 5 и 6 аналогично доказательству следствий 3 и 4.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
1.IV.1969

Литература

1. K. Palm, Intensitätsschwankungen im Fernsprechenverkehr, Ericsson Technics, 44 (1943), 1–189.
2. А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Труды ин-та им. В. А. Стеклова, 49 (1955), 3–122.
3. Г. А. Ососков, Одна предельная теорема для потоков однородных событий, Теория вероятн. и ее применен., I, 2 (1956), 274–282.
4. Б. Григелионис, О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Теория вероятн. и ее применен., VIII, 2 (1963), 189–194.
5. Б. Григелионис, К вопросу о сходимости сумм случайных ступенчатых процессов к пуассоновскому, Лит. матем. сб., VI, № 2 (1966), 241–244.
6. E. Çinlar, On the superposition of *m*-dimensional point processes, J. Appl. Prob., 5 (1968), 169–176.
7. Б. Григелионис, О композициях целочисленных случайных мер, Лит. матем. сб., VI, № 3 (1966), 359–363.
8. C. Ryll-Nardzewski, Remarks on the processes of calls, Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., II (1961), 455–465, Univ. Calif. Press.
9. И. М. Сливняк, Некоторые свойства стационарных потоков однородных случайных событий, Теория вероятн. и ее применен., VII, 3 (1962), 347–352.
10. K. Matthes, Stationäre zufällige Punktfolgen, I, Jahresbericht d. DMV, 66, 2 (1969), 66–79.
11. J. Kerstan, K. Matthes, Stationäre zufällige Punktfolgen, II, Jahresbericht d. DMV, 66, 4 (1964), 106–118.
12. И. Керстан, К. Маттес, Обобщение теоремы Пальма–Хинчина, Укр. ж., т. 17, № 4 (1965), 29–36.
13. P. Franken, A. Liemant, K. Matthes, Stationäre zufälige Punktfolgen, III, Jahresbericht d. DMV, 67, 4 (1965), 183–202.
14. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, М.–Л., 1949.
15. J. R. Goldman, Stochastic point processes: limit theorems, Ann. Math. Statist., 38 (1967), 771–779.
16. А. Я. Хинчин, Потоки случайных событий без последействия, Теория вероятн. и ее применен., I, 1 (1956), 3–18.
17. А. Я. Хинчин, О пуассоновских потоках случайных событий, Теория вероятностей и ее прменен., I, 3 (1956), 320–327.
18. Б. Григелионис, Об одной предельной теореме теории восстановления, Лит. матем. сб., II, № 1 (1962), 25–34.
19. P. Franken, Approximation durch Poissonsche Prozesse, Math. Nachrichten, 26, 1/4 (1963), 101–114.
20. Б. И. Григелионис, Предельные теоремы для сумм процессов восстановления, Сб. „Кибернетику–на службу коммунизму", т. 2, Изд-во Энергия, М.–Л., 1964, 246–266.
21. R. Pyke, Markov renewal processes with finitely many states, Ann. Math. Statist., 32 (1961), 1243–1259.
22. И. Сапаговас, О сходимости сумм марковских процессов восстановления к процессу Пуассона, Лит. матем. сб., VI, № 2 (1966), 271–277.
23. И. Сапаговас, О сходимости сумм марковских процессов восстановления к многомерному процессу Пуассона, Лит. матем. сб., IX, № 4 (1969).

## DAUGIAMAČIŲ LAIPTUOTŲ ATSITIKTINIŲ PROCESŲ SUMŲ RIBINĖS TEOREMOS

B. Grigelionis

(*Reziumė*)

Šiame darbe gautos būtinos ir pakankamos sąlygos nepriklausomų atsitiktinių matų, įgyjančių tik sveikas neneigiamas reikšmes, sumų konvergencijai į Puasono matus. Naudojantis tais rezultatais, rasti bendri kriterijai nepriklausomų daugiamačių laiptuotų atsitiktinių procesų sumų konvergencijai į Puasono procesus. Stacionarių atsitiktinių matų bei atsitiktinių procesų su stacionariais pokyčiais atveju gautos sąlygos išreikštos Palmo–Chinčino funkcijų terminais.

## LIMIT THEOREMS FOR THE SUMS OF MULTIDIMENSIONAL STOCHASTIC STEP PROCESSES

B. Grigelionis

(*Summary*)

In the paper necessary and sufficient conditions for convergence of sums of independent integer-valued random measures to the Poisson measures are given. General criteria for convergence of sums of independent multidimensional stochastic step processes to the Poisson processes are derived from that results. Given conditions are expressed in the terms of Palm–Khintchin functions in the case of the stationary random measures and the stochastic processes with stationary increments.