X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК–519.21

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ m-ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. А. Егоров

Введение. Настоящая работа посвящена изучению предельных теорем для последовательностей m-зависимых случайных величин. В теореме 1 исследуется скорость сходимости к нулю остаточного члена в центральной предельной теореме при выполнении условий Ляпунова. Получена оценка, которая в предположении существования моментов порядка $2+\delta$ при малых δ приближается к неулучшаемой оценке для независимых случайных величин. В теореме 2 получены некоторые достаточные условия для справедливости закона повторного логарифма. Теорема 2 является распространением соответствующего результата В. В. Петрова [1] на случай m-зависимых случайных величин. Автор выражает искреннюю благодарность Валентину Владимировичу Петрову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность m-зависимых случайных величин с нулевыми средними и с конечными дисперсиями, не все из которых равны нулю. В работе будут использованы обозначения:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_i, \quad B_n = ES_n^2, \quad \bar{B}_n = \sum_{j=1}^{n} EX_j^2$$

$V_1(x)$, $V_2(x)$, – функции распределения величин X_1, X_2, соответственно, $F_n(x)$ – функция распределения величины $S_n/\sqrt{B_n}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \Delta_n = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|.$$

Соотношение $a_n \asymp b_n$ будет означать, что

$$0 < \varliminf \frac{a_n}{b_n} \leqslant \varlimsup \frac{a_n}{b_n} < \infty .$$

Буквой C с индексами или без них будем обозначать константы, не всегда одни и те же.

2. **Теорема 1.** *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $B_n \to \infty$;

2) $\sum_{j=1}^{n} EX_j^2 = O(B_n)$;

3) $\sum_{j=1}^{n} E|X_j|^{2+\delta}=O(B_n)$ *для некоторого положительного* $\delta\leqslant 1$. *Тогда* $\Delta_n=O(B_n^{-\frac{\delta}{2+3\delta}})$.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $B_n\to\infty$;

2) $EX_n^2=o(B_n)$;

3) $\Delta_n=O\left((\ln B_n)^{-1-\nu}\right)$ *при некотором положительном* ν;

4) $\sum_n \mathbf{P}(|X_n|>\varepsilon\sqrt{B_n\ln_2 B_n})<\infty$ *при любом положительном* ε.

Тогда для последовательности $X_1, X_2,$ *справедлив закон повторного логарифма, т. е.*

$$\mathbf{P}\left(\overline{\lim}\frac{|S_n|}{\sqrt{2B_n\ln_2 B_n}}=1\right)=1.$$

Здесь $\ln_2 B_n$ означает $\ln\ln B_n$.

Замечание. Легко видеть, что условие (4) теоремы 2 равносильно условию: $X_n=o(\sqrt{B_n\ln_2 B_n})$ с вероятностью единица.

3. **Лемма 1.** *Пусть* X_i – *независимые величины* $(i\leqslant n)$. *Тогда, если* $X_i\in L_p$ $(p>1)$, $EX_i=0$, *то*

$$A_p\cdot E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)^{p/2}\leqslant E|S_n|^p\leqslant B_p\cdot E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)^{p/2}$$

где A_p, B_p *зависят только от* p.

Доказательство этой леммы приведено в работе [2].

Лемма 2.

$$E|S_n|^{2+\delta}\leqslant C n^{\delta/2}\sum_{j=1}^{n}E|X_j|^{2+\delta}.$$

Доказательство леммы 2. Не умаляя общности, можно считать, что величины независимы. Действительно,

$$E|S_n|^{2+\delta}\leqslant(1+m)^{1+\delta}(E|X_1+X_{m+1}+\cdots|^{2+\delta}+$$
$$+E|X_2+X_{m+2}+\cdots|^{2+\delta}+\cdots+E|X_m+X_{2m}+\cdots|^{2+\delta}).\tag{1}$$

К каждому слагаемому правой части неравенства (1) применим лемму 1 с $p=2+\delta$.

Тогда получим:

$$E|S_n|^{2+\delta}\leqslant(1+m)^{1+\delta}B_p\Big(E(X_1^2+X_{m+1}^2+\cdots)^{\delta/2+1}+$$
$$+E(X_2^2+X_{m+2}^2+\cdots)^{\delta/2+\delta}+\cdots+E(X_m^2+X_{2m}^2+\cdots)^{\delta/2+1}\Big).\tag{2}$$

Применяя неравенство Иенсена к правой части соотношения (2), получим утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть* $m=1$ *и* $K_n \nearrow \infty$. *Существует система индексов* $n_j \leqslant n$ *таких, что*

$$\sum_j EX_{n_j}^2 \leqslant C\bar{B}_n/K_n \quad \text{и } 1 < |n_{j+1}-n_j| \leqslant 4K_n.$$

Доказательство леммы 3. Пусть $l=\left[\frac{n}{K_n}\right]$. Обозначим $p_i=K_n(i-1)+1$, $(i=1, 2, \ldots, l-1)$ и $p_l=n$. Определим r_i из соотношений

$$p_i \leqslant r_i < p_{i+1} \ (i<l-1), \quad p_{l-1} \leqslant r_{l-1} \leqslant p_l$$

$$EX_{r_i}^2 \leqslant EX_k^2 \text{ для всех } k \in [p_i, p_{i+1}].$$

Тогда получим:

$$EX_{r_i}^2 \leqslant \frac{C}{K_n} \sum_{k=p_i}^{p_{i+1}-1} EX_k^2.$$

Просуммировав по i, получим:

$$\sum_i EX_{r_i}^2 \leqslant \frac{C}{K_n} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2 = \frac{C\bar{B}_n}{K_n}.$$

Положив $n_i=r_{2i}$, получим требуемое.

Лемма 4. *Пусть* X, Y *— случайные величины,* $Z=X+Y$, V *и* W *— функции распределения* X *и* Z, *соответственно. Пусть* $\sup_x |V(x)-\Phi(x)| \leqslant K$.

Тогда

$$\sup_x |W(x)-\Phi(x)| \leqslant K+\varepsilon/2\pi+\mathbf{P}(|Y|>\varepsilon)$$

для любого положительного ε.

Доказательство этой леммы приведено в работе [3].

Перейдем к доказательству теоремы 1.

а) $m=1$. Выберем некоторую последовательность K_n и по ней найдем набор индексов, удовлетворяющих условиям леммы 3. Обозначим

$$X_{n_k}=Z_k; \quad X_{n_{k+1}}+\cdots+X_{n_{k+1}-1}=Y_k,$$

$$b_l=E(Y_1+\cdots Y_l)^2.$$

Имеем:

$$b_l=E\Big(S_n-\sum_k Z_k\Big)^2=B_n+\frac{\nu_1 B_n}{\sqrt{K_n}}+\frac{\nu_2 B_n}{K_n}=B_n\Big(1+\frac{\nu}{\sqrt{K_n}}\Big) \tag{3}$$

Здесь ν, ν_1, $\nu_2 \leqslant C$.

В силу теоремы Ляпунова и соотношения (3) имеем:

$$\bar{\Delta}_l=\sup_x\left|\mathbf{P}\left(\frac{\sum_l Y_l}{\sqrt{b_l}}<x\right)-\Phi(x)\right| \leqslant C\,\frac{\sum_l E|Y_l|^{2+\delta}}{(B_n)^{1+\delta/2}}, \tag{4}$$

Если к каждому слагаемому суммы правой части неравенства (4) применить лемму 2, то получим:

$$\overline{\Delta}_l \leqslant \frac{CK_n^{\delta/2}}{B^{1+\delta/2}} \sum_l E|X_i|^{2+\delta} \leqslant C\left(\frac{K_n}{B_n}\right)^{\delta/2} \tag{5}$$

Положим

$$\frac{S_n}{\sqrt{B_n}} = X+Y = X+\eta_1+\eta_2, \text{ где } X = \frac{1}{\sqrt{b_l}} \sum_i Y_i,$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_l Z_i, \quad \eta_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{B_n}} - \frac{1}{\sqrt{b_l}}\right) \sum Y_i.$$

Имеем

$$\left|\frac{1}{\sqrt{b_l}} - \frac{1}{\sqrt{B_n}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{B_n}} \left|1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\nu}{K_n}}}\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{B_n K_n}}$$

Применяя неравенство Чебышева, получим:

$$\mathbf{P}\left(|\eta_2| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2 K_n}, \tag{6}$$

имеем $B_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} EX_i^2(1+m)$ и в силу второго условия теоремы

$$B_n \asymp \overline{B}_n. \tag{7}$$

Следовательно, используя лемму 3 и неравенство Чебышева, получим:

$$\mathbf{P}\left(|\eta_1| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{C}{\varepsilon^2 K_n} \tag{8}$$

Из соотношений (6) и (8) следует, что

$$\mathbf{P}(|Y| > \varepsilon) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2 K_n} \tag{9}$$

Применяя лемму 4, а также соотношения (4) и (9), получим

$$\Delta_n \leqslant C\,(K_n^{\delta/2} B_n^{-\delta/2} + \varepsilon + K_n^{-1}\varepsilon^{-2}). \tag{10}$$

Положим в соотношении (10)

$$K_n = \overline{B}_n^{\frac{3}{2+3\delta}}, \quad \varepsilon = \overline{B}_n^{-\frac{\delta}{2+3\delta}}$$

Тогда получим заключение теоремы.

б) $m > 1$. Представим n в виде $n = mk+r$, $r < m$. Пусть $Z_1 = X_1 + \quad + X_r$, $Z_2 = X_{r+1} + X_{r+2} + \quad + X_{r+m+1}, \ldots, Z_k = X_{m(k-1)+r} + \quad + X_n$.

Пусть

$$b_l = E(Z_1 + \cdots + Z_l)^2, \quad \overline{b}_l = \sum_{i=1}^{l} EZ_i^2.$$

Проверим, что $\{Z_i\}$ удовлетворяют пункту (а) теоремы

$$\sum_{i=1}^{l} E|Z_i|^{2+\delta} \leqslant (m+1)^{1+\delta} \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^{2+\delta} \leqslant CB_n = Cb_l.$$

Аналогично $\overline{b}_l \leqslant Cb_l$. Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Лемма 5. *Пусть* $\chi_n = \sqrt{2B_n \ln_2 B_n}$. *Тогда для любых* $\mu > 0$, $b > 0$ $(b^2 < 1 + \nu)$ *и всех достаточно больших* n *имеем*:

$$(\ln B_n)^{-(1+\mu)b^2} < \mathbf{P}(S_n > b\chi_n) < (\ln B_n)^{-b^2}.$$

Доказательство этой леммы можно найти в работе [1].

Лемма 6. *Пусть* $EX_n^2 = o(B_n)$. *Тогда* $B_{n+1}/B_n \to 1$ *и* $B_{n+k} \geqslant B_n + o(B_n)$ *при любом натуральном* k. *В частности,* $B_{n+k} \geqslant B_n/2$ *при достаточно большом* n.

Доказательство леммы 6.

$$B_n = E(S_{n+1} - X_{n+1})^2 = B_{n+1} - ES_{n+1}X_{n+1} + EX_{n+1}^2 =$$
$$= B_{n+1} + \Theta\sqrt{B_{n+1} \cdot EX_{n+1}^2}\,.$$

Здесь $|\Theta| \leqslant 1$. Далее,

$$B_{n+k} = B_n + E(X_{n+1} + \cdots + X_{n+k})^2 + 2E\,S_n(X_{n+1} + \cdots + X_{n+k}) \geqslant$$
$$\geqslant B_n - \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{m-j} \mathbf{E}\,|X_{n-j} \cdot X_{n+i}| \geqslant B_n - \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{m-j} \sqrt{\mathbf{E}X_{n-j}^2 \cdot \mathbf{E}X_{n+i}^2} = B_n + o(B_n).$$

Лемма 7. *Обозначим*

$$\bar{S}_n = \max(S_1, S_2, \ldots, S_n), \quad \bar{X}_n = \max\{|X_2|, |X_3|, \ldots, |X_n|\}.$$

Тогда в условиях теоремы для любого положительного ε

$$\mathbf{P}(\bar{S}_n > x) \leqslant 4\left\{\mathbf{P}(S_n > x - \varepsilon - 4\sqrt{B_n}) + \mathbf{P}\left(\bar{X}_n > \frac{\varepsilon}{m}\right)\right\},$$

если

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n > \frac{\varepsilon}{m}\right) < \frac{1}{2}\,.$$

Доказательство леммы 7. Пусть $\mathbf{P}_A(B)$ будет означать вероятность B при условии A, $\sim$ означает, что соответствующее распределение берется при условии A, состоящем в том, что

$$\bar{X}_n \leqslant \frac{\varepsilon}{m}$$

Обозначим через A_k событие, состоящее в том, что $S_i \leqslant x$ $(i < k)$, а $S_k > x$ $(k = 1, 2, \ldots)$. A_k — попарно несовместны и $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\bar{S}_n > x\}$. Учитывая лемму 6, получим: для $k = 1, 2, \quad n - m$

$$E_{A_k}(S_n - S_{k+m})^2 \leqslant \frac{1}{\mathbf{P}(A)}\,E(S_n - S_{k+m})^2 \leqslant 2E(S_n - S_{k+m})^2 \leqslant 8B_n. \tag{11}$$

В силу неравенства Чебышева из (11) следует для $k \leqslant n - m$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{A_k}(S_n - x + \varepsilon \leqslant -\sqrt{16B_n}) \leqslant \tilde{\mathbf{P}}_{A_k}(S_n - S_k + \varepsilon \leqslant -\sqrt{16B_n}) \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{\mathbf{P}}_{A_k}(S_n - S_{k+m} \leqslant \sqrt{16B_n}) \leqslant \tilde{\mathbf{P}}_{A_k}(|S_n - S_{k+m}| > \sqrt{16B_n}) \leqslant \frac{1}{2}\,. \tag{12}$$

Если $n \geqslant k > n - m$, то

$$\tilde{\mathbf{P}}_{A_k}(S_1 - x + \varepsilon < -\sqrt{16B_n}) = 0\,.$$

Итак,

$$\tilde{\mathbf{P}}_{A_k}(S_n > x - \varepsilon - 4\sqrt{B_n}) \geqslant \frac{1}{2}$$

Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{P}}(S_n > x - \varepsilon - 4\sqrt{B_n}) \geqslant \sum_k \tilde{\mathbf{P}}_{A_k}(S_n > x - \varepsilon - 4\sqrt{B_n}) \cdot \tilde{\mathbf{P}}(A_k) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_k \tilde{\mathbf{P}}(A_k) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{P}}(\bar{S}_n > x). \tag{13}$$

Для доказательства леммы 7 остается заметить, что для любых событий A и B имеет место соотношение

$$|\mathbf{P}(B/A) - \mathbf{P}(B)| \leqslant \frac{\mathbf{P}(\bar{A})}{\mathbf{P}(A)}$$

Действительно,

$$\mathbf{P}(B/A) - P(B) = \frac{\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} \leqslant \frac{\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(\bar{A})}{\mathbf{P}(A)}\ \mathbf{P}(B)$$

и

$$\frac{\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} \geqslant \frac{\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = -\frac{\mathbf{P}(B\bar{A})}{\mathbf{P}(A)} \geqslant -\frac{\mathbf{P}(\bar{A})}{\mathbf{P}(A)}$$

Лемма 7 доказана.

Приступим к доказательству теоремы 2 непосредственно. В силу леммы 6 для любого положительного τ можно выделить такую последовательность натуральных чисел, что

$$B_{n_k - 1} \leqslant (1+\tau)^k < B_{n_k}$$

Следовательно,

$$1 \geqslant B_{n_k-1} / (1+\tau)^k \sim B_{n_k} / (1+\tau)^k \geqslant 1.$$

Последнее соотношение означает, что

$$B_{n_k} \sim (1+\tau)^k. \tag{14}$$

Положим

$$\bar{\bar{S}}_{n_k} = \max_{n_{k-1} < i \leqslant n_k} S_i, \quad \bar{\bar{X}}_{n_k} = \max_{n_{k-1} < i \leqslant n_k} |X_i|$$

и пусть $\gamma > 0$. Применяя лемму 7 с $\varepsilon = \gamma\chi_{n_k}/3$ и $x = (1+\gamma)\chi_{n_k}$, получим при достаточно больших k

$$\mathbf{P}\left(\bar{\bar{S}}_{n_k} > (1+\gamma)\chi_{n_k}\right) \leqslant 4\left\{\mathbf{P}\left(S_{n_k} > \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\chi_{n_k}\right) + \mathbf{P}(\bar{\bar{X}}_{n_k} > \gamma\chi_{n_k}/3)\right\}.$$

Теперь воспользуемся леммой 5 с $b = 1 + \gamma/2$. Тогда получим:

$$\mathbf{P}\left(\bar{\bar{S}}_{n_k} > (1+\gamma)\chi_{n_k}\right) \leqslant 4\left\{(\ln B_{n_k})^{-(1+\gamma/2)^2} + \mathbf{P}(\bar{\bar{X}}_{n_k} > \gamma\chi_{n_k}/3)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{k^{-(1+\gamma/2)^2} + \mathbf{P}(X_{n_k} > \gamma\chi_{n_k}/3)\right\}. \tag{15}$$

В силу леммы 6 $\chi_j \leqslant 2\chi_{n_k}$ для $n_{k-1} < j \leqslant n_k$, если k достаточно велико. Поэтому

$$\sum_k \mathbf{P}(\bar{\bar{X}}_{n_k} > \gamma\chi_{n_k}/3) \leqslant \sum_k \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \mathbf{P}(|X_j| > \gamma\chi_{n_k}/3) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \mathbf{P}(|X_j| > \gamma\chi_j/6) < \infty.$$

Таким образом, из соотношения (15) следует, что

$$\sum_k \mathbf{P}(\bar{\bar{S}}_{n_k} > (1+\gamma)\chi_{n_k}) < \infty \text{ для любого } \gamma > 0. \tag{16}$$

Пусть „б. ч.“ означает бесконечное число раз. Тогда, в силу леммы Бореля – Кантелли, из соотношения (16) следует, что

$$\mathbf{P}\left(\bar{\bar{S}}_{n_k} > (1+\gamma)\chi_{n_k} \text{ б. ч.}\right) = 0 \tag{17}$$

при любом $\gamma > 0$.

Имеем для дюбого положительного ε

$$\mathbf{P}\left(S_n > (1+\varepsilon)\chi_n \text{ б. ч.}\right) \leqslant \mathbf{P}(\bar{\bar{S}}_{n_k} > (1+\delta) \min_{n_{k-1} < n \leqslant n_k} \chi_n \text{ б. ч.}). \tag{18}$$

В силу леммы 6

$$\min_{n_{k-1} < n \leqslant n_k} \chi_n > \chi_{n_{k-1}}\left(1 + \underset{k\to\infty}{o}(1)\right) \geqslant \chi_{n_{k-1}}(1-\delta) \tag{19}$$

для любого положительного δ, если k достаточно велико. С другой стороны для достаточно больших k

$$\chi_{n_{k-1}} > \chi_{n_k}(\sqrt{1+2\tau})^{-1} \tag{20}$$

Из неравенств (19) и (20) следует, что

$$\min_{n_{k-1} < n \leqslant n_k} \chi_n \geqslant \frac{(1-\delta)}{\sqrt{1+2\tau}} \chi_{n_k}$$

для достаточно больших k.

Таким образом, учитывая неравенство (18), имеем

$$\mathbf{P}\left(S_n > (1+\varepsilon(\chi_n \text{ б. г.}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\bar{\bar{S}}_{n_k} > \frac{(1+\varepsilon)(1-\delta)}{\sqrt{1+2\tau}} \chi_{n_k} \text{ б. ч.}\right). \tag{21}$$

Выберем $\varepsilon > 0$. Затем выберем положительные числа τ и δ настолько малыми, чтобы

$$\frac{(1+\varepsilon)(1-\delta)}{\sqrt{1+2\tau}} \geqslant 1+\gamma.$$

Тогда из соотношений (17) и (21) получим

$$\mathbf{P}\left(S_n > (1+\varepsilon)\chi_n \text{ б. ч.}\right) = 0. \tag{22}$$

Рассматривая величины $-X_1, -X_2, \ldots$, получим, что

$$\mathbf{P}\left(-S_n > (1+\varepsilon)\chi_n \text{ б. ч.}\right) = 0. \tag{23}$$

Таким образом доказано, что

$$\mathbf{P}\left(\overline{\lim}\ \frac{|S_n|}{\sqrt{2B_n \ln_2 B_n}} \leqslant 1\right) = 1. \tag{24}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\mathbf{P}\left(\overline{\lim}\ \frac{|S_n|}{\sqrt{2B_n \ln_2 B_n}} \geqslant 1\right) = 1. \tag{25}$$

Положим

$$q_k = \mathbf{P}\left(S_{n_k} - S_{n_{k-1}+m} > (1-\gamma)\chi_{n_k}\right),$$

где $\gamma > 0$. В силу леммы 5 получим для любого положительного μ:

$$q_k > \mathbf{P}\left(S_{n_k} > (1-\gamma/2)\chi_{n_k}\right) - \mathbf{P}\left(|S_{n_{k-1}+m}| > \gamma/2\,\chi_{n_k}\right) \geqslant$$

$$\geqslant (\ln B_{n_k})^{-(1+\mu)(1-\gamma/2)^2} - (\ln B_{n_{k-1}+m})^{-\frac{\gamma^2}{4}\left(\frac{\chi_{n_k}}{\chi_{n_{k-1}+m}}\right)^2}, \tag{26}$$

если k достаточно велико. Из определения последовательности $\{n_k\}$ и из леммы 6 следует, что τ можно выбрать настолько большим, что

$$\frac{\gamma^2}{4}(\chi_{n_k}/\chi_{n_{k-1}+m})^2 \geqslant \beta > 1.$$

Выберем положительное число μ так, чтобы $(1+\mu)(1-\gamma/2)^2 < 1$. Тогда, учитывая лемму 6, получим из (26), что

$$\sum_k q_k = \infty.$$

В силу леммы Бореля — Кантелли

$$\mathbf{P}\left(S_{n_k} - S_{n_{k-1}+m} > (1-\gamma)\chi_{n_k} \text{ б. ч.}\right) = 1. \tag{27}$$

В силу (24) и леммы 6

$$\mathbf{P}\left(\overline{\lim}\ \frac{|S_{n_{k-1}+m}|}{\chi_{n_k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\tau/2}}\right) = 1.$$

Следовательно, из (27) следует

$$\mathbf{P}\left(\overline{\lim}\ \frac{S_{n_k}}{\chi_{n_k}} \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\tau/2}}\right) = 1.$$

Ввиду произвольности τ имеет место соотношение (25). Теорема доказана.

Ленинград

Поступило в редакцию
6.XI.1968

Литература

1. В. В. Петров, О законе повторного логарифма, Усп. матем. наук (1960). 15, вып. 2.
2. J. Marcinhiewicz et A. Zygmund, Fonctions independantes, Fund. Math., 29 (1937), 87–89.
3. В. В. Петров, О центральной предельной теореме для m-зависимых величин, Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и математической статистике, 1958, Ереван (1960).

KELETAS RIBINIŲ TEOREMŲ m-PRIKLAUSOMIEMS ATSITIKTINIAMS DYDŽIAMS

V. Jegorovas

(*Reziumė*)

Nagrinėjama m-priklausomų atsitiktinių dydžių seka. Esant patenkinamai Liapunovo sąlygai, ištirtas konvergavimo į normalinį dėsnį greitis centrinėje ribinėje teoremoje. Gautas V. Petrovo teoremos apie kartotinio logaritmo dėsnį analogas m-priklausomiems atsitiktiniams dydžiams.

SOME LIMIT THEOREMS FOR m-DEPENDENT RANDOM VARIABLES

V. Egorov

(*Summary*)

A sequence of m-dependent random variables is considered. The rate of convergence to the normal law in the central limit theorem is investigated provided Lyapunov condition is true. The analogue of V. V. Petrov theorem of the iterated logarithm is derived.