X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

УДК–519.21

О СКОРОСТИ РОСТА НОРМИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ И ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЯХ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Н. Калинаускайте

Рассматриваетя последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n, \tag{1}$$

в общем случае распределенных неодинаково с нулевыми математическими ожиданиями. Положим

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j.$$

$G_\alpha(x)$ – функция распределения устойчивого закона с характеристической функцией

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-|t|^\alpha\left(1+i\frac{t}{|t|}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\} && \text{при} \quad 1<\alpha<2,\\ &\exp\{-t^2\} && \text{при} \quad \alpha=2, \end{aligned} \tag{2}$$

$$R_{\alpha,n}=\sup_{-\infty<x<\infty}|P\{S_n<xb_n^{\frac{1}{\alpha}}\}-G_\alpha(x)|.$$

В случае $\alpha=2$ В. В. Петровым [1] доказано, что в условиях

$$b_n\to\infty,\qquad \frac{b_{n+1}}{b_n}\to 1\qquad (n\to\infty) \tag{3}$$

и

$$R_{2,n}=0\left(\frac{1}{(\ln b_n)^{1+\delta}}\right)\qquad \text{при некотором}\quad \delta>0 \tag{4}$$

последовательность (1) подчиняется закону повторного логарифма, т. е.

$$P\left\{\limsup\frac{S_n}{\sqrt{2b_n\ln\ln b_n}}=1\right\}=1 \tag{5}$$

Оказывается, что при дополнительных ограничениях на рост нормирующего множителя b_n можно более точно разграничить верхние и нижние функции для сумм S_n, чем это дает закон повторного логарифма.

Напомним, что в случае сближения распределения сумм $b_n^{-\frac{1}{\alpha}}S_n$ с распределением $G_\alpha(x)$ устойчивого закона с показателем $1<\alpha\leqslant 2$ выпуклая монотонно возрастающая положительная функция $t^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t)$ называется верхней для сумм S_n, если

$$P\left\{\limsup\left(S_n>b_n^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(b_n)\right)\right\}=0$$

и нижней, если эта вероятность равна единице.

Из (5) следует, что

$$P\left\{\limsup\left(S_n > (1+\varepsilon)\sqrt{2b_n \ln\ln b_n}\right)\right\} = 0$$

и

$$P\left\{\limsup\left(S_n > (1-\varepsilon)\sqrt{2b_n \ln\ln b_n}\right)\right\} = 1$$

для любого $0<\varepsilon<1$. Класс функций $t^{\frac{1}{2}}\ \varphi(t)$ с

$$(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln\ln t} < \varphi(t) < (1+\varepsilon)\sqrt{2\ln\ln t}$$

остается нерассмотренным.

Так как для каждого фиксированного $\alpha\in(1,2]$ при $x\to+\infty$ имеет место соотношение

$$1-G_\alpha(x) \sim A(\alpha)\, x^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha-1}} \exp\left\{-B(\alpha)\, x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}, \tag{6}$$

где

$$A(\alpha) = \frac{\alpha^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \left|\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right|^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}}{\sqrt{2\pi(\alpha-1)}},$$

$$B(\alpha) = (\alpha-1)\,\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left|\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right|^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

мы не будем ограничиваться случаем $\alpha=2$.

Теорема *Пусть* $\alpha\in(1,2]$ *и* $\varphi(t)\uparrow+\infty$ *монотонная выпуклая непрерывная функция, удовлетворяющая условию*

$$(1-\varepsilon)\, B^{-1}(\alpha)\ln\ln t < \varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t) < (1+\varepsilon)\, B^{-1}(\alpha)\ln\ln t\,.$$

Пусть далее последовательность (1) *такова, что*

$$\inf_{m<n} P\{S_n - S_m \geqslant 0\} = C_0 > 0$$

и существуют положительные числа b_n, $n=1, 2,$ *удовлетворяющие условиям*

$$b_n\to\infty \quad \text{при } n\to\infty,$$

и

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{b_n} \leqslant \frac{c_1}{\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(b_n)}, \tag{7}$$

где $c_0<c_1<1$, *такие, что*

$$R_{\alpha,n} = O\left(\frac{1}{(\ln b_n)^{(1+\delta)}}\right) \qquad (\delta>0)\,. \tag{8}$$

Тогда функция $t^{\frac{1}{2}}\ \varphi(b_n)$ *верхняя, если*

$$I\left(t^{\frac{1}{\alpha}}\ \varphi(t)\right) = \int^{\infty} \frac{1}{t}\, \varphi^{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t) \exp\left\{-B(\alpha)\,\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t)\right\} dt^{*}$$

сходится, и нижняя, если расходится.

---

* Нижняя грань интегрирования зависит от области определения функции $\varphi(t)$.

Для доказательства теоремы нужны некоторые факты.

В силу (6) и (8) получаем, что

$$P\{S_n > b_n^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(b_n)\} =$$
$$= A(\alpha)\varphi^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha-1}}(b_n)\exp\{-B(\alpha)\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(b_n)\} + O\left(\frac{1}{\ln b_n^{1+\delta}}\right) \tag{9}$$

при условии, что

$$(1-\varepsilon)B^{-1}(\alpha)\ln\ln t \leqslant \varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t) \leqslant (1+\varepsilon)B^{-1}(\alpha)\ln\ln t \tag{10}$$

для некоторого $0<\varepsilon<\delta$.

Используя формулу Тейлора, из (9) нетрудно вывести, что для $|C_n| < c\varphi^{-\frac{1}{\alpha-1}}(b_n)$ и каждого фиксированного $\alpha \in (1, 2]$ при $n\to\infty$ имеет место соотношение

$$P\left\{S_n > b_n^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(b_n)\left(1 - \frac{c_n}{\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(b_n)}\right)\right\} \sim$$
$$\sim \exp\left\{-\frac{\alpha c B(\alpha)}{\alpha-1}\right\}\cdot P\{S_n > b_n^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(b_n)\}. \tag{11}$$

Далее везде вместо $\varphi(b_n)$ будем писать просто φ_n. Далее, из (7) следует, что существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что

$$b_{n_k}\left(1 + \frac{a}{\varphi_{n_k}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right) < b_{n_{k+1}} < b_{n_k}\left(1 + \frac{b}{\varphi_{n_k}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right), \tag{12}$$

где $0<a<b$ константы и $b>c_1$.

Действительно, так как $b_n\to\infty$, то n_1 можно подобрать свободно, а n_k из рекуррентных соотношений

$$b_{n_{k+1}} \leqslant b_{n_k}\left(1 + \frac{b}{\varphi_{n_k}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right),$$
$$b_{n_{k+1}+1} > b_{n_k}\left(1 + \frac{b}{\varphi_{n_k}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right) \tag{13}$$

В силу (7) и (13)

$$b_{n_{k+1}+1} \leqslant b_{n_{k+1}} + b_{n_{k+1}+1}\cdot\frac{c_1}{\varphi_{n_k}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}},$$

откуда

$$b_{n_{k+1}} \geqslant b_{n_{k+1}+1}\cdot\left(1 - \frac{c_1}{\varphi_{n_k}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right) \geqslant$$
$$\geqslant b_{n_k}\left(1 + \frac{b}{\varphi_{n_k}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right)\left(1 - \frac{c_1}{\varphi_{n_k}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right) \geqslant b_{n_k}\left(1 + \frac{a}{\varphi_{n_k}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right)$$

Используя (12) и неравенства $\frac{x}{2} < \ln(1+x) < x$, $2x > -\ln(1-x) > x$, имеющие место при $0 < x < \frac{1}{2}$, таким же образом, как и в [2] проверяем, что интеграл $I\left(t^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t)\right)$ сходится или расходится одновременно с суммой

$$\sum_k P_{n_k} = \sum_k \varphi_{n_k}^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha-1}} \exp\left\{-B(\alpha)\varphi_{n_k}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}. \tag{14}$$

Переходим к доказательству теоремы.

1. Пусть $I\left(t^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t)\right) \to \infty$. Тогда

$$\sum_k P\{S_{n_k} > b_{n_k}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_{n_k}\} < \infty.$$

Обозначим

$$A_n = \{S_n > b_n^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_n\},$$
$$B_{n,k} = \{S_{n_k} - S_n \geqslant 0\},$$
$$C_k = \left\{S_{n_k} > b_{n_k}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_{n_{k-1}}\left(1 - \frac{b}{\alpha\varphi_{n_{k-1}}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right)\right\}.$$

Для каждого $n \in (n_{k-1}, n_k]$ имеет место соотношение $C_k \supset A_n \cap B_{n,k}$. Действительно, если имеют место события A_n и $B_{n,k}$, то

$$S_{n_k} > S_n > b_n^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_n > b_{n_k}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_{n_{k-1}}\left(1 - \frac{b}{\alpha\varphi_{n_{k-1}}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right).$$

Следовательно,

$$P(C_k) \geqslant P\left\{\bigcup_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} A_n \cap B_{n,k}\right\} =$$
$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} P\left\{A_n \cap B_{n,k} \setminus A_n \cap B_{n,k} \cap \bigcup_{m=n_{k-1}+1}^{n-1} A_m \cap B_{m,k}\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} P\left\{A_n \cap B_{n,k} \setminus A_n \cap B_{n,k} \cap \bigcup_{m=n_{k-1}+1}^{n-1} A_m\right\} =$$
$$= \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} P\left\{A_n \setminus A_n \cap \bigcup_{m=n_{k-1}+1}^{n-1} A_m\right\} \cdot P(B_{n,k}) \geqslant$$
$$\geqslant C_0 P\left(\bigcup_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} A_n\right),$$

где $c_0 = \inf_{n,k} P(B_{n,k})$.

В силу (11) ряд $\Sigma P(C_k)$ сходится, поэтому

$$P\left\{\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right\} \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} P\left\{\bigcup_{m=n_k+1}^{n_{k+1}} A_m\right\} \leqslant \frac{1}{c_0} \sum_{k=k_0}^{\infty} P(C_k) < \varepsilon$$

при $n > n_0(\varepsilon)$. Следовательно,

$$P\{\limsup A_n\} = P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\} \leqslant P\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\} < \varepsilon$$

при $n > n_0(\varepsilon)$.

2. Пусть $I\left(t^{\frac{1}{\alpha}} \varphi(t)\right) = \infty$. Тогда

$$\sum_k P\{S_{n_k} > b_{n_k}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi_{n_k}\} = \infty$$

Обозначим $B_k = \{S_{n_k} > b_{n_k}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi_{n_k}\}$. Далее будем рассматривать только подпоследовательность b_{n_k} и вместо n_k писать k. Докажем, что $P\{\limsup B_k\} = 1$. Вследствие закона нуля или единицы достаточно показать, что для любого n можно найти номер $\psi(n)$ такой, что

$$P\left\{\bigcup_{k=n}^{\psi(n)} B_k\right\} > c_2 > 0, \tag{15}$$

где константа C_2 не зависит от n.

Пусть $\delta_1 > 0$. Так как $P(B_k) \downarrow 0$ при $k \to \infty$, и в силу (14) $\Sigma P(B_k) = \infty$, то для любого натурального $n > n_0(\delta_1)$ найдется номер $\psi(n) > n$ такой, что

$$\delta_1 \leqslant \sum_{n \leqslant k \leqslant \psi(n)} P(B_k) < 2\delta_1. \tag{16}$$

Обозначим $D(m) = B_m \cap \bigcap_{r=1}^{\psi(n)-m} \bar{B}_{m+r}$,

$$D_1(m) = \left\{b_m^{\frac{1}{\alpha}} \varphi_m \leqslant S_m \leqslant b_m^{\frac{1}{\alpha}} \varphi_m + \frac{a}{4\alpha} b_m^{\frac{1}{\alpha}} \varphi_m^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right\}.$$

Из (11) следует, что

$$P\left(D_1(m)\right) > c_3 P(B_m).$$

Введем событие

$$D_2(m) = D_1(m) \cap \bigcap_{k=0}^{h-1} \{S_{m+k+1} - S_{m+k} \leqslant 0\}.$$

Так как при достаточно больших m

$$P\{S_{m+k+1} - S_{m+k} \leqslant 0\} > \frac{1}{2} G_\alpha(0),$$

то

$$P\{D_2(m)\} \geqslant \left(\frac{1}{2} G_\alpha(0)\right)^h \cdot P\left(D_1(m)\right) \tag{17}$$

При условии, что имеет место событие $D_2(m)$ в силу (12) и равенства

$$\varphi^{-1}(t)\,\varphi^{-\frac{1}{\alpha-1}}(t)=\varphi^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t)$$

получаем, что тогда имеют место события:

$$S_{m+r}\leqslant S_m\leqslant b_{m_m}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_m+\frac{a}{4\alpha}\,b_m^{\frac{1}{\alpha}}\,\varphi_m^{-\frac{1}{\alpha-1}}\leqslant t_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(t_{m+r}),$$

для всех $r=1, 2, \ldots, h.$, т. е.

$$D_2(m)\subset D_1(m)\cap\bigcap_{r=1}^{h}\bar{B}_{m+r}.$$

Введем события

$$D_3(m)=D_2(m)\cap\bigcap_{r=h+1}^{\psi(n)-m}\bar{B}_{m+r},$$

$$D_{3,r}(m)=D_2(m)\cap B_{m+r}.$$

Очевидно, что

$$D_2(m)\subset D_3(m)\cup\bigcup_{r=h+1}^{\psi(n)-m}D_{3,r}(m)\tag{18}$$

$$D_{3,r}(m)\subset D_2(m)\cap E_r(m),\tag{19}$$

где

$$E_r(m)=\left\{S_{m+r}-S_{m+h}\geqslant b_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_{m+r}-b_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_m+\frac{a}{4\alpha}\,b_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_m^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right\}$$

Заметим, что из (12) нетрудно следует, что

$$b_k^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_k-b_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_{k-1}\geqslant\frac{a}{2\alpha}\,b_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_{k-1}^{-\frac{1}{\alpha-1}}\tag{20}$$

$$\frac{a}{4\alpha}\,\varphi_{k-1}^{-\frac{1}{\alpha-1}}\,b_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant b_k^{\frac{1}{\alpha}}\,(B^{-1}(\alpha)\ln\ln b_k)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}-$$

$$-b_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}(B^{-1}(\alpha)\ln\ln b_{k-1})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\leqslant c_4\,b_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}\,\varphi_{k-1}^{-\frac{1}{\alpha-1}}\tag{21}$$

В силу (12) и (26) имеем

$$f_{r,m}=b_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_{m+r}-b_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_m+\frac{a}{4\alpha}\,b_m^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_m^{-\frac{1}{\alpha-1}}\geqslant\frac{a}{4\alpha}\sum_{k=0}^{r-1}b_{m+k}^{\frac{1}{\alpha}}\varphi_{m+k}^{-\frac{1}{\alpha-1}}\tag{22}$$

Если $b_{m+h}<b_m<2b_m$, то в силу (12)

$$b_{m+r}-b_{m+h}\leqslant 2b\,r\,b_m\,\varphi_{m+r}^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

и при h достаточно большом получаем

$$P\Big(E_r(m)\Big)\leqslant c_6\exp\{-c_5 r\},$$

$$P\Bigg\{\bigcup_{b_{m+h}<b_m<2b_m}D_{3,r}(m)\Bigg\}\leqslant c_6 P\Big(D_2(m)\Big)\cdot\sum_{r=h+1}^{\infty}e^{-c_5 r}\tag{23}$$

Число членов последовательности (12), удовлетворяющих условию

$$2b_m < b_{m+r} < b_m \varphi_{m+r}^{\frac{\alpha^2}{\alpha-1}}, \tag{24}$$

не превосходит $c_7 (\ln\ln b_m)^{\alpha+2}$. Для тех же b_{m+r} из (12), (21) и (22), (24) следует, что

$$b_{m+k}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi_{m+k}^{-\frac{1}{\alpha-1}} \geqslant c_8 \Big(b_{m+k+1}^{\frac{1}{\alpha}} (B^{-1}(\alpha)\ln\ln b_{m+k+1})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} -$$

$$- b_{m+k}^{\frac{1}{\alpha}} (B^{-1}(\alpha)\ln\ln b_{m+k})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \Big) \tag{25}$$

Поэтому в силу (24) и (25)

$$P\Big\{ \bigcup_{2b_m < b_{m+r} < b_m \varphi_{m+r}^{\frac{\alpha^2}{\alpha-1}}} D_{3,r}(m) \Big\} \leqslant C_9 P\Big(D_2(m) \Big) \frac{(\ln\ln b_m)^{\alpha+2}}{(\ln b_m)^{c_7}} \tag{26}$$

Если $b_m \varphi_{m+r}^{\frac{\alpha^2}{\alpha-1}} < b_{m+r} < b_{\psi(n)}$, то

$$f_{r,m} \geqslant b_{m+r}^{\frac{1}{\alpha}} \varphi_{m+r} \cdot (1 - 2\varphi_{m+r}^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}})$$

Поэтому из (6) получаем

$$P\Big\{ \bigcup_{b_m \varphi_{m+r}^{\frac{\alpha^2}{\alpha-1}} < b_{m+r} < b_{\psi(n)}} D_{3,r}(m) \Big\} \leqslant C_{10} \cdot 2\delta_1 \cdot P\Big(D_2(m) \Big) \tag{27}$$

Если h выберем достаточно большим, а δ_1 достаточно малым, то из (24), (26) и (27) следует, что

$$P\Big(\bigcup_{n \leqslant m \leqslant \psi(n)} D_{3,r}(m) \Big) \leqslant c_{11} P\Big(D_2(m) \Big)$$

с $0 < c_{11} < 1$. Следовательно, из (18) и (17) получаем, что

$$P\Big(D_3(m) \Big) \geqslant c_{12} P\Big(D_2(m) \Big) \geqslant c_{13} P(B_m).$$

Так как

$$P\Big(\bigcup_{n \leqslant m \leqslant \psi(n)} B_m \Big) = P\Big(\bigcup_{n \leqslant m \leqslant \psi(n)} D(m) \Big) = \sum_{n \leqslant m \leqslant \psi(n)} D(m) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n \leqslant m \leqslant \psi(n)} P\Big(D_3(m) \Big) \geqslant c_{13} \sum_{n \leqslant m \leqslant \psi(n)} P(B_m) > c_{13}\delta_1.$$

Соотношение (15) доказано.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
19.III.1969

Литература

1. В. В. Петров, О связи между оценкой остаточного члена в центральной предельной теореме и законом повторного логарифма, Теория вероятн. и ее прим., II, № 3 (1966), 514–518.
2. Н. Калинаускайте, О верхних и нижних функциях для устойчивых случайных процессов. I, Лит. матем. сб., V, № 4 (1965), 541–553.
3. W. Feller, The general form of the so-called law of the iterated logarithm, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 54 (1943), 373–402.

VIRŠUTINIŲ IR APATINIŲ FUNKCIJŲ NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMOMS IR NORMUOJANČIO DAUGIKLIO AUGIMO GREIČIO KLAUSIMU

N. Kalinauskaitė

(*Reziumė*)

Straipsnyje gautos sąlygos nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų viršutinėms ir apatinėms funkcijoms, įvedant reikalavimus normuojančio daugiklio augimo greičiui.

ON THE RATE OF GROWTH OF NORMING MULTIPLE AND THE UPPER AND LOWER FUNCTIONS OF THE SUM OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

N. Kalinauskaitė

(*Summary*)

Let S_n be a sum of independent random variables

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$

with $M\xi_k=0$, $G_\alpha(x)$, $\alpha\in([1, 2]$ – the stable distribution function (with characteristic function (2). The continuous convex monotone increasing function $\psi(t)$ is called the upper function, if $P\left\{\limsup\left(S_n>\psi(n)\right)\right\}=0$ and – the lower one, if $P\left\{\limsup\left(S_n>\psi(n)\right)\right\}=1$.

The following theorem is proved.

THEOREM. *Let $\alpha\in(1, 2)$ and the continuous convex function $\varphi(t)\uparrow\infty$ satisfy the condition*

$$B^{-1}(\alpha)(1-\varepsilon)\ln\ln t\leqslant\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t)<(1+\varepsilon)B^{-1}(\alpha)\ln\ln t.$$

Let the sequence (1) *satisfy, the conditions:*

$$\inf_{m,n} P\{S_n-S_m>0\}=c_0>0$$

and there exist positive numbers

$$b_n\uparrow\infty\quad(n\to\infty)\quad\text{and}\quad\frac{b_{n+1}-b_n}{b_n}\leqslant\frac{c_1}{\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(b_n)}$$

where $c_0<c_1<1$, such that for some $\delta>0$

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|P\{S_n<x b_n^{\frac{1}{\alpha}}\}-G_\alpha(x)\right|=O\left(\frac{1}{(\ln b_n)^{1+\delta}}\right)$$

The function $\psi(n)=b_n^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(b_n)$ is upper function if the integral

$$\int^{\infty}\frac{1}{t}\varphi^{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t)\exp\{-B(\alpha)\varphi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t)\}\,dt$$

converges and the lower one if it diverges.