X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК–517.946

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Е. К. Ненишките

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение типа Фукса

$$\sum_{k=0}^{n} z^{n-k} F_k(z)\, w^{(n-k)} = 0, \qquad F_0(0) \neq 0,$$

где все функции $F_k(z)$ регурярны в некотором круге $|z| < R$, имеет всегда решение вида

$$w = z^{\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}$$

с комплексным показателем λ, являющимся корнем характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} C_{\lambda}^{k} k!\, F_{n-k}(0) = 0,$$

причем ни одно из чисел $\lambda+1$, $\lambda+2$, $\lambda+3$, ему не удовлетворяет.

Ш. И. Стрелиц в [1], И. В. Киселюс в [2] рассматривали дифференциальные уравнения в частных производных, являющиеся до некоторой степени аналогом уравнений типа Фукса, где, в отличие от уравнений одного переменного, требовалось выполнение некоторого условия эллиптичности, обеспечивающего существование решения. Систему аналогичных дифференциальных уравнений в своих работах исследовал Ф. И. Гече.

Цель нашей работы – обобщить соответствующие результаты Ш. И. Стрелица и И. В. Киселюса для уравнений в частных производных.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть в уравнении с частными производными*

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} F^{l}_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m) \frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots i_m} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \ldots \partial z_m^{i_m}} = 0, \tag{1}$$

$$z_j = x_j + i y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

коэффициенты $F_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ суть абсолютно сходящиеся в некоторой области $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ряды Дирихле:

$$F^{l}_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} e^{-\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(k)} z_j} \tag{2}$$

причем $\lambda_1^{(0)}=\lambda_2^{(0)}=\ldots=\lambda_m^{(0)}=0$, $\lambda_j^{(k)}\geqslant 0$ $(j=1,2,\ldots,m;\quad k=1,2,\ldots)$

и

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{(k)}=\mu_k\underset{k\to\infty}{\nearrow}\infty\,. \tag{3}$$

Пусть, далее, однородная форма

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} A_0^{(i_1 i_2\ldots i_m)}\eta_1^{i_1}\eta_2^{i_2}\ldots\eta_m^{i_m} \tag{4}$$

не обращается в нуль ни при каких неотрицательных $\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\eta_m$; $\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_m=1$.

Пусть, наконец,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\mu_n}=\rho<\infty\,. \tag{5}$$

В этих условиях существует бесконечное множество линейно независимых решений вида

$$u=e^{\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j z_j}f(z_1,z_2,\ldots,z_m), \tag{6}$$

где $(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m)$ — *корень характеристического уравнения*

$$Q(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m)=\sum_{l=0}^{n}\ \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} A_0^{(i_1 i_2\ldots i_m)}\eta_1^{i_1}\eta_2^{i_2}\eta_m^{i_m}=0\,, \tag{7}$$

а функция $f(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m)$ — *абсолютно сходящийся в некоторой области* $G_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ *ряд Дирихле*:

$$f(z_1,z_2,\ldots,z_m)=\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_k=1}^{\infty} a_{l_1 l_2\ldots l_k}e^{-\sum\limits_{j=1}^{2}(\lambda_j^{(l_1)}+\lambda_j^{(l_2)}+\ldots+\lambda_j^{(l_k)})z_j} \tag{8}$$

В частности, если для всех $i_1,i_2,\ldots,i_m$ *с* $i_1+i_2+\ldots+i_m=n$ $F^n_{i_1 i_2\ldots i_m}\equiv$ $=\mathrm{const}$, *то ряд* (8) *сходится абсолютно в области* $G_0(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)\subset$ $\subset G(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ *с границей, отстоящей от границы* $G(x_1,x_2,\ \ldots,\ x_m)$ *на* ρ.

Замечание. Известно (см. [3]), что область абсолютной сходимости рядов Дирихле

$$\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_{m_k}z_k}$$

выпукла. Заметим еще, что в нашем случае, если ряд Дирихле (2) сходится в точке $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0)$, то он сходится во всех точках $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ с $x_j\geqslant$ $\geqslant x_j^0$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$.

2. Теорему будем доказывать в случае двух независимых комплексных переменных, т.е. когда $m=2$. Доказательство в случае нескольких переменных ничем существенно не отличается от приведенного ниже доказательства.

Перед тем, как перейти к доказательству, предварительно отметим некоторые факты, которые нам будут нужны позже.

1. Коэффициенты абсолютно сходящегося в некоторой области G ряда Дирихле

$$f(z_1,z_2)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-(\lambda_1^{(j)}z_1+\lambda_2^{(j)}z_2)} \tag{9}$$

оцениваются следующим образом:

$$|a_k|\leqslant S(x_j,f)\, e^{\lambda_1^{(k)}x_1+\lambda_2^{(k)}x_2} \tag{10}$$

где

$$S(x_k,f)=\sup_{\substack{-\infty<y_k<+\infty\\(k=1,2)}}|f(x_k+iy_k)|\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\,e^{-(\lambda_1^{(j)}x_1+\lambda_2^{(j)}x_2)}\ \Big((x_1,x_2)\in G\Big) \tag{11}$$

Действительно, умножим равенство (9) на $e^{\lambda_1^{(k)}z_1+\lambda_2^{(k)}z_2}$ и проинтегрируем его при постоянных x_i по y_i $(i=1,2)$:

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} f(z_1,z_2)\,e^{\lambda_1^{(k)}z_1+\lambda_2^{(k)}z_2}\,dy_1\,dy_2=$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}e^{-[(\lambda_1^{(j)}-\lambda_1^{(k)})z_1+(\lambda_2^{(j)}-\lambda_2^{(k)})z_2]}dy_1\,dy_2\,. \tag{12}$$

Когда $\lambda_i^{(j)}\neq\lambda_i^{(k)}$ $(i=1,2)$, имеем:

$$\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}e^{-[i(\lambda_1^{(j)}-\lambda_1^{(k)})y_1+i(\lambda_2^{(j)}-\lambda_2^{(k)})y_2]}\,dy_1\,dy_2=$$
$$=\frac{1}{T^2}\,\frac{1}{(\lambda_1^{(j)}-\lambda_1^{(k)})\,(\lambda_2^{(j)}-\lambda_2^{(k)})}\,\sin(\lambda_1^{(j)}-\lambda_1^{(k)})\,T\sin(\lambda_2^{(j)}-\lambda_2^{(k)})\,T,$$

и

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}e^{-[i(\lambda_1^{(j)}-\lambda_1^{(k)})y_1+i(\lambda_2^{(j)}-\lambda_2^{(k)})y_2]}\,dy_1\,dy_2=\begin{cases}0, & j\neq k,\\ 1, & j=k.\end{cases} \tag{13}$$

Кроме того,

$$\left|\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}f(z_1,z_2)\,e^{\lambda_1^{(k)}z_1+\lambda_2^{(k)}z_2}\,dy_1\,dy_2\right|\leqslant e^{\lambda_1^{(k)}x_1+\lambda_2^{(k)}x_2}\,S(x_j,f)\,.$$

Отсюда, из (12) и (13) и следует требуемое неравенство (10).

2. Нам будет полезна следующая лемма.

Лемма. *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l}A^l_{i_1 i_2}\frac{\partial^{i_1+i_2}u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}=e^{\beta_1z_1+\beta_2z_2}\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-(\lambda_1^{(k)}z_1+\lambda_2^{(k)}z_2)} \tag{14}$$

где

$$z_j=x_j+i\,y_j,\qquad \mu_k=\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}\underset{k\to\infty}{\nearrow}\infty,\qquad 0\leqslant\mu_1<\mu_2<$$

$\beta_j\,(j=1,2)$, $A^l_{i_1i_2}$, a_k — *комплексные числа, а ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-(\lambda_1^{(k)}z_1+\lambda_2^{(k)}z_2)}$ *абсолютно сходится в некоторой области* $E\,(x_1,x_2)$.

Предположим, 1 *что ни одна из пар чисел*

$$(\beta_1-\lambda_1^{(k)},\ \beta_2-\lambda_2^{(k)}) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

не является корнем характеристического уравнения

$$Q(\eta_1,\eta_2)=\sum_{l=0}^{n}\sum_{l_1+l_2=l}A^{l}_{l_1 l_2}\eta_1^{l_1}\eta_2^{l_2}=0 \tag{15}$$

и 2 *что однородная форма*

$$Q_0(\eta_1,\eta_2)=\sum_{l_1+l_2=n}A^{n}_{l_1 l_2}\eta_1^{l_1}\eta_2^{l_2} \tag{16}$$

не обращается в нуль ни для каких $\eta_j\geqslant 0$ $(j=1,2)$ *с* $\eta_1+\eta_2=1$.

Тогда уравнение (14) *имеет решение, представляемое абсолютно сходящимся в области* E *рядом Дирихле*

$$u=e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{Q(\beta_1-\lambda_1^{(k)},\ \beta_2-\lambda_2^{(k)})}\,e^{-(\lambda_1^{(k)}z_1+\lambda_2^{(k)}z_2)}. \tag{17}$$

Доказательство. Из необращения в нуль однородной формы (16) следует, что можно подобрать два числа β_1, β_2 так, чтобы числа $\beta_1-\lambda_1^{(k)}$, $\beta_2-\lambda_2^{(k)}$ не удовлетворяли уравнению (15) ни при каких $\lambda_1^{(k)}$, $\lambda_2^{(k)}$, а пара β_1, β_2 удовлетворяла этому уравнению, т.е., чтобы

$$Q(\beta_1,\beta_2)=0, \qquad Q(\beta_1-\lambda_1^{(k)},\ \beta_2-\lambda_2^{(k)})\neq 0, \qquad k=1,2,\ldots \tag{18}$$

В самом деле, разлагая полином $Q(\eta_1,\eta_2)$ по однородным полиномам

$$Q(\eta_1,\eta_2)=\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu(\eta_1,\eta_2) \tag{19}$$

$\Big(A_\nu,(\eta_1,\eta_2)$ — однородный полином степени $\nu\Big)$, мы замечаем, что

$$A_n(\eta_1,\eta_2)=Q_0(\eta_1,\eta_2).$$

Полагая в формуле (19) $\eta_1=\beta_1-\lambda_1^{(k)}$, $\eta_2=\beta_2-\lambda_2^{(k)}$, получаем:

$$Q(\beta_1-\lambda_1^{(k)},\ \beta_2-\lambda_2^{(k)})=\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu(\beta_1-\lambda_1^{(k)},\ \beta_2-\lambda_2^{(k)})=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}(\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)})^{\nu}A_\nu\left(\frac{\beta_1-\lambda_1^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}},\ \frac{\beta_2-\lambda_2^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}}\right)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}(\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)})^{\nu}\left[A_\nu\left(\frac{\lambda_1^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}},\ \frac{\lambda_2^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}}\right)+\varepsilon_\nu\right],$$

где $\varepsilon_\nu\to 0$, когда $\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}\to\infty$. При достаточно больших $\mu_k=\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}$ последний полином A_n в нуль не обращается, так как $|\,Q_0(\eta_1,\eta_2)\,|$ имеет положительный минимум при условии $\eta_1+\eta_2=1$. Тогда, обозначив этот минимум через α, мы видим, что при $\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}>\Lambda$

$$|\,Q(\beta_1-\lambda_1^{(k)},\ \beta_2-\lambda_2^{(k)})\,|>(\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)})^{n}\Bigg|\,\alpha-\varepsilon(\Lambda)-$$

$$-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{(\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)})^{n}}\left|\,A_\nu\left(\frac{\beta_1-\lambda_1^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}},\ \frac{\beta_2-\lambda_2^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}}\right)\right|\Bigg|, \tag{20}$$

причем $\varepsilon(\Lambda)$ и выражение под знаком суммы стремится к нулю при $\Lambda\to\infty$. Значит, при достаточно больших μ_k выражение $Q(\beta_1-\lambda_1^{(k)}, \beta_2-\lambda_2^{(k)})$ в нуль не обращается.

Пусть (β_1, β_2) – решение уравнения (15). Допустим, что все пары $(\beta_1-\lambda_1^{(k)}, \beta_2-\lambda_2^{(k)})$, $(k=1, 2, \ldots, N)$ также удовлетворяют уравнению (15) (как уже было сказано, таких решений может быть только конечное число).

Пусть $\beta_1-\lambda_1^*=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant N}(\beta_1-\lambda_1^{(k)})$. Пусть, далее $(\beta_1-\lambda_1^*, \beta_2-\lambda_2^{*(j)})$ $(j=1, 2,\ldots,N_0)$ – все пары из приведенной выше совокупности с фиксированным первым членом $\beta_1-\lambda_1^*$. Обозначим наконец

$$\min_{1\leqslant j\leqslant N_0}(\beta_2-\lambda_2^{*(j)})=\beta_2-\lambda_2^*$$

Пара чисел $(\beta_1-\lambda_1^*, \beta_2-\lambda_2^*)$, которая очевидно удовлетворяет уравнению (15) и обладает нужными свойствами (18), т.е.:

$$Q(\beta_1-\lambda_1^*, \beta_2-\lambda_2^*)=0, \qquad Q(\beta_1-\lambda_1^*-\lambda_1^{(k)}, \beta_2-\lambda_2^*-\lambda_2^{(k)})\neq 0,$$
$$k=1,2,$$

Так как для любой пары (β_1, β_2) $Q(\beta_1, \beta_2)=0$ возможно провести указанные рассуждения, то отсюда вытекает, что существует бесконечное множество пар чисел со свойством (18).

Далее будем считать, что пара (β_1, β_2) удовлетворяет требованию (18).

Непосредственной подстановкой легко убеждаемся, что функция

$$u=\frac{a_k}{Q(\beta_j-\lambda_j^{(k)})}e^{(\beta_1-\lambda_1^{(k)})z_1+(\beta_2-\lambda_2^{(k)})z_2}$$

удовлетворяет уравнению

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l}A^l_{i_1i_2}\frac{\partial^{i_1+i_2}u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}=e^{\beta_1z_1+\beta_2z_2}a_ke^{-(\lambda_1^{(k)}z_1+\lambda_2^{(k)}z_2)}$$

Для доказательства абсолютной сходимости ряда (7) оценим выражение $|Q(\beta_j-\lambda_j^{(k)})|$ снизу. Из неравенства (20) следует, что

$$|Q(\beta_j-\lambda_j^{(k)})|>c(\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)})^n=c\mu_k^n, \qquad k>k_0. \tag{21}$$

Так как у нас $Q(\beta_1-\lambda_1^{(k)}, \beta_2-\lambda_2^{(k)})\neq 0$ ни при каких $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots)$, значит, постоянную $c>0$ можно выбрать такую, чтобы это неравенство было верно и для $k\leqslant k_0$.

Таким образом, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{Q(\beta_j-\lambda_j^{(k)})}e^{-(\lambda_1^{(k)}z_1+\lambda_2^{(k)}z_2)}$$

при $\operatorname{Re} z_j\geqslant x_j^0$ $(j=1, 2)$ мажорируется числовым рядом

$$c_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\mu_k^n}e^{-(\lambda_1^{(k)}x_1^0+\lambda_2^{(k)}x_2^0)}$$

который, согласно условиям леммы, сходится в области E.

Наша лемма доказана.

3. Теорему будем доказывать при предположении, что $Q(\beta_1, \beta_2)=0$ и ни одна из пар $\beta_1-\lambda_1^{(k)}$, $\beta_2-\lambda_2^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots)$, не является корнем характеристического уравнения (26) (таких пар, как мы показали в п. 2, бесконечное множество).

Доказательство теоремы. Вместо уравнения (1) рассмотрим дифференциальное уравнение, зависящее от параметра ν:

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} = \nu \sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} [F_{i_1 i_2}^{l}(z_1, z_2)-A_0^{(i_1 i_2)}]\times$$

$$\times \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} \tag{22}$$

Очевидно, при $\nu=-1$ уравнение (22) переходит в (1).

Докажем существование решений вида (7) при $|\nu|\leqslant 1+a$ $(a>0)$ (в частности и при $\nu=-1$) в соответствующей области $G_a(x_1, x_2)$.

Будем искать решение уравнения (22) в виде степенного ряда по ν:

$$u=\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z_1, z_2)\,\nu^k. \tag{23}$$

Подставив (23) в уравнение (22), получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_k}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}\right\}\nu^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} [F_{i_1 i_2}^{l}(z_1, z_2)-A_0^{(i_1 i_2)}] \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_k}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}\right\}\nu^{k+1}$$

Сравним теперь коэффициенты у одинаковых степеней ν. Мы находим бесконечную систему равенств для определения неизвестных функций $\varphi_k(z_1, z_2)$:

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_0}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}=0, \tag{24}$$

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_k}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}=$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} [F_{i_1 i_2}^{l}-A_0^{(i_1 i_2)}] \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_{k-1}}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}, \qquad k=1, 2, \ldots \tag{25}$$

Пусть (β_1, β_2) — корень характеристического уравнения

$$Q(\eta_1, \eta_2)=\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)}\eta_1^{i_1}\eta_2^{i_2}=0. \tag{26}$$

В качестве решения уравнения (24) выберем функцию

$$\varphi_0(z_1, z_2)=e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}. \tag{27}$$

Подставим $\varphi_0(z_1, z_2)$ в первое уравнение системы (25). Имеем:

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_1}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} [F^l_{i_1 i_2} - A_0^{(i_1 i_2)}]\, \beta_1^{i_1}\beta_2^{i_2} e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}. \tag{28}$$

Но по (2):

$$F^l_{i_1 i_2}(z_1, z_2) - A_0^{(i_1 i_2)} = \sum_{p=1}^{\infty} A_p^{(i_1 i_2)}\, e^{-(\lambda_1^{(p)} z_1 + \lambda_2^{(p)} z_2)}, \tag{29}$$

так что рассматриваемое уравнение (28) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_1}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} = e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}\times$$

$$\times\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_p^{(i_1 i_2)}\beta_1^{i_1}\beta_2^{i_2}\, e^{-(\lambda_1^{(p)} z_1+\lambda_2^{(p)} z_2)} \tag{30}$$

Из доказанной в п. 2 леммы вытекает, что функция

$$\varphi_1(z_1, z_2) = e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}\sum_{p=1}^{\infty} a_p e^{-(\lambda_1^{(p)} z_1+\lambda_2^{(p)} z_2)} \tag{31}$$

с коэффициентами

$$a_p = \frac{\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_p^{(i_1+i_2)}\beta_1^{i_1}\beta_2^{i_2}}{Q(\beta_1-\lambda_1^{(p)},\ \beta_2-\lambda_2^{(p)})} \tag{32}$$

сходится абсолютно в области G и удовлетворяет уравнению (30).

Подставим дальше найденную функцию $\varphi_1(z_1, z_2)$ во второе уравнение системы (25). Это дает нам:

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_2}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} [F^l_{i_1 i_2}(z_1, z_2) - A_0^{(i_1 i_2)}]\times$$

$$\times\sum_{t=1}^{\infty} a_t(\beta_1-\lambda_1^{(t)})^{i_1}(\beta_2-\lambda_2^{(t)})^{i_2} e^{(\beta_1-\lambda_1^{(t)})z_1+(\beta_2-\lambda_2^{(t)})z_2},$$

или, в соответствии с (29):

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi_2}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}} = e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}\sum_{p,t=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2=l} a_t A_p^{(i_1 i_2)}\times$$

$$\times(\beta_1-\lambda_1^{(t)})^{i_1}(\beta_2-\lambda_2^{(t)})^{i_2}\, e^{-[(\lambda_1^{(p)}+\lambda_1^{(t)})z_1+(\lambda_2^{(p)}+\lambda_2^{(t)})z_2]} \tag{33}$$

Отсюда, в силу предыдущего, функция

$$\varphi_2(z_1, z_2) = e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}\sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} a_{l_1 l_2} e^{-[(\lambda_1^{(l_1)}+\lambda_1^{(l_2)})z_1+(\lambda_2^{(l_1)}+\lambda_2^{(l_2)})z_2]}$$

с

$$a_{l_1 l_2} = \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} (\beta_1 - \lambda_1^{(l_1)})^{i_1} (\beta_2 - \lambda_2^{(l_1)})^{i_2} \frac{a_{l_1} A_{l_2}^{(i_1 i_2)}}{Q(\beta_j - \lambda_j^{(l_1)} - \lambda_j^{(l_2)})},$$

сходясь абсолютно в области G, удовлетворяет уравнению (33).

Покажем теперь методом математической индукции, что

$$\varphi_r(z_1, z_2) = e^{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2} \sum_{l_1, l_2, \ldots l_r = 1}^{\infty} a_{l_1 l_2 \ldots l_r} e^{-\sum_{j=1}^{2} (\lambda_j^{(l_1)} + \lambda_j^{(l_2)} + \ldots + \lambda_j^{(l_r)}) z_j} \tag{34}$$

с

$$a_{l_1 l_2 \ldots l_r} = \frac{\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_{l_r}^{(i_1 i_2)} \prod_{j=1}^{2} [\beta_j - (\lambda_j^{(l_1)} + \ldots + \lambda_j^{(l_{r-1})})]^{i_j}}{Q(\beta_j - \lambda_j^{(l_1)} - \ldots - \lambda_j^{(l_r)})} a_{l_1 l_2 \ldots l_{r-1}}, \tag{35}$$

если

$$\varphi_{r-1}(z_1, z_2) = e^{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2} \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_{r-1} = 1}^{\infty} a_{l_1 l_2 \ldots l_{r-1}} e^{-\sum_{j=1}^{2} (\lambda_j^{(l_1)} + \lambda_j^{(l_2)} + \ldots + \lambda_j^{(l_{r-1})}) z} \tag{36}$$

с

$$a_{l_1 l_2 \ldots l_{r-1}} = \frac{\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_{l_{r-1}}^{(i_1 i_2)} \prod_{j=1}^{2} [\beta_j - (\lambda_j^{(l_1)} + \ldots + \lambda_j^{(l_{r-1})})]^{i_j}}{Q(\beta_j - \lambda_j^{(l_1)} - \ldots - \lambda_j^{(l_{r-1})})} a_{l_1 l_2 \ldots l_{r-2}}. \tag{37}$$

Чтобы в этом убедиться, подставляем (36) в r-тое уравнение системы (25), после чего, в силу (29) получаем:

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} A_0^{(i_1 i_2)} \frac{\partial^{i_1+i_2} \varphi_r}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} = \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_{r-1}=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} a_{l_1 l_2 \ldots l_r} \times$$

$$\times A_p^{(i_1 i_2)} \prod_{j=1}^{2} [\beta_j - (\lambda_j^{(l_1)} + \ldots + \lambda_j^{(l_{r-1})})]^{i_j} e^{\sum_{j=1}^{2} [\beta_j - (\lambda_j^{(l_1)} + \ldots + \lambda_j^{(l_{r-1})} + \lambda_j^{(p)})] z_j}$$

Из доказанной леммы (в п. 2) следует, что последнее уравнение имеет решение вида (34), но предположение индукции верно для $k=1, 2$, значит, оно верно и для любого k.

Покажем, что ряд (23) с функциями (34) сходится абсолютно в некоторой области $G_a(x_1, x_2)$ при $|\nu| \leqslant 1+a$. Для этого перейдем к оценке коэффициентов (35). Обозначим:

$$|a_{l_1 l_2 \ldots l_r}| = B_{l_1 l_2 \ldots l_r}$$

По (35)

$$B_{l_1 l_2 \ldots l_r} \leqslant \frac{1}{|Q(\beta_j - \lambda_j^{(l_1)} - \ldots - \lambda_j^{(l_r)})|} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} \prod_{j=1}^{2} |\beta_j - (\lambda_j^{(l_1)} +$$

$$+ \quad + \lambda_j^{(l_{r-1})})|^{i_j} |A_{l_r}^{(i_1 i_2)}| B_{l_1 l_2 \ldots l_{r-1}},$$

или, в согласии с (11):

$$B_{l_1 l_2 \ldots l_r} \leqslant \frac{S(x_j^0)\, e^{\lambda_1^{(l_r)} x_1^0 + \lambda_2^{(l_r)} x_2^0}}{|Q(\beta_j - \lambda_j^{(l_1)} - \ldots - \lambda_j^{(l_r)})|} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} \prod_{j=1}^{2} |\beta_j - (\lambda_j^{(l_1)} +$$

$$+ \lambda_j^{(l_2)} + \qquad + \lambda_j^{(l_{r-1})})|^{i_j} B_{l_1 l_2 \ldots l_{r-1}} \tag{39}$$

где

$$S(x_j^0) = \max_{i_1+i_2=\text{const}} S(x_j^0, F_{i_1 i_2}^l).$$

На основании оценки (21):

$$\left| Q\left(\beta_j - (\lambda_j^{(l_1)} + \ldots + \lambda_j^{(l_r)})\right) \right| > c \left[\sum_{l=1}^{r} (\lambda_1^{(l_l)} + \lambda_2^{(l_l)}) \right]^n \tag{40}$$

Нетруднс видеть, что можно подобрать постоянную c' такую, чтобы

$$|\beta_j - (\lambda_j^{(l_1)} + \ldots + \lambda_j^{(l_{r-1})})| < c'(\lambda_j^{(l_1)} + \ldots + \lambda_j^{(l_{r-1})}) \qquad (j=1,2). \tag{41}$$

Тогда

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} \prod_{j=1}^{2} |\beta_j - (\lambda_j^{(l_1)} + \ldots + \lambda_j^{(l_{r-1})})|^{i_j} \leqslant c'^n \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} \prod_{j=1}^{2} (\lambda_j^{(l_1)} +$$

$$+ \lambda_j^{(l_2)} + \ldots + \lambda_j^{(l_{r-1})})^{i_j} \leqslant c'^n \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} \prod_{j=1}^{2} (\lambda_j^{(l_1)} + \qquad + \lambda_j^{(l_{r-1})} + \lambda_j^{(l_r)})^{i_j} \leqslant$$

$$\leqslant c'' \left[\sum_{l=1}^{r} (\lambda_1^{(l_l)} + \lambda_2^{(l_l)}) \right]^n \tag{42}$$

где $c'' \geqslant nc'^n$.

Имея сейчас ввиду (40), (41) и (42), выводим:

$$B_{l_1 l_2 \ldots l_r} \leqslant \frac{c''}{c} S(x_j^0)\, e^{\lambda_1^{(l_r)} x_1^0 + \lambda_2^{(l_r)} x_2^0} B_{l_1 l_2 \ldots l_{r-1}} \tag{43}$$

Покажем, что

$$|a_{l_1 l_2 \ldots l_r}| = B_{l_1 l_2 \ldots l_r} \leqslant \bar{C}^r S^r(x_j^0) e^{\sum\limits_{i=1}^{r} (\lambda_1^{(l_i)} x_1^0 + \lambda_2^{(l_i)} x_2^0)}, \tag{44}$$

где $\bar{C}$ — некоторая постоянная.

Пусть это утверждение верно для $B_{l_1 l_2 \ldots l_{r-1}}$, т.е.:

$$B_{l_1 l_2 \ldots l_{r-1}} \leqslant \bar{C}^{r-1} S^{r-1}(x_j^0)\, e^{\sum\limits_{i=1}^{r-1} (\lambda_1^{(l_i)} x_1^0 + \lambda_2^{(l_i)} x_2^0)} \tag{45}$$

Подставим (45) в (43). Полагая $\bar{C} \geqslant \frac{c''}{c}$, находим требуемое неравенство (44).

Для завершения доказательства оценки (44) остается убедиться в том, что она верна при $r=1$. Из (11) и (21) следует, что

$$|a_{l_1}| = \left| \frac{\sum\limits_{l=0}^{n} \sum\limits_{i_1+i_2=l} A_{l_1}^{(i_1 i_2)} \beta_1^{i_1} \beta_2^{i_2}}{Q(\beta_1 - \lambda_1^{(l_1)}, \beta_2 - \lambda_2^{(l_1)})} \right| \leqslant \frac{S(x_j^0)\, e^{\lambda_1^{(l_1)} x_1^0 + \lambda_2^{(l_1)} x_2^0}}{c(\lambda_1^{(l_1)} + \lambda_2^{(l_1)})^n} \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2=l} |\beta_1|^{i_1} |\beta_2|^{i_2}$$

Подберем постоянную $C_0'>0$ такую, чтобы

$$|\beta_j|\leqslant C_0'(\lambda_1^{(l_1)}+\lambda_2^{(l_1)}), \qquad (j=1,2).$$

Тогда

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{l_1+l_2=l}|\beta_1|^{l_1}|\beta_2|^{l_2}\leqslant c'^n\sum_{l=0}^{n}\sum_{l_1+l_2=l}(\lambda_1^{(l_1)}+\lambda_2^{(l_1)})^{l_1+l_2}\leqslant c_0''(\lambda_1^{(l_1)}+\lambda_2^{(l_1)})^n,$$

где $C_0''>nC_0'^n$.

Таким образом

$$|a_{l_1}|\leqslant\frac{C_0''S(x_j^0)\,e^{\lambda_1^{(l_1)}x_1^0+\lambda_2^{(l_1)}x_2^0}}{c(\lambda_1^{(l_1)}+\lambda_2^{(l_1)})^n}(\lambda_1^{(l_1)}+\lambda_2^{(l_1)})^r\leqslant\tilde{C}\,S(x_j^0)\,e^{\lambda_1^{(l_1)}x_1^0+\lambda_2^{(l_1)}x_2^0}$$

с $\tilde{C}\geqslant\frac{C_0''}{c}$

Итак, оценка (44) верна для всех $a_{l_1l_2l_3}$..

По соответствию с оценкой (46), далее находим:

$$|e^{\beta_1z_1+\beta_2z_2}\varphi_r(z_1,z_2)|=\left|\sum_{l_1,l_2,\dots,l_r=1}^{\infty}a_{l_1l_2\dots l_r}\,e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}(\lambda_1^{(l_i)}z_1+\lambda_2^{(l_i)}z_2)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{C}^rS^r(x_j^0)\sum_{l_1,l_2,\dots,l_r=1}^{\infty}e^{-\sum\limits_{j=1}^{2}(\lambda_j^{(l_1)}+\dots+\lambda_j^{(l_r)})(x_j-x_j^0)}=$$

$$=\tilde{C}^rS^r(x_j^0)\sum_{l_1=1}^{\infty}e^{-[\lambda_1^{(l_1)}(x_1-x_1^0)+\lambda_2^{(l_1)}(x_2-x_2^0)]}\cdot\dots$$

$$\times\sum_{l_r=1}^{\infty}e^{-[\lambda_1^{(l_r)}(x_1-x_1^0)+\lambda_2^{(l_r)}(x_2-x_2^0)]} \tag{46}$$

Остается показать, что ряды

$$g(x_j-x_j^0)=\sum_{l_i=1}^{\infty}e^{-[\lambda_1^{(l_i)}(x_1-x_1^0)+\lambda_2^{(l_i)}(x_2-x_2^0)]} \tag{47}$$

сходятся в некоторой области $G_2(x_1,x_2)$.

Положим

$$\min_{j=1,2}(x_j-x_j^0)=h, \qquad \lambda_1^{(l_i)}+\lambda_2^{(l_i)}=\mu_{l_i}.$$

Через $n(t)$ обозначим функцию плотности последовательности $\{\mu_k\}$. В этих обозначениях перепишем условие (5) следующим образом:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln n(t)}{t}=\rho<\infty \tag{48}$$

Тогда

$$\sum_{l_i=1}^{\infty}e^{-\lambda_1^{(l_i)}(x_1-x_1^0)-\lambda_2^{(l_i)}(x_2-x_2^0)}\leqslant\sum_{l_i=1}^{\infty}e^{-\mu_{l_i}h}=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-ht}d\big(n(t)\big)=e^{-th}n(t)\Big|_0^{\infty}+h\int_0^{\infty}e^{-th}n(t)\,dt. \tag{49}$$

Из условия (48) вытекает, что

$$n(t) < C(\varepsilon)\, e^{t(\rho+\varepsilon)}$$

и

$$e^{-th} n(t) < C(\varepsilon)\, e^{-t(h-\rho-\varepsilon)}. \tag{50}$$

Полагая $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $h-\rho-\varepsilon > 0$, имеем:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-th} n(t) \leqslant C(\varepsilon) \lim_{t\to\infty} e^{-t(h-\rho-\varepsilon)} = 0.$$

Кроме того, $n(0)=0$. При $h > \rho+\varepsilon$ в согласии с (50) из (49) получаем:

$$h \int_0^\infty e^{-th} n(t)\, dt < h C(\varepsilon) \int_0^\infty e^{-t(h-\rho-\varepsilon)}\, dt = \frac{h}{h-\rho-\varepsilon} C(\varepsilon) < \infty. \tag{51}$$

Итак, функция $g(x_j - x_j^0)$ ограничена, когда $\mathrm{Re}\, z_j = x_j \geqslant x_j^0 + \rho$. Следовательно сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2} \varphi_k(z_1, z_2)\, \nu^k \tag{52}$$

при $\mathrm{Re}\, z_j \geqslant x_j^0 + \rho$ мажорируется рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ \bar{C} S(x_j^0)\, g(\rho)\, |\nu| \}^k. \tag{53}$$

Но по (11) $x_j > x_j^0$ можно выбрать так, чтобы было $C S(x_j^0)\, p < \frac{1}{1+a}$ $(a>0)$, где

$$p = \frac{h}{h-\rho-\varepsilon} = \frac{\rho+\delta}{\rho+\delta-\rho-\varepsilon} = \frac{\rho+\delta}{\delta-\varepsilon}.$$

При таких $\mathrm{Re}\, z_j = x_j > x_j^0 + \rho$ ряд (53), сходится, когда

$$|\nu| \leqslant 1 + a$$

(в частности и при $\nu = -1$).

Можно значительно улучшить оценку коэффициентов $a_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ когда для всех $i_1 + i_2 = n$ функции

$$F^{n}_{i_1 i_2}(z_1, z_2) \equiv \mathrm{const}.$$

Действительно, когда в правой стороне уравнения (22) суммирование берется до $n-1$. Коэффициенты $a_{l_1 \ldots l_r}$ приобретают следующий вид:

$$a_{l_1 l_2 \ldots l_r} = \frac{\sum\limits_{l=0}^{n-1} \sum\limits_{i_1+i_2=l} A^{(i_1 i_2)}_{l_r} [\beta_1 - (\lambda_1^{(l_1)} + \ldots + \lambda_1^{(l_{r-1})})]^{i_1} [\beta_2 - (\lambda_2^{(l_1)} + \ldots + \lambda_2^{(l_{r-1})})]^{i_2}}{Q(\beta_1 - \lambda_1^{(l_1)} - \ldots - \lambda_1^{(l_r)},\ \beta_2 - \lambda_2^{(l_1)} - \ldots - \lambda_2^{(l_r)})}\, a_{l_1 l_2 \ldots l_{r-1}}.$$

В силу предыдущих соображений выполняется неравенство:

$$|a_{l_1 l_2 \ldots l_r}| \leqslant \frac{\bar{C}^r S^r (x_j^0)}{r!}\, e^{(\lambda_1^{(l_1)} + \ldots + \lambda_1^{(l_r)}) x_1^0 + (\lambda_2^{(l_1)} + \ldots + \lambda_2^{(l_r)}) x_2^0},$$

где

$$\bar{C} \geqslant \frac{(n-1)\, c'^{\,n-1}}{c \mu_{l_t}}, \quad a \quad \mu_{l_t} = \min_{1 \leqslant l \leqslant r} (\lambda_1^{(l_l)} + \lambda_2^{(l_l)}).$$

Мажорантой ряда (52) при $\mathrm{Re}\, z_j = x_j \geqslant x_j^0 + \rho$ будет ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{\bar{C}S(x_j^0)\, g(\rho) \mid \nu \mid\}^k}{k!}, \tag{54}$$

который сходится для всех значений $|\nu|$. Так как интеграл (49) сходится при $x_j - x_j^0 \geqslant \rho$, то из сказанного следует, что ряд (54) сходится в области $G_0(x_1, x_2) \subset G(x_1, x_2)$, граница которой отстоит от границы области $G(x_1, x_2)$ на ρ.

Пользуясь случаем, приношу благодарность доктору Ш. И. Стрелицу, предложившему мне эту тему и оказавшему необходимую помощь.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 31.III.1969

Литература

1. Ш. И. Стрелиц, Аналог теоремы Фукса для решений линейных уравнений в частных производных, Мат., сб., т. 60 (102), № 2 (1963).
2. И. В. Киселюс, Аналитические решения одного класса линейных уравнений в частных производных. Лит. матем. сб., V, № 1 (1965), 85–96.
3. G. Peyser, On the domein of absolute convergence of Dirichlet series in several variables Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, N 4, 545–550.

APIE VIENĄ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SU DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS SPRENDINIŲ KLASĘ

E. Neniškytė

(*Reziumė*)

Darbe įrodyta šitokia teorema.

Teorema. *Sakykime, kad lygtyje su dalinėmis išvestinėmis*

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m) \frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_m} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \ldots \partial z_m^{i_m}} = 0,$$

$$z_j = x_j + i y_j \quad (j = 1, 2, \quad , m)$$

koeficientai $F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *yra srityje* $G(x_1, x_2, \ \ldots, x_m)$ *absoliučiai konverguojančios Dirichle eilutės:*

$$F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2 \ldots z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} e^{-\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(k)} z_j}$$

$$\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \ldots = \lambda_m^{(0)} = 0, \quad \lambda_j^{(k)} \geqslant 0 \ (j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots), \ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(k)} = \mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Sakykime, homogeninė forma

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} A_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} \eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2} \ldots \eta_m^{i_m}$$

nevirsta nuliu, kai $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ – neneigiami, ir $\eta_1 + \eta_2 + \quad + \eta_m = 1$.

Tarkime, kad

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\mu_n} = \rho < \infty.$$

Esant šioms sąlygoms, egzistuoja be galo daug tiesiškai nepriklausomų sprendinių

$$u = e^{\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j z_j} f(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

kur $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ – charakteringosios lygties

$$Q(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} A_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} \eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2} \ldots \eta_m^{i_m} = 0$$

sprendinys, o funkcija $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ yra absoliučiai konverguojanti srityje $G_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Dirichle eilutė:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_k=1} a_{l_1 l_2 \ldots l_k} e^{-\sum\limits_{j=1}^{2} (\lambda_j^{(l_1)} + \lambda_j^{(l_2)} + \ldots + \lambda_j^{(l_k)}) z_j} \tag{1}$$

Atskiru atveju, kai visiems $i_1, i_2, \ldots, i_m$ su $i_1+i_2+ \ldots +i_m=n$ $F^n_{i_1 i_2 \ldots i_m} \equiv 0$, (1) eilutė konverguoja absoliučiai srityje $G_0(x_1, x_2, \ldots, x_m) \subset G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ su kontūru, nutolusiu nuo srities $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ kontūro atstumu ρ.

ÜBER EINE KLASSE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

E. Neniškytė

(*Zusammenfassung*)

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir den folgenden

Satz. Es seien die Koeffizienten $F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots z_m)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m) \frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_m} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \ldots \partial z_m^{i_m}} = 0,$$

$$z_j = x_j + iy_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

in dem Gebiet $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ absolut konvergente Dirichletsche Reihen

$$F^l_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} e^{-\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^{(k)} z_j}$$

mit

$$\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \ldots = \lambda_m^{(0)} = 0, \ \lambda_j^{(k)} \geqslant 0 \ (j=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots), \ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(k)} = \mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Es sei, weiter, die homogene Form

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} A_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)} \eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2} \ldots \eta_m^{i_m}$$

verschieden von Null für alle nichtnegative $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$; $\eta_1+\eta_2+ \ldots +\eta_m = 1$ und

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\mu_n} = \rho < \infty.$$

Dann existiert eine unendliche Menge linearunabhängigen Lösungen der Form

$$u=e^{\sum_{j=1}^{m}\beta_j z_j} f(z_1, z_2, \quad z_m),$$

wo $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung

$$Q(\eta_1, \eta_2, \quad \eta_m)=\sum_{l=0}^{n}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=l} A_0^{(i_1 i_2 \ldots i_m)}\eta_1^{i_1}\eta_2^{i_2}\ldots\eta_m^{i_m}=0$$

ist und wo die Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ in dem Gebiet $G_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ als eine absolut konvergente Dirichlet'sche Reihe

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_m)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l_1, l_2, \ldots, l_k=1} a_{l_1 l_2 \ldots l_k} e^{-\sum_{j=1}^{2}(\lambda_j^{(l_1)}+\lambda_j^{(l_2)}+\ldots+\lambda_j^{(l_k)})z_j} \tag{1}$$

darstellbar ist.

Im besonderen Falle, wenn die Funktionen $F^n_{i_1 i_2 \ldots i_m}\equiv 0$ für alle $i_1, i_2, \ldots, i_m$ mit i_1+i_2+ $+\ldots+i_m=n$ seien, konvergiert die Reihe (1) in dem Gebiet $G_0(x_1, x_2, \ldots, x_m)\subset G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, dessen Rand von der Grenze des Gebietes $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ um ρ entfernt ist.