X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
1970

УДК – 519.21

ОБ ОСТАТОЧНЫХ ЧЛЕНАХ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. Пипирас

§ 1. Результаты

Математическое ожидание некоторой случайной величины ξ обозначим через $\mathbf{M}\xi$, функцию распределения – F_ξ, характеристическую функцию – f_ξ, k-ый семиинвариант $-\gamma_{k\xi}$.

Также обозначим

$$\sigma_\xi^2=\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)^2, \quad \alpha_{k\xi}=\mathbf{M}\xi^k, \quad \beta_{k\xi}=\mathbf{M}\,|\,\xi\,|^k.$$

Будем рассматривать последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n, \tag{1}$$

при условии $\mathbf{M}\xi_i=0\ (i=1,\ 2,\ \quad,\ n)$.

Обозначим

$$S_n=\sum_{i=1}^n \xi_i, \quad Z_n=\frac{S_n}{B_{S_n}}, \quad B_{S_n}^2=\sigma_{S_n}^2\,,$$

$$B_{kS_n}=\sum_{i=1}^n \beta_{k\xi_i}, \quad L_{kS_n}=\frac{B_{kS_n}}{B_{S_n}^k}, \quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Теорема 1. *Если для целого* $s\geqslant 3$ $\beta_{s\xi_i}<\infty$ $(i=1,\ 2,\quad n)$, *то*

$$|F_{Z_n}(x)-\Phi(x)|\leqslant\Theta_1(s)\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n\ \int\limits_{|u|\leqslant B_{S_n}} |u|^3\,dF_{\xi_i}(u)}{B_{S_n}^3(1+|x|)^{s+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sum\limits_{i=1}^n\ \int\limits_{|u|>B_{S_n}(1+|x|)} |u|^s\,dF_{\xi_i}(u)}{B_{S_n}^s(1+|x|)^s}+\frac{\sum\limits_{i=1}^n\ \int\limits_{|u|\leqslant B_{S_n}(1+|x|)} |u|^{s+1}\,dF_{\xi_i}(u)}{B_{S_n}^{s+1}(1+|x|)^{s+1}}\right)$$

Здесь $\Theta_1(s)$ – константа, зависящая только от аргумента s. Ниже часто будем использовать это обозначение, иногда одинаковое для различных констант.

Теорема 2. *Если для любого числа* $r\leqslant 3$ $\beta_{r\xi_i}<\infty(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, *то*

$$|F_{Z_n}(x)-\Phi(x)|\leqslant\Theta_2(r)\frac{1}{(1+|x|)^r}\,(L_{3S_n}+L_{rS_n}).$$

Это утверждение следует из теоремы 1 при $s=[r]$, если применить неравенства

$$\int\limits_{|u|>B_{S_n}(1+|x|)} |u|^s \, dF_{\xi_i}(u) \leqslant \left(B_{S_n}(1+|x|)\right)^{s-r} \int\limits_{|u|>B_{S_n}(1+|x|)} |u|^r \, dF_{\xi_i}(u), \qquad (2)$$

$$\int\limits_{|u|\leqslant B_{S_n}(1+|x|)} |u|^{s+1} \, dF_{\xi_i}(u) \leqslant \left(B_{S_n}(1+|x|)\right)^{s+1-r} \times$$

$$\int\limits_{|u|\leqslant B_{S_n}(1+|x|)} |u|^r \, dF_{\xi_i}(u). \qquad (3)$$

Заметим, что этой теоремой обобщается известная оценка для $|F_{Z_n}(x)-\Phi(x)|$ А. Бикялиса [1].

Обозначим асимптотическое разложение $F_{Z_n}(x)$ по дробям Ляпунова $L_{\nu S_n}$ через

$$\Phi_{sZ_n}(x)=\Phi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{\nu=1}^{s-2} Q_{\nu S_n}(x)\, L_{\nu+2, S_n},$$

где [8]

$$Q_{\nu S_n}(x)=\sum_{m=1}^{3\nu} a_{m\nu n}\, x^{m-1},$$

$a_{m\nu n}=0$, если m и ν неодинаковой четности, и

$$a_{m\nu n} L_{\nu+2, S_n}=$$

$$=\frac{1}{(m-1)!} \sum_{\substack{l\geqslant 0 \\ \nu+2\leqslant m+2l\leqslant 3\nu}} \frac{(-1)^l (m+2l-1)!}{2^l\, l!\, \mu!\, B_{S_n}^{m+2l}} \sum_{\substack{\nu_1,\, \dots,\, \nu_\mu \geqslant 3 \\ \nu_1+\dots+\nu_\mu=m+2l \\ 2\mu=m+2l-\nu}} \frac{\gamma_{\nu_1 S_n}\cdots\gamma_{\nu_\mu S_n}}{\nu_1!\cdots\nu_\mu!} \qquad (4)$$

в противном случае.

Пусть $F_i(x)$ — абсолютно непрерывная компонента функции $F_{\xi_i}(x)$ с весом a_i, т. е.

$$F_{\xi_i}(x)=a_i F_i(x)+(1-a_i) S_i(x)=a_i \int\limits_{-\infty}^{x} p_i(x)\, dx+(1-a_i) S_i(x),$$

$$d_i=F_i(B_{S_n})-F_i(-B_{S_n}),$$

$$\bar{p}_i(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{d_i}\, p_i(x), & \text{если } |x|\leqslant B_{S_n}, \\ 0, & \text{если } |x|>B_{S_n},\ d_i>0. \end{cases}$$

$$\bar{p}_i(x)\equiv 0, \quad \text{если} \quad d_i=0,$$

$$\bar{\bar{p}}_i(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_i(x+y)\, \bar{p}_i(y)\, dy,$$

$\mathfrak{M}_i = \{ \Delta_{i\nu}, \ C_{i\nu}, \ \nu = 1, \ 2, \ \ldots \}$ — любой набор непересекающихся интегралов длины $|\Delta_{i\nu}|$ и положительных констант $C_{i\nu} \leqslant \infty$,

$$Q_{i\nu} = \int\limits_{\Delta_{i\nu}} \min \{ C_{i\nu}, \ \bar{\bar{p}}_i(x) \, dx,$$

$$\alpha(\mathfrak{M}_i, \ N) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Q_{i\nu}^3}{(|\Delta_{i\nu}| + 2N)^2 C_{i\nu}^2}, \quad N > 0 \quad (i = 1, \qquad n).$$

Теорема 3. *Если для целого* $s \geqslant 3$ $\beta_{s\xi_i} < \infty$ $(i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n)$, *то*

$$|F_{Z_n}(x) - \Phi_{sZ_n}(x)| \leqslant \Theta_3(s) \left(\frac{1}{B_{S_n}(1+|x|)^s} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|u| > B_{S_n}(1+|x|)} |u|^s \, dF_{\xi_i}(u) + \right.$$

$$+ \frac{1}{B_{S_n}^{s+1}(1+|x|)^{s+1}} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|u| \leqslant B_{S_n}(1+|x|)} |u|^{s+1} \, dF_{\xi_i}(u) +$$

$$\left. + \frac{\ln(1+n)}{(1+|x|)^{s+1}} (1 + L_{1S_n}^{s+1}) \exp \left\{ -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} a_i d_i \alpha(\mathfrak{M}_i, \ 24 B_{S_n} L_{3S_n}) \right\} \right). \quad (5)$$

Здесь же заметим, что $L_{1S_n} \leqslant \sqrt{n}$.

Введем условия.

Условие A. При $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i d_i}{(\bar{\sigma}_i^2 + B_{S_n}^2 L_{3S_n}^2) C_i^2} \to \infty,$$

где $\bar{\sigma}_i^2$ — дисперсия распределения с плотностью $\bar{p}_i(x)$, а константы $C_i \leqslant \infty$ определяются неравенствами $\bar{p}_i(x) \leqslant C_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Условие B. Для некоторого числа $\tau < 1$

$$\frac{1}{B_{sS_n}} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|u| > (B_{S_n}(1+|x|))^\tau} |u|^s \, dF_{\xi_i}(u) \to 0, \text{ когда } B_{S_n}(1+|x|) \to \infty.$$

Теорема 4. *Если* $\beta_{s\xi_i} < \infty$ $(s \geqslant 3$ *целое*$)$, $i = 1, \ 2, \qquad n$, *и имеют место условия* A *и* B, *то*

$$|F_{Z_n}(x) - \Phi_{sZ_n}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon\left(B_{S_n}(1+|x|)\right)}{(1+|x|)^s} L_{sS_n},$$

где положительная функция $\varepsilon(z) \to \infty$, *когда* $z \to \infty$.

Эта теорема следует из теоремы 3. Действительно, если

$$\mathfrak{M}_i = \{ \Delta_{i1}, \ C_{i1} \}, \quad \Delta_{i1} = (-2\bar{\sigma}_i, \ 2\bar{\sigma}_i), \quad C_{i1} = C_i,$$

то

$$Q_{i1} = \int\limits_{-2\bar{\sigma}_i}^{2\bar{\sigma}_i} \bar{\bar{p}}_i(x) \, dx \geqslant \frac{1}{2}.$$

И условие A дает нужную оценку для последнего слагаемого правой стороны неравенства (5), причем существенно используется множитель

$$\frac{1}{(1+|x|)^{s+1}}$$

Оценка первых двух слагаемых получается согласно условию B.

Теорема 5. *Если* $B_{s_n}\to\infty$ $(n\to\infty)$, *то в условиях теоремы* 4 *справедливы следующие соотношения*:

1) *для любого* $p>\frac{1}{s}$ *при* $n\to\infty$ *имеем*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_{Z_n}(x)-\Phi_{sZ_n}(x)|^p\,dx=o\,(L^p_{sS_n});$$

2) *для любого* $p\geqslant 1$ *при* $n\to\infty$ *имеем*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_{Z_n}(x)-\Phi(x)|^p\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{sZ_n}(x)-\Phi(x)|^p\,dx+o\,(L^{p-1}_{3S_n}\cdot L_{sS_n});$$

3) *для любого* $p\geqslant 1$ *при* $n\to\infty$ *имеем*

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|F_{Z_n}(x)-\Phi(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}=\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{sZ_n}(x)-\Phi(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}+o\,(L_{sS_n}).$$

Эта теорема следует из теоремы 4. Отметим только, что при доказательстве соотношения второго теоремы применяется неравенство (45) и еще раз условие B.

Теорема 6. *Если* $\beta_{r\xi_i}<\infty$ ($r\geqslant 3$ *любое число*), $i=1,\ 2,\ \quad n$, *и имеет место условие* A, *то при* $n\to\infty$ *справедливо соотношение*

$$|F_{Z_n}(x)-\Phi_{[r]Z_n}(x)|=\frac{o\,(L_{rS_n})}{(1+|x|)^r}.$$

Это утверждение следует из теоремы 3 при $s=[r]$, если применить неравенства (2) и (3).

Следствием теоремы 6 является теорема.

Теорема 7. *В условиях теоремы* 6 *при* $n\to\infty$ *имеем:*

1) *для любого* $p>\frac{1}{r}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F_{Z_n}(x)-\Phi_{[r]Z_n}(x)|^p\,dx=o\,(L^p_{rS_n});$$

2) *для любого* $p\geqslant 1$

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|F_{Z_n}(x)-\Phi(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}=\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{[r]Z_n}(x)-\Phi(x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+o\,(L_{rS_n}).$$

Заметим, что аналогичные вопросы для одинаково распределенных случайных величин рассмотрел Л. В. Осипов ([5], [6]). Исследованиям асимптотического разложения функции распределения суммы независимых случайных величин с оценкой остаточного члена относительно аргумента x уделял внимание П. Сурвила [12].

§ 2. Две леммы для усеченных случайных величин

В этом параграфе предположим, что $\sigma^2_{\xi_i} < \infty$, $i=1, 2, \quad n$, считая, что некоторые из них отличны от нуля. Введем усеченные случайные величины:

$$\eta_i = \begin{cases} \xi_i, & \text{если } |\xi_i| \leqslant B_{S_n}, \\ 0, & \text{если } |\xi_i| > B_{S_n}, \end{cases}$$

$$\chi_i = \xi_i - \eta_i, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим

$$Y_r = \frac{\sum_{i=1}^{r} \eta_i}{B_{S_n}}, \quad r=1, 2,$$

ради простоты записи подразумевая, что $\sum_{i=1}^{r} \eta_i$ есть сумма любых r различных случайных величин из набора $\{\eta_i, i=1, 2, \quad n\}$.

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$|F_{Y_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant \Theta(k)(1+|x|)^{-k}, \quad k=1, 2,$$

Доказательство. Если $x>0$ и $F_{Y_n}(x) \geqslant \Phi(x)$, то в силу неравенства Чебышева

$$|F_{Y_n}(x) - \Phi(x)| = F_{Y_n} - \Phi(x) \leqslant 1 - \Phi(x) \leqslant 1 - \Phi(x) + \Phi(-x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (1+|u|)^k \, d\Phi(u)}{(1+|x|)^k} = \Theta(k)(1+|x|)^{-k}, \quad k=1, 2,$$

Если $x>0$ и $F_{Y_n}(x) < \Phi(x)$, то также в силу неравенства Чебышева

$$|F_{Y_n}(x) - \Phi(x)| = \Phi(x) - F_{Y_n}(x) \leqslant 1 - F_{Y_n}(x) + F_{Y_n}(-x) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{|Y_n| \geqslant x\} \leqslant (1+|x|)^{-k} \mathbf{M}(1+|Y_n|)^k = (1+|x|)^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|u|)^k \, dF_{Y_n}(u),$$

$k=1, 2,$

Отсюда и из таких же рассуждений при $x<0$ видно, что достаточно доказать неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^k \, dF_{Y_n}(u) \leqslant \Theta(k), \quad k=1, 2,$$

Методом математической индукции мы докажем более общее неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^k \, dF_{Y_r}(u) \leqslant \Theta(k), \quad k=1, 2. \qquad r=1, 2, \tag{6}$$

Так как

$$\mathbf{M}Y_r^2=\frac{1}{B^2_{S_n}}\mathbf{M}\Big(\sum_{i=1}^{r}\eta_i\Big)^2\leqslant\frac{1}{B^2_{S_n}}\Big(\sum_{i=1}^{r}\mathbf{M}\eta_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}|\mathbf{M}\eta_i||\mathbf{M}\eta_j|\Big)$$

и, согласно равенству $\mathbf{M}\xi_i=0$,

$$|\mathbf{M}\eta_i|=|\mathbf{M}\chi_i|=\Big|\int\limits_{u>B_{S_n}}u\,dF_{\xi_i}(u)\Big|\leqslant\int\limits_{|u|>B_{S_n}}\frac{u^2}{B_{S_n}}dF_{\xi_i}(u)\leqslant\frac{\sigma^2_{\xi_i}}{B_{S_n}},\quad i=1,\tag{7}$$

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}|\mathbf{M}\eta_i||\mathbf{M}\eta_j|\leqslant\frac{2}{B^2_{S_n}}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\sigma^2_{\xi_i}\sigma^2_{\xi_j}\leqslant\frac{1}{B^2_{S_n}}\Big(\sum_{i=1}^{r}\sigma^2_{\xi_i}\Big)^2\leqslant B^2_{S_n},$$

то

$$\mathbf{M}Y_r^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^2\,dF_{Y_r}(u)\leqslant 2.$$

Отсюда и из неравенства $|u|\leqslant\frac{1+u^2}{2}$ следует неравенство (6) и при $k=1$.

Так как

$$\mathbf{M}|\eta_i|^{\nu}=\int\limits_{|u|\leqslant B_{S_n}}|u|^{\nu}dF_{\xi_i}(u)\leqslant B^{\nu-2}_{S_n}\int\limits_{|u|\leqslant B_{S_n}}u^2\,dF_{\xi_i}(u)\leqslant B^{\nu-2}_{S_n}\sigma^2_{\xi_i},\quad \nu=2,3,\ldots,\tag{8}$$

то (6) справедливо при $r=1$.

Следовательно, неравенство (6) достаточно доказать для $r\geqslant 2$ и $k=m+1$, допуская, что оно имеет место при $k\leqslant m$ $(m\geqslant 2)$.

Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u|^{m+1}dF_{Y_r}(u)=\int\limits_{-\infty}^{0}|u|^{m+1}dF_{Y_r}(u)+\int\limits_{0}^{\infty}|u|^{m+1}dF_{Y_r}(u)=I_1+I_2,$$

$$I_2=\int\limits_{0}^{\infty}|u|^{m+1}d\prod_{i=1}^{r}{}^{*}F_{\eta_i}(uB_{S_n})=$$

$$=\int\limits_{u_1+\ldots+u_r>0}\!\!\cdots\int(u_1+\ldots+u_r)^{m+1}dF_{\eta_1}(u_1B_{S_n})\ldots dF_{\eta_r}(u_rB_{S_n})=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\int\limits_{u_1+\ldots+u_r>0}\!\!\cdots\int(u_1+\ldots+u_r)^{m}u_i\,dF_{\eta_1}(u_1B_{S_n})\ldots dF_{\eta_r}(u_rB_{S_n})=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\nu=0}^{m}\frac{m!}{\nu!(m-\nu)!}\int\limits_{u_1+\ldots+u_r>0}\!\!\cdots\int(u_1+\ldots+u_{i-1}+u_{i+1}+\ldots+u_r)^{m-\nu}u_i^{\nu+1}\times$$

$$\times dF_{\eta_1}(u_1B_{S_n})\ldots dF_{\eta_r}(u_rB_{S_n})=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\nu=0}^{m}\frac{m!}{\nu!(m-\nu)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_i^{\nu+1}\int\limits_{-u_i}^{\infty}u^{m-\nu}dF_{Y_{r-1}}(u)\,dF_{\eta_i}(u_iB_{S_n}).$$

Согласно индуктивному предположению и неравенству (8) при $\nu \geqslant 1$ имеем:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u_i^{\nu+1} \left(\int_{-u_i}^{\infty} u^{m-\nu}\, dF_{Y_{r-1}}(u) \right) dF_{\eta_i}(u_i B_{S_n}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \Theta_i (m-\nu) \int_{-\infty}^{\infty} |u_i|^{\nu+1}\, dF_{\eta_i}(u_i B_{S_n}) =$$

$$= \Theta_i (m-\nu)\, \mathbf{M} \left| \frac{\eta_i}{B_{S_n}} \right|^{\nu+1} \leqslant \Theta_i (m-\nu) \frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}^2}.$$

При $\nu=0$ согласно (7), (8) и индуктивному предположению имеем

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u_i^{\nu+1} \left(\int_{0}^{\infty} u^{m-\nu}\, dF_{Y_{r-1}}(u) + \int_{-u_i}^{0} u^{m-\nu}\, dF_{Y_{r-1}}(u) \right) dF_{\eta_i}(u_i B_{S_n}) \right| =$$

$$= \Big| \left(\int_{0}^{\infty} u^m\, dF_{Y_{r-1}}(u) \right) \int_{-\infty}^{\infty} u_i\, dF_{\eta_i}(u_i B_{S_n}) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} u_i \left(\int_{-u_i}^{0} u^m\, dF_{Y_{r-1}}(u) \right) dF_{\eta_i}(u_i B_{S_n}) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Theta_i (m) \left| \mathbf{M} \frac{\eta_i}{B_{S_n}} \right| + \mathbf{M} \left| \frac{\eta_i}{B_{S_n}} \right|^{m+1} \leqslant$$

$$\leqslant \Theta_i (m) \frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}^2} + \frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}^2} = \Theta_i (m) \frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}^2}.$$

Следовательно,

$$I_2 \leqslant \sum_{i=1}^{r} \Theta_i (m) \frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}^2} \leqslant \Theta (m+1),$$

так как из индуктивных соображений следует, что

$$\Theta_i (m) \leqslant \Theta (m), \quad i=1,\ 2,$$

Интеграл I_1 оценивается аналогично.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $\mathbf{M} |\xi_i|^s < \infty$ *($s \geqslant 2$ целое),* $i=1,\ 2,$ $\quad n$, *то*

$$|F_{Z_n}(x) - F_{Y_n}(x)| \leqslant \left(B_{S_n}(1+|x|)\right)^{-s} \sum_{i=1}^{n} \int_{|u| > B_{S_n}(1+|x|)} |u|^s\, dF_{\xi_i}(u) +$$

$$+ \Theta(s) \left(B_{S_n}(1+|x|) \right)^{-(s+1)} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_{S_n} < |u| B_{S_n}(1+|x|)} |u|^{s+1}\, dF_{\xi_i}(u).$$

Доказательство. Обозначим

$$\beta_i = \int\limits_{B_{S_n} < |u| \leqslant B_{S_n}(1+|x|)} dF_{\xi_i}(u),$$

$$E(u) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u \leqslant 0, \\ 1, & \text{если} \quad u > 0, \end{cases}$$

$$N_i(u) = F_{\eta_i}(u) - \beta_i E(u), \quad i = 1, 2,$$

Сразу отметим, что

$$\beta_i \leqslant \int\limits_{B_{S_n} < |u| \leqslant B_{S_n}(1+|x|)} \left(\frac{u}{B_{S_n}}\right)^2 dF_{\xi_i}(u) \leqslant \frac{\sigma_{\xi_i}}{B^2_{S_n}} \tag{9}$$

Так как композиция распределений коммутативна и ассоциативна $E(u) * * F_{\eta_i}(u) = F_{\eta_i}(u)$, то

$$\prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(u) = \prod_{i=1}^{r}{}^{*} F_{\eta_i}(u) - \sum_{i=1}^{r} \beta_i \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{r}{}^{*} F_{\eta_\nu}(u) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} \beta_i \beta_j \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i, j}}^{r}{}^{*} F_{\eta_\nu}(u) -$$

$$- \sum_{1 \leqslant i < j < m \leqslant r} \beta_i \beta_j \beta_m \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i, j, m}}^{r}{}^{*} F_{\eta_\nu}(u) + \cdots + (-1)^r \beta_1 \ldots \beta_r E(u), \quad r = 1,$$

Отсюда и согласно (6) при $k=0, 1$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u|^k \left| d\left[\prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(uB_{S_n}) - F_{Y_r}(u)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \Theta(k)\left(\sum_{i=1}^{r} \beta_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} \beta_i \beta_j + \sum_{1 \leqslant i < j < m \leqslant r} \beta_i \beta_j \beta_m + \cdots + \sum_{i=1}^{r} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{r} \beta_\nu\right) =$$

$$= \Theta(k)\left(\prod_{i=1}^{r} (1+\beta_i) - 1 - \prod_{i=1}^{r} \beta_i\right) \leqslant \Theta(k)\left(\prod_{i=1}^{r} (1+\beta_i) - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \Theta(k)\left(e^{\sum_{i=1}^{r} \beta_i} - 1\right) \leqslant \Theta(k) \sum_{i=1}^{r} \beta_i \, e^{\sum_{i=1}^{r} \beta_i} \leqslant \Theta(k) \cdot e \cdot \sum_{i=1}^{r} \beta_i,$$

так как из (9) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{r} \beta_i \leqslant 1$.

Окончательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^k \left| d\left(\prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(uB_{S_n}) - F_{Y_r}(u) \right) \right| \leqslant \Theta(k) \sum_{i=1}^{r} \beta_i, \tag{10}$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ r=1,\ 2,$

Из (10), при $k=s+1$, $r=n$, для $x\leqslant 0$ следует неравенство

$$\left| \prod_{i=1}^{n}{}^{*} N_i(xB_{S_n}) - F_{Y_n}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+|x|)^{-(s+1)} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|u|)^{s+1} \left| d\left(\prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(uB_{S_n}) - F_{Y_n}(u) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \Theta(s) \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{1}{(1+|x|)^{s+1}},\quad s=-1,\ 0,\ 1, \tag{11}$$

Согласно (6) и (10) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^k \, d \prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i\ (uB_{S_n}) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |u|^k \left| d\left(\prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(uB_{S_n}) - F_{Y_r}(u) \right) \right| + \int_{-\infty}^{\infty} |u|^k \, dF_{Y_r}(u) \leqslant$$

$$\leqslant \Theta(k),\quad k=1,\ 2, \qquad r=1,\ 2, \tag{12}$$

Положим

$$\eta_i^x = \begin{cases} \xi_i, & \text{если } |\xi_i| \leqslant B_{S_n}(1+|x|), \\ 0, & \text{если } |\xi_i| > B_{S_n}(1+|x|), \end{cases}$$

$$H_i(u) = \mathbf{P}\{\eta_i^x < u\},$$

$$\chi_i^x = \xi_i - \eta_i^x,\quad i=1,\ 2,$$

Так как $H_i(u) - N_i(u)$ не убывает, то из равенства

$$\prod_{i=1}^{r}{}^{*} H_i(u) - \prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(u) = \sum_{i=1}^{r} \left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq i}}^{r} N_\nu(u) \right) * \Big(H_i(u) - N_i(u)\Big) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant r} \left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq i,j}}^{r}{}^{*} N_\nu(u) \right) * \Big(H_i(u) - N_i(u)\Big) * \Big(H_j(u) - N_j(u)\Big) + \ldots +$$

$$+ \prod_{i=1}^{r}{}^{*} \Big(H_i(u) - N_i(u)\Big)$$

следует, что и

$$\prod_{i=1}^{r}{}^{*} H_i(u)-\prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(u)$$

также неубывающая функция.

Далее обозначим

$$\beta_{0i}=\beta_i=\int\limits_{B_{S_n}<|u|\leqslant B_{S_n}(1+|x|)} dF_{\xi_i}(u),$$

$$\beta_{\nu i}=\mathbf{M}\left(|\eta_i^x|^\nu-|\eta_i|^\nu\right)=\int\limits_{B_{S_n}<|u|\leqslant B_{S_n}(1+|x|)} |u|^\nu\, dF_{\xi_i}(u),$$

$$i=1, \qquad \nu=1,\ 2,$$

Очевидно, что $\beta_{\nu i}\geqslant 0$,

$$|\mathbf{M}\{(\eta_i^x)^\nu-(\eta_i)^\nu\}|=\Bigl|\int\limits_{B_{S_n}<|u|\leqslant B_{S_n}(1+|x|)} u^\nu\, dF_{\xi_i}(u)\Bigr|\leqslant\beta_{\nu i},\quad \nu=1,2,\ldots, \tag{13}$$

$$\beta_{\nu i}\leqslant\frac{1}{B^r_{S_n}}\ \beta_{\nu+r,i}\quad (\nu,\ r=0,\ 1,\ \ldots). \tag{14}$$

Для любой случайной величины ξ имеет место неравенство

$$\mathbf{M}|\xi|^\nu\,\mathbf{M}|\xi|^m\leqslant\mathbf{M}|\xi|^{\nu+m}\quad (\nu,\ m=0,\ 1,\ \ldots),$$

если только существуют соответствующие моменты. Применяя это неравенство к случайной величине с функцией распределения

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{r}\bigl(H_i(u)-N_i(u)\bigr)}{\sum\limits_{i=1}^{r}\beta_{0i}}\quad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и опираясь на (9), получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{r}\beta_{\nu i}\sum_{i=1}^{r}\beta_{mi}\leqslant\sum_{i=1}^{r}\beta_{0i}\sum_{i=1}^{r}\beta_{\nu+m,i}\leqslant\sum_{i=1}^{r}\frac{\sigma^2_{\xi_i}}{B^2_{S_n}}\sum_{i=1}^{r}\beta_{\nu+m,i}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{r}\beta_{\nu+m,i}\quad (\nu,\ m=0,\ 1,\qquad r=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{15}$$

Отметим, что в случае $\beta_{0i}=0$ соответствующие $H_i(u)$ и $N_i(u)$ можем просто вычеркнуть из рассматриваемой последовательности.

Далее докажем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^k d\Big(\prod_{i=1}^{r}{}^{*} H_i(uB_{S_n}) - \prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(uB_{S_n})\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Theta(k)}{B_{S_n}^k} \sum_{i=1}^{r} \beta_{ki}, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ r=1,\ 2, \tag{16}$$

Здесь тоже подразумеваем, что i принимает любые r различные значения из множества $\{1, 2, \quad n\}$, и так записываем только ради простоты.

Если $r=1$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^k d\Big(H_i(uB_{S_n}) - N_i(uB_{S_n})\Big) = \frac{\beta_{ki}}{B_{S_n}^k} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_{ki}}{B_{S_n}^k},\ i=1, \tag{17}$$

Поэтому достаточно доказать неравенство (16) только в случае $r \geqslant 2$. Снов применим метод математической индукции.

При $k=0$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Big(\prod_{i=1}^{r}{}^{*} H_i(uB_{S_n}) - \prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(uB_{S_n})\Big) = 1 - \prod_{i=1}^{r} N_i(\infty) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{r} (1-\beta_{0i}) \leqslant 1 - \exp\Big\{-\sum_{i=1}^{r} \beta_{0i}\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{r} \beta_{0i} \cdot \exp\Big\{\sum_{i=1}^{r} \beta_{0i}\Big\} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \beta_{0i}, \tag{18}$$

так как согласно (9) $\sum_{i=1}^{v} \beta_{0i} \leqslant 1$. Тут же отметим, что $N_i(\infty) = 1 - \beta_{0i} > 0$, так как в противном случае было бы $\sigma_{\xi_i}^2 > B_{S_n}^2$

Пусть η_i — случайная величина с функцией распределения

$$\frac{N_i(u)}{N_i(\infty)},\ i=1,\ 2,$$

Тогда из неравенств

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \Big| - \Big| \sum_{i=1}^{r} b_i \Big| \leqslant \sum_{i=1}^{r} |a_i - b_i|, \quad (6),\ (18),\ (14)$$

и равенств

$$\mathbf{M}\Big|\sum_{i=1}^{r} \eta_i\Big| = B_{S_n} \int_{-\infty}^{\infty} u\,|\,dF_{Y_r}(u), \quad |\eta_i^x - \eta_i| = |\eta_i^x| - |\eta_i|$$

следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|\, d\Big(\prod_{i=1}^{r}{}^{*} H_i(uB_{S_n}) - \prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(uB_{S_n})\Big) =$$

$$= \frac{1}{B_{S_n}}\Big(\mathbf{M}\Big|\sum_{i=1}^{r} \eta_i^x\Big| - \prod_{i=1}^{r} N_i(\infty)\,\mathbf{M}\Big|\sum_{i=1}^{r} \eta_i\Big|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{B_{S_n}}\Big(\mathbf{M}\Big|\sum_{i=1}^{r} \eta_i^x - \sum_{i=1}^{r} \eta_i\Big| + \mathbf{M}\Big|\sum_{i=1}^{r} \eta_i - \sum_{i=1}^{r} \eta_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} N_j(\infty)\Big|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{B_{S_n}}\Big(\sum_{i=1}^{r} \mathbf{M}(|\eta_i^x| - |\eta_i|) + \Big(1 - \prod_{j=1}^{r} N_j(\infty)\Big)\mathbf{M}\Big|\sum_{i=1}^{r} \eta_i\Big|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5}{2}\, \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} \beta_{1i}}{B_{S_n}},$$

т. е. неравенство (16) при $k=1$.

Из аналогичных рассуждений, согласно неравенствам (6), (7)

$$(13),\ (14),\ (18),\ |\mathbf{M}\eta_i^x| = |\mathbf{M}\chi_i^x| \leqslant \frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}(1+|x|)} \leqslant \frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}},\quad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{19}$$

и равенству

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r} (\mathbf{M}\eta_i^x\,\mathbf{M}\eta_j^x - \mathbf{M}\eta_i\,\mathbf{M}\eta_j) = \sum_{i=1}^{r}(\mathbf{M}\eta_i^x - \mathbf{M}\eta_i) \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{r} (\mathbf{M}\eta_\nu^x + \mathbf{M}\eta_\nu),$$

следует (16) при $k=2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2\, d\Big(\prod_{i=1}^{r}{}^{*} H_i(uB_{S_n}) - \prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(uB_{S_n})\Big) \leqslant \frac{5}{B_{S_n}^2} \sum_{i=1}^{r} \beta_{2i}.$$

Пусть (16) имеет место при 0, 1, k, где $k\geqslant 2$. Тогда достаточно доказать (16) при $k+1$ и $r\geqslant 2$.

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{k+1}\, d\Big(\prod_{i=1}^{r}{}^{*} H_i(uB_{S_n})\Big) - \prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(uB_{S_n})\Big) = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty} = I_3 + I_4.$$

Согласно таким же рассуждениям, как при оценке интеграла I_2 (см. доказ. леммы 1), только заменив $F_{\eta_i}(u)$ на $H_i(u)$ и $N_i(u)$, получаем

$$I_4 = \int_{0}^{\infty} |u|^{k+1}\, d\prod_{i=1}^{r}{}^{*} H_i(uB_{S_n}) - \int_{0}^{\infty} |u|^{k+1}\, d\prod_{i=1}^{r}{}^{*} N_i(uB_{S_n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{\nu=0}^{k} \frac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!} \int_{-\infty}^{\infty} u_i^{\nu+1} \int_{-u_i}^{\infty} u^{k-\nu}\, d\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*} H_j(uB_{S_n})\, dH_i(u_i B_{S_n}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{r}\sum_{\nu=0}^{k} \frac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!} \int_{-\infty}^{\infty} u_i^{\nu+1} \int_{-u_i}^{\infty} u^{k-\nu}\, d\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*} N_j(uB_{S_n})\, dN_i(u_i B_{S_n}) = I_5 + I_6,$$

где

$$I_5=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!}\int_{-\infty}^{\infty}u_i^{\nu+1}\int_{-u_i}^{\infty}u^{k-\nu}\,d\Bigl(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*}H_j(uB_{S_n})-$$

$$-\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*}N_j(uB_{S_n})\Bigr)\,dH_i(u_iB_{S_n}),$$

$$I_6=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}u_i^{\nu+1}\int_{-u_i}^{\infty}u^{k-\nu}\,d\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*}N_j(uB_{S_n})\,d\Bigl(H_i(u_iB_{S_n})-N_i(u_iB_{S_n})\Bigr)$$

Если $\nu\geqslant 1$, то согласно индукционному предположению (8) и неравенству

$$\mathbf{M}\,|\eta_i^x|^{\nu+1}=\mathbf{M}\,|\eta_i^{\nu+1}|+B_{\nu+1,\,i},$$

имеем

$$\Bigl|\int_{-\infty}^{\infty}u_i^{\nu+1}\Bigl(\int_{-u_i}^{\infty}u^{k-\nu}\,d\Bigl(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*}H_j(uB_{S_n})-$$

$$-\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}N_j(uB_{S_n})\Bigr)\,dH_i(u_iB_{S_n})\Bigr)\Bigr|\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(k-\nu)\,\frac{1}{B_{S_n}^{k-\nu}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\beta_{k-\nu,\,j}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\nu+1}\,dH_i(uB_{S_n})=$$

$$=\Theta(k-\nu)\,\frac{1}{B_{S_n}^{k-\nu}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}B_{k-\nu,\,j}\,\frac{1}{B_{S_n}^{\nu+1}}\,\mathbf{M}\,|\eta_i^x|^{\nu+1}\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(k-\nu)\left(\frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}^2}+\frac{\beta_{\nu+1,\,i}}{B_{S_n}^{\nu+1}}\right)\frac{1}{B_{S_n}^{k-\nu}}\sum_{j=1}^{r}\beta_{k-\nu,\,j}\,.$$

Если $\nu=0$, то из индукционного предположения (8) и (19) следует, что

$$\Bigl|\int_{-\infty}^{\infty}u_i^{\nu+1}\Bigl\{\int_{-u_i}^{\infty}u^{k-\nu}\,d\Bigl(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*}H_j(uB_{S_n})-\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*}N_j(uB_{S_n})\Bigr)\Bigr\}\,dH_i(u_iB_{S_n})\Bigr|=$$

$$=\Bigl|\int_{-\infty}^{\infty}u_i\Bigl\{\int_{0}^{\infty}+\int_{-u_i}^{0}u^{k}\,d\Bigl(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*}H_j(uB_{S_n})-\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*}N_j(uB_{S_n})\Bigr)\Bigr\}\,dH_i(u_iB_{S_n})\Bigr|\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(k)\,\frac{1}{B_{S_n}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\beta_{kj}\Bigl|\int_{-\infty}^{\infty}u\,dH_i(uB_{S_n})\Bigr|+$$

$$+\left|\int_{-\infty}^{\infty} u_i \left\{\int_{-u_i}^{0} u^k d\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*} H_j(uB_{S_n}) - \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*} N_j(uB_{S_n})\right\} dH_i(u_i B_{S_n})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \Theta(k)\frac{1}{B_{S_n}^k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\beta_{kj}\left|\mathbf{M}\frac{\eta_i^x}{B_{S_n}}\right| + \int_{-\infty}^{\infty}|u_i|^{k+1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} d\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*} H_j(uB_{S_n}) -\right.\right.$$

$$\left.\left.- \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}{}^{*} N_j(uB_{S_n})\right\} dH_i(u_i B_{S_n}) \leqslant$$

$$\leqslant \Theta(k)\frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}^2}\frac{1}{B_{S_n}^k}\sum_{j=1}^{r}\beta_{kj} + \left(\frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}^2} + \frac{\beta_{k+1,i}}{B_{S_n}^{k+1}}\right)\sum_{j=1}^{r}\beta_{0j}.$$

Следовательно, согласно (14), (15) и последним неравенствам имеем

$$|I_5| \leqslant \sum_{\nu=1}^{k}\Theta(\nu,k)\frac{1}{B_{S_n}^{k-\nu}}\sum_{j=1}^{r}\beta_{k-\nu,j}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}^2} + \frac{\beta_{\nu+1,i}}{B_{S_n}^{\nu+1}}\right) +$$

$$+\Theta(k)\frac{1}{B_{S_n}^k}\sum_{j=1}^{r}\beta_{kj}\sum_{j=1}^{r}\frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}^2} +$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\beta_{0j}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\sigma_{\xi_i}^2}{B_{S_n}^2} + \frac{\beta_{k+1,i}}{B_{S_n}^{k+1}}\right) \leqslant \frac{\Theta(k)}{B_{S_n}^{k+1}}\sum_{j=1}^{r}\beta_{k+1\,j}.$$

Из (12), (14) и (17) следует, что

$$|I_6| \leqslant \frac{\Theta(k)}{B_{S_n}^{k+1}}\sum_{j=1}^{r} B_{k+1,j}.$$

Интеграл I_3 оценивается аналогично.

Неравенство (16) доказано.

Так как

$$\prod_{i=1}^{n}{}^{*} H_i(uB_{S_n}) - \prod_{i=1}^{n}{}^{*} N_i(uB_{S_n})$$

неубывающая функция, то согласно (16) при $x<0$ имеем

$$\prod_{i=1}^{n}{}^{*} H_i(xB_{S_n}) - \prod_{i=1}^{n}{}^{*} N_i(xB_{S_n}) = \int_{-\infty}^{x} d\left(\prod_{i=1}^{n}{}^{*} H_i(uB_{S_n}) - \prod_{i=1}^{n}{}^{*} N_i(uB_{S_n})\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+|x|)^{k+1}}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|u|)^{k+1} d\left(\prod_{i=1}^{n}{}^{*} H_i(uB_{S_n}) - \prod_{i=1}^{n}{}^{*} N_i(uB_{S_n})\right) \leqslant$$

$$\leqslant \Theta(k)\left(B_{S_n}(1+|x|)\right)^{-(k+1)}\sum_{i=1}^{n}\beta_{k+1,i}, \quad k+1=0,\ 1, \tag{20}$$

Согласно неравенству из работы [4], получаем

$$\sup_u \left| \mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^n \xi_j < uB_{S_n}\right\} - \mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^n \eta_j^x < uB_{S_n}\right\}\right| \leqslant \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\left\{|\xi_j| > B_{S_n}(1+|x|)\right\}$$

$$\sup_u \left| F_{Z_n}(u) - \prod_{i=1}^{n}{}^{*} H_i(uB_{S_n})\right| \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{M}|\chi_i^x|^k}{\left(B_{S_n}(1+|x|)\right)^k} =$$

$$= \left(B_{S_n}(1+|x|)\right)^{-k} \sum_{i=1}^n \int_{|u| > B_{S_n}(1+|x|)} |u|^k \, dF_{\xi_i}(u), \quad k=0,\ 1, \tag{21}$$

Из (11), (20), (21) и неравенства

$$|F_{Z_n}(x) - F_{Y_n}(x)| \leqslant \left| F_{Z_n}(x) - \prod_{i=1}^{n}{}^{*} H_i(xB_{S_n})\right| + \left|\prod_{i=1}^{n}{}^{*} H_i(xB_{S_n}) -\right.$$

$$\left. - \prod_{i=1}^{n}{}^{*} N_i(xB_{S_n})\right| + \left|\prod_{i=1}^{n}{}^{*} N_i(xB_{S_n}) - F_{Y_n}(x)\right|$$

следует лемма 2 при $x \leqslant 0$. Для доказательства леммы 2 при $x > 0$ достаточно применить полученный результат к последовательности

$$\{-\xi_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}.$$

Лемма 2 доказана.

§ 3. Доказательство теорем 1 и 3

Докажем сначала теорему 3.

Введем новые обозначения:

$$\zeta_i = \eta_i - \mathbf{M}\eta_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad V_n = \sum_{i=1}^n \zeta_i, \quad X_n = \frac{V_n}{B_{V_n}},$$

$$L_{\nu V_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_{\nu\zeta_i}}{B_{V_n}^{\nu}}, \quad \bar{L}_{\nu S_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_{\nu\eta_i}}{B_{S_n}^{\nu}}, \quad \Lambda_{\nu S_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_{\nu\chi_i}}{B_{S_n}^{\nu}}$$

$$p = \frac{B_{S_n}}{B_{V_n}}, \quad q = -\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{M}\eta_i}{B_{V_n}}.$$

Имеет место неравенство

$$|F_{Z_n}(x) - \Phi_{sZ_n}(x)| \leqslant |F_{Z_n}(x) - F_{Y_n}(x)| +$$

$$+ |F_{X_n}(px+q) - \Phi_{s+1,\,X_n}(px+q)| + |\Phi_{s+1,\,X_n}(px+q) - \Phi_{sZ_n}(x)|, \tag{22}$$

где $\Phi_{kX_n}(u)$ определяется равенствами (4), с заменой только параметров последовательности $\{\xi_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ на параметры последовательности $\{\zeta_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

Лемма 3. *Если* $\Lambda_{sS_n}<\frac{1}{4}$, *то*

$$|\Phi_{sZ_n}(x)-\Phi_{s+1,X_n}(px+q)|\leqslant\Theta(s)(\Lambda_{sS_n}+\bar{L}_{s+1,S_n})e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Доказательство. Напишем ряд неравенств:

$$\Lambda_{\nu S_n}=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|u|>B_{S_n}}\left|\frac{u}{B_{S_n}}\right|^{\nu}dF_{\zeta_i}(u)\leqslant\Lambda_{sS_n}\quad(\nu=1,\ \ldots,\ s),\tag{23}$$

$$\bar{L}_{\nu S_n}=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|u|\leqslant B_{S_n}}\left|\frac{u}{B_{S_n}}\right|^{\nu}dF_{\xi_i}(u)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|u|\leqslant B_{S_n}}\left|\frac{u}{B_{S_n}}\right|^{2}dF_{\xi_i}(u)\leqslant 1\quad(\nu=2,\ 3,\ \ldots),\tag{24}$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_{1\eta_i}|}{B_{S_n}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_{1\chi_i}|}{B_{S_n}}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_{1\chi_i}}{B_{S_n}}=\Lambda_{1S_n}\leqslant\Lambda_{sS_n},\tag{25}$$

$$\frac{B^2_{V_n}}{B^2_{S_n}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}M\eta_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}(M\eta_i)^2}{B^2_{S_n}}\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(M\xi_i^2-M\chi_i^2)}{B^2_{S_n}}-\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|M\chi_i|}{B_{S_n}}\right)^2\geqslant$$

$$\geqslant 1-\Lambda_{2S_n}-\Lambda^2_{1S_n}\geqslant 1-\Lambda_{sS_n}-\Lambda^2_{sS_n}$$

Согласно последнему неравенству при $\Lambda_{sS_n}<\frac{1}{4}$ имеем

$$\frac{11}{16}\leqslant\frac{B^2_{V_n}}{B^2_{S_n}}\leqslant 1,\tag{26}$$

$$1-\frac{B^2_{V_n}}{B^2_{S_n}}\leqslant\frac{5}{4}\Lambda_{sS_n},\tag{27}$$

$$1-\left(\frac{B_{V_n}}{B_{S_n}}\right)^m\leqslant\Theta(m)\Lambda_{sS_n}(m\geqslant 1).\tag{28}$$

Здесь также применено неравенство $1-u^m\leqslant m(1-u)$, если $m\geqslant 1$.

Так как $L_{\nu S_n}=\bar{L}_{\nu S_n}+\Lambda_{\nu S_n}$, то при $\Lambda_{sS_n}<\frac{1}{4}$ имеем

$$L_{\nu S_n}\leqslant\frac{5}{4}\quad(\nu=2,\ \ldots,\ s).\tag{29}$$

Из неравенства $|a-b|^\nu \leqslant 2^{\nu-1}(|a|^\nu+|b|^\nu)$ следует, что

$$\beta_{\nu\zeta_i} = \int\limits_{|u|\leqslant B_{S_n}} |u-\alpha_{1\eta_i}|^\nu \, dF_{\xi_i}(u) + |\alpha_{1\eta_i}|^\nu \int\limits_{|u|>B_{S_n}} dF_{\xi_i}(u) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\nu-1}\beta_{\nu\eta_i} + 2^{\nu-1}|\alpha_{1\eta_i}|^\nu \leqslant 2^\nu \beta_{\nu\eta_i} \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда и из (24) и (25) получаем неравенство

$$L_{\nu V_n} \leqslant \left(\frac{8}{3}\right)^\nu \bar{L}_{\nu S_n} \leqslant \left(\frac{8}{3}\right)^\nu \quad (\nu=2,\ 3,\ \ldots). \tag{30}$$

Также отметим, что

$$\beta_{\nu\zeta_i} \leqslant 2^{\nu-1}\beta_{\nu\xi_i} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

$$L_{\nu V_n} \leqslant \frac{5^\nu}{2^{\nu+1}} L_{\nu S_n} \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{31}$$

Далее,

$$|\alpha_{\nu\xi_i} - \alpha_{\nu\zeta_i}| = \Big| \int\limits_{|u|\leqslant B_{S_n}} \left(u^\nu - (u-\alpha_{1\eta_i})^\nu\right) dF_{\xi_i}(u) +$$

$$+ \int\limits_{|u|>B_{S_n}} u^\nu \, dF_{\xi_i}(u) - (-\alpha_{1\eta_i})^\nu \int\limits_{|u|>B_{S_n}} dF_{\xi_i}(u) \Big| =$$

$$= \Big| \sum_{j=1}^{\nu-2} C^j_\nu (-1)^{j+1} \alpha^j_{1\eta_i} \int\limits_{|u|\leqslant B_{S_n}} u^{\nu-j} \, dF_{\xi_i}(u) +$$

$$+ (\nu-1)\ (-\alpha_{1\eta_i})^\nu + \int\limits_{|u|>B_{S_n}} u^\nu \, dF_{\xi_i}(u) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\nu-2} C^j_\nu |\alpha_{1\eta_i}|^j \beta_{\nu-j,\,\eta_i} + (\nu-1)|\alpha_{1\eta_i}|^\nu + \beta_{\nu\chi_i} (\nu=3,\ 4,\ \ldots,\ s),$$

$$\leqslant \alpha^2_{1\eta_i} + \beta_{2\chi_i} \quad (\nu=2),$$

$$=0 \qquad (\nu=1).$$

Согласно этим неравенствам и неравенствам (2), (3), имеем

$$\left| \frac{\alpha_{\nu\xi_i}}{B^\nu_{S_n}} - \frac{\alpha_{\nu\zeta_i}}{B^\nu_{S_n}} \right| \leqslant \Theta(\nu) \frac{|\alpha_{1\eta_i}|}{B_{S_n}} + \frac{\beta_{\nu\chi_i}}{B^\nu_{S_n}} \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{32}$$

Оценивая таким же способом, получаем неравенство

$$\left| \frac{\alpha_{\nu\zeta_i}}{B^\nu_{S_n}} \right| \leqslant \Theta(\nu) \frac{|\alpha_{1\eta_i}|}{B_{S_n}} + \frac{\beta_{\nu\eta_i}}{B^\nu_{S_n}} \quad (\nu=2,\ \ldots,\ s). \tag{33}$$

Из (26), (28), (32) и (33) следует, что

$$\left|\frac{\alpha_{\nu\xi_l}}{B^{\nu}_{S_n}}-\frac{\alpha_{\nu\zeta_l}}{B^{\nu}_{V_n}}\right|\leqslant\left|\frac{\alpha_{\nu\xi_l}}{B^{\nu}_{S_n}}-\frac{\alpha_{\nu\zeta_l}}{B^{\nu}_{S_n}}\right|+\left|\frac{\alpha_{\nu\zeta_l}}{B^{\nu}_{V_n}}\right|\left(1-\frac{B^{\nu}_{V_n}}{B^{\nu}_{S_n}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(\nu)\,\frac{|\alpha_{1\eta_l}|}{B_{S_n}}+\Theta(\nu)\,\Lambda_{sS_n}\frac{\beta_{\nu\eta_l}}{B^{\nu}_{S_n}}+\frac{\beta_{\nu\chi_l}}{B^{\nu}_{S_n}}\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(\nu)\,\frac{|\alpha_{1\eta_l}|}{B_{S_n}}+\Theta(\nu)\,\Lambda_{sS_n}\frac{\beta_{s\eta_l}}{B^2_{S_n}}+\frac{\beta_{s\chi_l}}{B^{s}_{S_n}}\quad(\nu=2,\ \dots,\ s),\tag{34}$$

$$=0\qquad(\nu=1).$$

Выражения семиинвариантов через начальные моменты задаются формулой

$$\gamma_{\nu\xi}=\nu!\sum(-1)^{r-1}(r-1)!\prod_{l=1}^{\nu}\frac{1}{r_l!}\left(\frac{\alpha_{l\xi}}{l!}\right)^{r_l}\tag{35}$$

где суммирование производится по всем целым неотрицательным решениям уравнения

$$r_1+2r_2+\quad+\nu r_\nu=\nu\ \text{ и }\ r=r_1+r_2+\quad+r_\nu.$$

Далее используем следующую лемму [3].

Лемма 4. *Если* $\max(|a_k|,\ |b_k|)\geqslant\max(|a_{k+1}|,\ |b_{k+1}|)$ *и*

$$A_m=\sum_{i=1}^{m-1}\max(|a_i|,\ |b_i|),$$

то

$$|a_1a_2\quad a_m-b_1b_2\quad b_m|\leqslant A_m\sum_{j=1}^{m}|a_j-b_j|.$$

Из леммы 4 и неравенств (24), (26), (30), (34), $|\alpha_{\nu\xi}|\leqslant\beta_{\nu\xi}$ следует, что

$$\left|\left(\frac{\alpha_{1\xi_l}}{B_{S_n}}\right)^{r_1}\quad\left(\frac{\alpha_{\nu\xi_l}}{B^{\nu}_{S_n}}\right)^{r_\nu}-\left(\frac{\alpha_{1\zeta_l}}{B_{V_n}}\right)^{r_1}\quad\left(\frac{\alpha_{\nu\zeta_l}}{B^{\nu}_{V_n}}\right)^{r_\nu}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(\nu)\left(r_1\left|\frac{\alpha_{1\xi_l}}{B_{S_n}}-\frac{\alpha_{1\zeta_l}}{B_{V_n}}\right|+\dots+r_\nu\left|\frac{\alpha_{\nu\xi_l}}{B^{\nu}_{S_n}}-\frac{\alpha_{\nu\zeta_l}}{B^{\nu}_{V_n}}\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(\nu)\left(\frac{|\alpha_{1\eta_l}|}{B_{S_n}}+\Lambda_{sS_n}\frac{\beta_{s\eta_l}}{B^2_{S_n}}+\frac{\beta_{s\chi_l}}{B^{s}_{S_n}}\right)\quad(\nu=2,\ \dots,\ s).\tag{36}$$

Согласно (35) и (36), имеем

$$\left|\frac{\gamma_{\nu\xi_l}}{B^{\nu}_{S_n}}-\frac{\gamma_{\nu\zeta_l}}{B^{\nu}_{V_n}}\right|\leqslant\Theta(\nu)\left(\frac{|\alpha_{1\eta_l}|}{B_{S_n}}+\Lambda_{sS_n}\frac{\beta_{s\eta_l}}{B^2_{S_n}}+\frac{\beta_{s\chi_l}}{B^{s}_{S_n}}\right)\quad(\nu=2,\ \dots,\ s),$$

$$=0\qquad(\nu=1).$$

Отсюда и из неравенств (24) и (25) следует, что

$$\left|\frac{\gamma_{\nu S_n}}{B^{\nu}_{S_n}}-\frac{\gamma_{\nu V_n}}{B^{\nu}_{V_n}}\right|\leqslant\Theta(\nu)\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_{1\eta_i}|}{B_{S_n}}+\Lambda_{sS_n}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_{s\eta_i}}{B^2_{S_n}}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_{s\chi_i}}{B^s_{S_n}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(\nu)\,\Lambda_{sS_n}\quad(\nu=2,\ \ldots,\ s),$$

$$=0\qquad\qquad(\nu=1).\tag{37}$$

Известно, что

$$e^{-|x|}|x|^m\leqslant e^{-m}m^m\tag{38}$$

$$|\gamma_{\nu\xi}|\leqslant(\nu-1)!\ \beta_{\nu\xi},\quad\text{если}\quad \mathbf{M}\xi=0\,[2].\tag{39}$$

Согласно (38), лемме 4, (37), (39), (29) и (30) имеем

$$|\Phi_{sZ_n}(x)-\Phi_{sX_n}(x)|\leqslant\Theta(s)\,\Lambda_{sS_n}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\tag{40}$$

Из равенств

$$\Phi(px+q)-\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(px+q-x)\,\exp\left\{-\frac{\left(x+\Theta_1(px+q-x)\right)^2}{2}\right\},$$

$$(px+q)^m\,e^{-\frac{(px+q)^2}{2}}-x^m\,e^{-\frac{x^2}{2}}=(px+q-x)\left[m\left(x+\Theta_2(px+q-x)\right)^{m-1}-\right.$$

$$\left.-\left(x+\Theta_2(px+q-x)\right)^{m+1}\right]\exp\left\{-\frac{\left(x+\Theta_2(px+q-x)\right)^2}{2}\right\},$$

где $0<\Theta_1,\ \Theta_2<1$, и неравенств

$$|px+q-x|\leqslant\Lambda_{sS_n}(1+|x|),$$

$$|x|-|(px+q)-x|\geqslant\frac{3}{4}|x|-\frac{1}{4},$$

$$|x|-\frac{1}{3}\leqslant|px+q|\leqslant\frac{4}{3}|x|+\frac{1}{3},\tag{41}$$

которые следуют из (25), (26) и (28), получаем оценку

$$|\Phi_{sX_n}(x)-\Phi_{sX_n}(px+q)|\leqslant\Theta(s)\,\Lambda_{sS_n}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\tag{42}$$

Согласно (39), (30) и неравенству [7]

$$L_{\nu V_n}^{\frac{1}{\nu-2}}\leqslant L_{s+1,\,V_n}^{\frac{1}{s-1}}\quad(3\leqslant\nu\leqslant s+1)\tag{43}$$

имеем

$$\left|\frac{\gamma_{\nu_1V_n}\ldots\gamma_{\nu_\mu V_n}}{B_{V_n}^{(\nu_1+\cdots+\nu_\mu)}}\right|\leqslant\Theta(s)\left(\bar{L}_{s+1,\,S_n}\right)^{\frac{\nu_1+\cdots+\nu_\mu-2\mu}{s-1}}$$

Отсюда и из (41) следует неравенство

$$L_{s+1,\,\nu_n}\,|\,Q_{s-1\,\nu_n}(px+q)\,|\,e^{-\frac{(px+q)^2}{2}}\leqslant\Theta(s)\,\bar L_{s+1,\,s_n}\,e^{-\frac{x^2}{4}} \tag{44}$$

Здесь же отметим, что из аналогичных рассуждений получается неравенство

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|\sum_{\nu=1}^{s-2}Q_{\nu s_n}(x)\,L_{\nu+2,\,s_n}\Big|\leqslant\Theta(s)\,e^{-\frac{x^2}{4}}\sum_{\nu=1}^{s-2}L_{\nu+2,\,s_n}, \tag{45}$$

которое используем ниже.

Из (40), (42), (44) следует лемма 3.

Лемма 3 доказана.

Для доказательства теоремы 3 при ограничении $\Lambda_{ss_n}<\frac{1}{4}$ достаточно оценить второе слагаемое правой стороны неравенства (22), так как нужные оценки первого и третьего слагаемого этого неравенства дают леммы 2 и 3. Для этого используем лемму 5 из [6].

Лемма 5. *Пусть A, T — положительные числа, $k\geqslant 2$ — целое число, $G(x)$ — неубывающая функция, $\Pi(x)$ — функция ограниченной вариации.*

Если

1) $G(-\infty)=\Pi(-\infty)$, $G(\infty)=\Pi(\infty)$;

2) *функция* $\Pi(x)$ *имеет производную и*

$|\Pi'(x)|<A(1+|x|)^{-k}$ *при всех* x;

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^k\left|d\big(G(x)-\Pi(x)\big)\right|<\infty|$,

то при $T>1$

$$|G(x)-\Pi(x)|\leqslant\frac{\Theta(k)}{\big(1+(x)\big)^k}\left(\int\limits_0^T|\delta_k(t)|\,t^{-1}\,dt+\int\limits_0^T|\delta_0(t)|\,t^{-1}\,dt+\frac{A}{T}\right),$$

где

$$\delta_l(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,d\Big(x^l\big(G(x)-\Pi(x)\big)\Big)\quad(l=0,\ k).$$

Положим в лемме 5

$$k=s+1,\ G(x)=F_{X_n}(x),\ \Pi(x)=\Phi_{s+1,\,X_n}(x),\ T=T_n=L^{-1}_{s+2,\,\nu_n}.$$

Сначала проведем доказательство при дополнительном ограничении $L_{s+2,\,\nu_n}<1$.

Из (43) и неравенства аналогично (45) видно, что тогда условие 2 леммы 5 выполняется с константой, зависящей только от s. Очевидно, что выполнены и остальные условия леммы.

Следовательно,

$$|F_{X_n}(px+q)-\Phi_{s+1,\,X_n}(px+q)|\leqslant\frac{\Theta(s)}{(1+|px+q|)^{s+1}}\left(\int\limits_0^{T_n}|\delta_{s+1}(t)|\,t^{-1}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{T_n}|\delta_0(t)|\,t^{-1}\,dt+L_{s+2,\,\nu_n}\right), \tag{46}$$

где

$$\delta_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\left(x^l\left(F_{X_n}(x) - \Phi_{s+1,\,X_n}(x)\right)\right) \qquad (l=0,\ s+1).$$

Сразу отметим, что ввиду (41) множитель $(1+|px+q|)^{-(s+l)}$ в (46) можно заменить множителем $(1+|x|)^{-(s+l)}$.

Методом математической индукции легко доказывается, что

$$(-it)^{s+1}\delta_{s+1}(t) = (s+1)! \sum_{\nu=0}^{s+1} \frac{(-t)^{\nu}}{\nu!} \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\left(f_{X_n}(t) - h_{s+1,\,X_n}(t)\right), \tag{47}$$

где

$$h_{s+1,\,X_n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\Phi_{s+1,\,X_n}(x).$$

Поэтому нам достаточно оценить интегралы

$$\Psi_k = \int_0^{T_n} \left|\frac{d^k}{dt^k}\left(f_{X_n}(t) - h_{s+1,\,X_n}(t)\right)\right| t^{k-(s+2)}\, dt \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ s+1). \tag{48}$$

Лемма 6. *Если* $L_{s+2,\,V_n} < 1$, *то при* $|t| \leqslant L_{s+2,\,V_n}^{-\frac{1}{3s}}$ *имеют место соотношения*

$$|f_{X_n}^{(k)}(t) - h_{s+1,\,X_n}^{(k)}(t)| \leqslant \Theta(k,\ s)\, e^{-\frac{t^2}{3}} L_{s+2,\,V_n}\{|t|^{s+2-k} + |t|^{3(s+k)}\} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ s+2).$$

Лемма при $L_{s+2,\,V_n} \to 0$ $(n\to\infty)$ доказана в работе [10], но она справедлива и в таком виде.

Согласно записи $h_{s+1,\,X_n}(t)$ в явном виде ([8] или [7]), (43) и ограничению $L_{s+2,\,V_n} < 1$, имеем

$$|h_{s+1,\,X_n}^{(k)}(t)| \leqslant \Theta(s)\, e^{-\frac{t^2}{4}} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ s+1).$$

Отсюда и из леммы 6 следует, что

$$\Psi_k \leqslant \Theta(s)\, L_{s+2,\,V_n} + \int_{L_{s+2,\,V_n}^{-\frac{1}{3s}}}^{T_n} |f_{X_n}^{(k)}(t)|\, t^{k-(s+2)}\, dt \qquad (k=0,\ 1,\ldots,\ s+1). \tag{49}$$

Известно ([11], стр. 183), что

$$|f_{X_n}^{(k)}(t)| = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{m_{1j}+\ldots+m_{jj}=k\\ m_{\nu j}>0,\ \nu=1,\ldots,j}} \Theta_{m_{1j},\ldots,m_{jj}}(k) \sum_{l_1=1}^{n} f_{\zeta_{l_1}}^{(m_{1j})}\left(\frac{t}{B_{V_n}}\right) \times$$

$$\times \sum_{\substack{l_2=1\\ l_2\neq l_1}}^{n} f_{\zeta_{l_2}}^{(m_{2j})}\left(\frac{t}{B_{V_n}}\right) \cdots \sum_{\substack{l_j=1\\ l_j\neq l_1\neq\ldots\neq l_{j-1}}}^{n} f_{\zeta_{l_j}}^{(m_{jj})}\left(\frac{t}{B_{V_n}}\right) \times$$

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l_1\neq\ldots\neq l_j}}^{n} f_{\zeta_i}\left(\frac{t}{B_{V_n}}\right) \quad (k=1,\ \ldots,\ s+1), \tag{50}$$

$$\left| f_{\zeta_i}^{(\nu)}\left(\frac{t}{B_{V_n}}\right)\right| \leqslant \frac{\beta_{\nu\zeta_i}}{B_{V_n}^{\nu}} \quad (\nu=1, \ldots, s+1;\ i=1, \ldots, n). \tag{51}$$

Далее, из неравенств (14) и (20) статьи [9], если взять там $N_n=4B_{V_n}L_{3V_n}$, следует, что

$$|f_{X_n}^{(k)}(t)| \leqslant \Theta(k)\{1+|t|^k\}e^{-\frac{t^2}{\pi^2}} \text{ при } |t| \leqslant \frac{\pi}{4} L_{3V_n}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-L_{s+2,V_n}^{-\frac{1}{3s}}}^{\frac{\pi}{4}L_{3V_n}^{-1}} |f_{X_n}^{(k)}(t)|\, t^{k-(s+2)}\,dt \leqslant \Theta(k, s)\, L_{s+2, V_n} \quad (k=0, 1, \ldots, s+1). \tag{52}$$

Остается оценить

$$\varphi_k = \int\limits_{\frac{\pi}{4}L_{3V_n}^{-1}}^{T_n} |f_{X_n}^{(k)}(t)|\, |t^{k-(s+2)}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{m_{1j}+\ldots+m_{jj}=k \\ m_{\nu j}>0,\ \nu=1,\ldots,j}} \Theta_{m_{1j},\ldots,m_{jj}}(k) \sum_{l_1=1}^{n} \frac{\beta_{m_{1j},\zeta_{l_1}}}{B_{V_n}^{m_{1j}}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2\neq l_1}}^{n} \frac{\beta_{m_{2j},\zeta_{l_2}}}{B_{V_n}^{m_{2j}}} \cdots \sum_{\substack{l_j=1 \\ l_j\neq l_1\neq\ldots\neq l_{j-1}}}^{n} \frac{\beta_{m_{jj},\zeta_{l_j}}}{B_{V_n}^{m_{jj}}}\, \bar{\varphi}_{k,j}, \tag{53}$$

согласно (50) и (51), где

$$\bar{\varphi}_{k,j} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}L_{3V_n}^{-1}}^{T_n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq l_1,\ldots,l_j}}^{n} \left| f_{\zeta_i}\left(\frac{t}{B_{V_n}}\right)\right| t^{k-(s+2)}\,dt \quad (k=1,\ldots,s+1;\ j=1,\ldots,k).$$

В обозначениях, использованных в формулировке теоремы 3, легко доказать, что

$$F_{\eta_i}(x) = \bar{a}_i \int\limits_{-\infty}^{x} \bar{p}_i(x)\,dx + (1-\bar{a}_i)\bar{S}_i(x), \text{ где } \bar{a}_i = a_i\, d_i,$$

$$|f_{\eta_i}(t)| \leqslant 1-\bar{a}_i\left(1-|\bar{f}_i(t)|\right), \text{ где } \bar{f}_i(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\bar{p}_i(x)\,dx,$$

$$|f_{\eta_i}(2\pi t)| \leqslant \exp\left\{-\bar{a}_i \bar{I}_i(t)\right\}, \text{ где } \bar{I}_i(t) = \frac{1}{2}\left(1-|\bar{f}_i(2\pi t|^2\right)$$

(см. [9], стр. 142–143).

Отсюда и из равенства $|f_{\xi_i}(t)|=|f_{\eta_i}(t)|$ следуют неравенства

$$\bar\varphi_{k,j}\leqslant\int\limits_{\frac{\pi}{4}L_{3V_n}^{-1}}^{Tn} t^{k-(s+2)}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l_1,\dots,l_j}}^{n}\exp\left\{-\bar a_i\bar I_i\left(\frac{t}{2\pi B_{V_n}}\right)\right\}dt\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{\bar a_{l_1}+\dots+\bar a_{l_j}}{2}}\int^{T_n} t^{k-(s+2)}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\bar a_i\bar I_i\left(\frac{t}{2\pi B_{V_n}}\right)\right\}dt.$$

Согласно лемме 1 [8] или аналогичной лемме 3 [9] имеем

$$\bar I_i(t)\geqslant\frac{1}{3}\,\alpha\left(\mathfrak{M}_i,\ \frac{1}{2|t|}\right)$$

Тогда

$$\bar\varphi_{k,j}\leqslant\Theta(k,\ j)\exp\left\{-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\bar a_i\alpha(\mathfrak{M}_i,\ 4B_{V_n}L_{3V_n})\right\}\int\limits_{\frac{\pi}{4}L_{3V_n}^{-1}}^{T_n} t^{k-(s+2)}dt\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(s)\ln(1+n)\exp\left\{-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\bar a_i\alpha(\mathfrak{M}_i,\ 4B_{V_n}L_{3V_n})\right\},$$

$k=1,\ \dots,\ s+1$, так как

$$L^{-1}_{s+2,\ V_n}=T_n\leqslant(\sqrt{n})^s.$$

Отсюда, из (53) и ограничения $L_{s+2,\ V_n}<1$ следует, что

$$\varphi_k\leqslant\Theta(s)\ln(1+n)(1+L^{s+1}_{1V_n})\ \exp\left\{-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\bar a_i\alpha(\mathfrak{M}_i,\ 4B_{V_n}L_{3V_n})\right\},\qquad(54)$$

$k=0,\ 1,\ \ \ ,\ s+1.$

Теорема 3 при $\Lambda_{sS_n}<\frac{1}{4}$ и $L_{s+2,\ V_n}<1$ следует из (22), леммы 2, леммы 3, (46–49), (52–54), (30), (26), (31) и неравенства

$$\bar L_{\nu S_n}\leqslant\bar L_{\mu S_n}(\nu\geqslant\mu\geqslant2)\quad\left(\text{см. }(24)\right)\qquad(55)$$

При $\Lambda_{sS_n}<\frac{1}{4}$ и $L_{s+2,\ V_n}\geqslant1$ теорема 3 следует из неравенства

$$|F_{Z_n}(x)-\Phi_{sZ_n}(x)|\leqslant|F_{Z_n}(x)-F_{Y_n}(x)|+|F_{Y_n}(x)-\Phi(x)|+$$
$$+|\Phi_{sZ_n}(x)-\Phi(x)|,\qquad(56)$$

леммы 2, леммы 1 и неравенства

$$|\Phi_{sZ_n}(x)-\Phi(x)|\leqslant\Theta(s)\bar L_{s+1,S_n}e^{-\frac{x^2}{4}},$$

которое получается согласно (45), (29), (30) и (55).

При $\Lambda_{sS_n} \geqslant \frac{1}{4}$, согласно (24) и (23), имеем

$$L_{\nu S_n} = \bar{L}_{\nu S_n} + \Lambda_{\nu S_n} \leqslant 1 + \Lambda_{sS_n} \leqslant 5\Lambda_{sS_n} \quad (\nu = 2,\ 3,\ \dots,\ s).$$

Поэтому, ввиду (45), получаем

$$|\Phi_{sZ_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant \Theta(s)\ \Lambda_{sS_n} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Отсюда, из (56), лемм 2 и 1 следует теорема 3 при $\Lambda_{sS_n} \geqslant \frac{1}{4}$.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 1.

Согласно (45), равенству

$$L_{\nu S_n} = \bar{L}_{\nu S_n} + \Lambda_{\nu S_n} \quad (\nu = 1,\ \dots,\ s),$$

55) и (23) имеем

$$|\Phi_{sZ_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant \Theta(s)\ e^{-\frac{x^2}{4}}\ (\bar{L}_{3S_n} + \Lambda_{sS_n}). \tag{57}$$

Доказательство теоремы 1 при $\Lambda_{sS_n} < \frac{1}{4}$ и $L_{3V_n} < \frac{\pi}{4}$ получим, если в неравенстве

$$|F_{Z_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant |F_{Z_n}(x) - F_{Y_n}(x)| + |F_{X_n}(px+q) - \Phi_{s+1,\,X_n}(px+q)| +$$

$$+ |\Phi_{s+1,\,X_n}(px+q) - \Phi_{sZ_n}(x)| + |\Phi_{sZ_n}(x) - \Phi(x)| =$$

$$= \Delta_1(x) + \Delta_2(x) + \Delta_3(x) + \Delta_4(x)$$

$\Delta_1(x)$ оценим согласно лемме 2, $\Delta_3(x)$ – согласно лемме 3, $\Delta_4(x)$ – согласно (57), а для оценки $\Delta_2(x)$ используем доказательство теоремы 3. Именно, если положим там $T_n = \frac{\pi}{4} L_{3V_n}^{-1}$, то исчезнет интеграл φ_k и появится

$$\frac{L_{3V_n}}{(1+|x|)^{s+1}} \leqslant \Theta \frac{\bar{L}_{3S_n}}{(1+|x|)^{s+1}} \quad \left(\text{ввиду (30)}\right)$$

Так как при $\Lambda_{sS_n} < \frac{1}{4}$, $L_{3V_n} \geqslant \frac{\pi}{4}$ и при $\Lambda_{sS_n} \geqslant \frac{1}{4}$ выражения $|F_{Z_n}(x) - \Phi_{sZ_n}(x)|$ и $|\Phi_{sZ_n}(x) - \Phi(x)|$ оцениваются также, как в доказательстве теоремы 3 в аналогичных обстоятельствах, то из неравенства

$$|F_{Z_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant |F_{Z_n}(x) - \Phi_{sZ_n}(x)| + |\Phi_{sZ_n}(x) - \Phi(x)|$$

следует доказательство теоремы 1 и в этих случаях.

Теорема 1 доказана.

В заключение автор благодарит проф. В. Статулявичуса за постановку задачи.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
23.IV.1969

Литература

1. А. Бикялис, Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме, Лит. матем сб., **VI**, № 3 (1966), 323–346.
2. А. Бикялис, Об остаточных членах в асимптотических разложениях для характеристических функций и их производных, Лит. матем. сб., **VII**, № 4 (1967), 571–581.
3. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случа йных величин, Теория вероятн. и ее прим., **X**, 3 (1965).
4. В. В. Петров, Л. В. Осипов, Оценка остаточного члена в центральной предельной теореме, Теория вероятн. и ее примен., **XII**, 2 (1967), 322–329.
5. Л. В. Осипов, Асимптотические разложения в центральной предельной теореме, Вестник ЛГУ, № 19 (1967), 45–62.
6. Л. В. Осипов, Об асимптотических разложениях для функций распределения сумм независимых случайных величин, кандидат. диссертация, Ленинград, 1968.
7. В. Статулявичус, Об асимптотическом разложении характеристической функции, Лит. матем. сб., **II**, № 2 (1962), 227–232.
8. В. А. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., **X**, 4 (1965), 643–659.
9. В. Статулявичус, В. Пипирас, Асимптотические разложения для сумм независимых случайных величин, Лит. матем. сб., VIII, № 1 (1968), 137–151.
10. П. Сурвила, Остаточный член в асимптотическом разложении для плотностей, Лит. матем. сб., **II**, № 2 (1962), 233–251.
11. П. Сурвила, Асимптотические разложения для плотностей, Лит. матем. сб., **III**, № 2 (1963), 177–191.
12. П. Сурвила, Асимптотические разложения для функции распределения нормированной суммы независимых случайных величин, Лит. матем. сб., **V**, № 1 (1965), 143–155.

APIE NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMOS PASISKIRSTYMO FUNKCIJOS ASIMPTOTINIO IŠDĖSTYMO LIEKAMUOSIUS NARIUS

V. Pipiras

(*Reziumė*)

Straipsnyje gauta keletas nepriklausomų atsitiktinių dydžių normuotos sumos Z_n pasiskirstymo funkcijos $F_{Z_n}(x)$ asimptotinio išdėstymo liekamojo nario įvertinimų. Kai egzistuoja baigtiniai s-ji ($s \geqslant 3$) atsitiktinių dydžių absoliutiniai momentai ir tenkinamos kai kurios kitos sąlygos, liekamuosiuose nariuose išskiriamas daugiklis $(1+|x|)^{-s}$.

ÜBER DIE RESTGLIEDER DER ASYMPTOTISCHEN ZERLEGUNG DER VERTEILUNGSFUNKTION VON DER SUMME UNABHÄNGIGER ZUFALLSVERÄNDERLICHEN

V. Pipiras

(*Zusammenfassung*)

In dem Artikel wird die einige Abschätzungen des Restgliedes der asymptotischen Zerlegung der Verteilungsfunktion $F_{Z_n}(x)$ von der normierten Summe Z_n unabhängiger Zufallsveränderlichen erhalten. Wenn die Zufallsveränderlichen die endliche s-ten ($s \geqslant 3$) absoluten Momente haben und wenn manche andere Bedingungen erfüllt werden, ist in den Restgliedern der Multiplikator $(1+|x|)^{-s}$.