УДК – 512.25/26+519.3 : 330.115

# СВЯЗЬ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ МИНИМИЗАЦИИ С ЗАДАЧАМИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р. Ю. Ясилионис, П. Е. Рыбаковайте

Нахождение равновесных решений многоцелевых задач минимизации (см. [1]) является весьма сложной проблемой. Некоторым успехом увенчалась идея сведения таких задач к обычным задачам математического программирования, а также рассмотрение векторных задач специального вида (см. [2]).

В настоящей статье приводятся результаты исследований в этом направлении. Сначала рассматривается векторная задача минимизации без ограничений. Для нее указаны необходимые и достаточные условия существования равновесного решения. Выделен класс задач, множество равновесных решений которых является выпуклым. Исследовано поведение квадратичных целевых функций на множестве равновесных решений.

Далее эти результаты обобщаются на случай задач с ограничениями двух типов: разделяющимися и общими. В случае разделяющих ограничений даны условия, когда множество равновесных решений совпадает с множеством оптимальных решений некоторой задачи выпуклого программирования. Когда ограничения являются общими, показано, что любое оптимальное решение является также и равновесным решением.

1. Рассмотрим векторную задачу минимизации без ограничений, состоящую из $n$ целевых функций:

$$F_1(x), \qquad F_j(x), \ \ldots, \ F_n(x), \tag{1}$$

где $x=(x^1 \ \ldots, \ x^j, \ \ldots, \ x^n)$, $x^j$ $(j\in I=\{1, \qquad n\})$ – вектор из $s_j$-мерного эвклидова пространства $E^{s_j}$; $F_j(x)$ $(j\in I)$ – скалярные функции.

Равновесным решением назовем вектор (конечный) $\bar{x}=(\bar{x}^1, \ \ldots, \ \bar{x}^j, \ \ldots, \ \bar{x}^n)$, удовлетворяющий условиям

$$F_j(\bar{x})=\min_{x^j} F_j(\bar{x} \parallel x^j); \ j\in I, \tag{2}$$

где $\bar{x} \parallel x^j=(\bar{x}^1, \ \ldots, \ \bar{x}^{j-1}, \ x^j, \ \bar{x}^{j+1}, \qquad \bar{x}^n)$.

Введем обозначения

$$x(j)=(x^1, \ \ldots, \ x^{j-1}, \ x^{j+1}, \ \ldots, \ x^n),$$

$$\nabla_j F_j(x)\equiv\left(\frac{\partial F_j(x)}{\partial x_1^j}, \ \ldots, \ \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_{s_j}^j}\right)^T$$

$0_{s_j}$ – $s_j$-мерный нулевой вектор, $s=s_1+ \qquad +s_j+\ldots+s_n$.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \nabla_1 F_1(x) \equiv 0_{s_1}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \nabla_j F_j(x) \equiv 0_{s_j}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \nabla_n F_n(x) \equiv 0_{s_n}. \end{cases} \tag{3}$$

Сначала укажем необходимые и достаточные условия существования равновесного решения для задачи (1).

**Теорема 1.** *Пусть функции* $F_j(x)$ $(j \in I)$ *для всех фиксированных* $x(j) = (x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^n)$ *выпуклы по* $x^j$ *и имеют непрерывные первые частные производные по* $x_i^j$ $(i=1, \dots, s_j)$.

*Для того чтобы векторная задача минимизации* (1) *имела равновесное решение, необходимо и достаточно, чтобы имела решение система уравнений* (3).

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из необходимых условий существования экстремума для скалярных функций с непрерывными первыми частными производными и выпуклости функций $F_j(x)(j \in I)$ по $x^j$ для фиксированных $x(j)$.

Пусть целевые функции векторной задачи минимизации (1) имеют вид:

$$F_j(x) = f_j(x^j) + A_j(x), \qquad j \in I. \tag{4}$$

Обобщенной целевой функцией назовем функцию

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x^j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} A_j(x). \tag{5}$$

**Теорема 2.** *Пусть функции* $F_j(x)$ $(j \in I)$ *имеют вид* (4) *и*

1) *для всех фиксированных* $x(j)$ *функции* $F_j(x)$ $(j \in I)$ *выпуклы по* $x^j$ *и имеют непрерывные частные производные первого порядка по* $x_i^k$ $(i=1, s_k, k \in I)$;

2) $\nabla_j A_j(x) \equiv \sum_{i \neq j} \nabla_j A_i(x)$ *для всех* $j \in I$ *и* $x$;

3) *функция* $G(x)$ — *выпукла по* $x$.

*Тогда множество равновесных решений векторной задачи минимизации* (1) *выпукло и совпадает с множеством точек минимума обобщенной функции* (5).

Доказательство. Градиент функции $G(x)$ обозначим через $\nabla G(x)$, а часть градиента, соответствующую вектору $x^j$, через

$$\nabla_j G(x) \equiv \left( \frac{\partial G(x)}{\partial x_1^j}, \quad \frac{\partial G(x)}{\partial x_{s_j}^j} \right)^T.$$

Из (5) получаем для всех $j \in I$

$$\nabla_j G(x) \equiv \nabla_j f_j(x^j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \nabla_j A_i(x).$$

Из условия 2) следует, что

$$\nabla_j G(x) \equiv \nabla_j f_j(x^j) + \nabla_j A_j(x).$$

Аналогично, из (4) имеем для всех $j \in I$

$$\nabla_j F_j(x) \equiv \nabla_j f_j(x^j) + \Delta_j A_j(x).$$

Из последних двух равенств имеем

$$\nabla_j G(x) = \nabla_j F_j(x)$$

и

$$\nabla G(x) = \left(\nabla_1 F_1(x), \ldots, \nabla_j F_j(x), \ldots, \nabla_n F_n(x)\right)^T,$$

Из выпуклости функции $G(x)$ следует, что множество ее стационарных точек, т. е. решений уравнения $\nabla G(x) \equiv 0_s$, совпадает с точками минимума (глобального) этой функции и, кроме того, является выпуклым. С другой стороны, множество стационарных точек функции $G(x)$ совпадает с множеством точек, удовлетворяющих системе уравнений (3). Так как функции $F_j(x)$ ($j \in I$) выпуклы по $x^j$ для всех фиксированных $x(j)$, то по теореме 1 каждая стационарная точка является равновесным решением. Отсюда следует, что эти два множества совпадают и являются выпуклыми. Теорема доказана.

Далее исследуем один класс векторных задач минимизации, когда целевые функции $F_j(x)$ ($j \in I$) имеют вид (4) и являются квадратичными, т. е.

$$F_j(x) = \sum_{i=1}^{n} (x^j)^T A_{ji} x^i + p_j^T x^j, \qquad j \in I, \tag{6}$$

где $A_{ij} = A_{ji}^T$; $x^j$, $p_j$ — $s_j$-мерный вектор — столбец.

Обобщенная целевая функция теперь будет

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} (x^j)^T A_{jj} x^j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i>j} (x^j)^T A_{ji} x^i + \sum_{j=1}^{n} p_j^T x^j. \tag{7}$$

Обозначим

$$A = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} 2A_{11} & A_{1i} & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{j1} & A_{ji} & A_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{ni} & 2A_{nn} \end{array} \right\|, \quad p = \left\| \begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_j \\ \vdots \\ p_n \end{array} \right\|,$$

$K = \{x \mid x$ — равновесное решение задачи (6)$\}$.

Перепишем (7) в матричном виде

$$G(x) = \frac{1}{2} x^T A x + p^T x.$$

**Теорема 3.** *Пусть матрицы $A_{jj}$ ($j \in I$) неотрицательно определены. Тогда:*

1) *если матрица $A$ неотрицательно определена, то множество равновесных решений $K$ выпукло, а функции $F_j(x)$ ($j \in I$) вогнуты по $x$ в множестве $K$,*

2) *если матрица $A$ не является неотрицательно определенной, то в точках равновесия функция $G(x)$ не может принимать минимума (ни локального, ни глобального).*

Доказательство. 1) Если матрица $A$ — неотрицательно определена, то функция $G(x)$ является выпуклой. Так как $F_j(x)$ ($j \in I$) удовлетворяют всем условиям теоремы 2, то отсюда следует, что множество равновесных решений $K$ выпукло.

Теперь покажем, что на множестве $K$ функции $F_j(x)$ вогнуты по $x$. Очевидно, что на множестве $K$ функция $G(x)$ постоянна: $G(x)=C$ для $x \in K$. Из (7) получаем

$$F_j(x)=G(x)-\Big[\sum_{l\neq j}(x^l)^T A_{ll}x^l+\sum_{l\neq j}\sum_{k>l}(x^l)^T A_{lk}x^k+\sum_{l\neq j}p_l^T x^l\Big]. \tag{9}$$

Из выпуклости функции $x^T Ax$ непосредственно следует, что выражение, стоящее в квадратных скобках выражения (9), является выпуклой по $x$ функцией. Так как для $x \in K$ функция $G(x)=C$, то из (9) следует, что функция $F_j(x)$ на множестве $K$ вогнута по $x$.

2) Пусть $\bar{x}$ – равновесное решение задачи (6), а квадратичная матрица $A$ имеет как отрицательные, так и положительные собственные числа. Из того, что функции $F_j(x)$ $(j \in I)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, следует, что $\bar{x}$ является стационарной точкой функции $G(x)$, т. е.

$$A\bar{x}+p=0_s. \tag{10}$$

Берем $\varepsilon$ – окрестность $R_\varepsilon(\bar{x})$ точки $\bar{x}$: $R_\varepsilon(\bar{x})=\{x \mid (x-\bar{x})^T (x-\bar{x}) \leqslant \varepsilon^2\}$. Обозначим $x=\bar{x}+\xi$. Будем искать экстремальные значения функции $G(x)$ на сфере $\xi^T\xi=\varepsilon^2$. Подставляя $x+\bar{x}+\xi$ в $G(x)$ и имея в виду (10), получаем

$$G(x)=G(\xi)=\frac{1}{2}\,\xi^T A\xi+G(\bar{x}).$$

Отсюда в стационарной точке получаем соотношения для $\xi$ и $\lambda$ ($\lambda$ – множитель Лагранжа):

$$A\xi\equiv\lambda\xi.$$

Пусть $\tilde{\lambda}$ – отрицательное собственное значение матрицы $A$, а $\tilde{\xi}$ – собственный вектор, соответствующий $\tilde{\lambda}$. Тогда

$$G(\tilde{x})=G(\tilde{\xi})=\frac{1}{2}\,\tilde{\lambda}\varepsilon^2+G(\bar{x})<G(\bar{x}).$$

Когда $\varepsilon \to 0$, получаем, что нет такой окрестности точки $\bar{x}$, в которой значение $G(\bar{x})$ было бы наименьшим для функции $G(x)$, т. е. не является локальным минимумом функции $G(x)$. Теорема доказана.

2. Рассмотрим связь векторных задач минимизации с задачами выпуклого программирования. Пусть имеем векторную задачу минимизации с разделяющимися ограничениями

$$\min_{x^j}\,[f_j(x^j)+A_j(x)];\ j \in I \tag{11}$$

при условиях

$$g_i^j(x^j)\leqslant 0, \qquad i=1,\ \ldots,\ m_j.$$

Наряду с задачей (11) рассмотрим и задачу нелинейного (выпуклого) программирования

$$\min\ \Big[\sum_{j=1}^{n} f_j(x^j)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j(x)\Big] \tag{12}$$

при условиях

$$g_i^j(x^j)\leqslant 0, \qquad i=1,\ \ldots,\ m_j;\ j=1,$$

Введем несколько обозначений

$$g^j(x) \equiv \left(g_1^j(x), \ \ldots, \ g_{m_j}^j(x)\right)^T$$

$$g(x) \equiv \left(g^1(x), \ \ldots, \ g^j(x), \ \ldots, \ g^n(x)\right)^T$$

$$\nabla_i g^j(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1^j(x)}{\partial x_1^i} & \frac{\partial g_1^j(x)}{\partial x_{s_i}^i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_{m_j}^j(x)}{\partial x_1^i} & \frac{\partial g_{m_j}^j(x)}{\partial x_{s_i}^i} \end{pmatrix},$$

$$\nabla g^j(x) = \left(\nabla_1 g^j(x) \qquad \nabla_j g^j(x) \qquad \nabla_n g^j(x)\right), \tag{13}$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \nabla g^1(x) \\ \cdots\cdots \\ \nabla g^j(x) \\ \cdots\cdots \\ \nabla g^n(x) \end{pmatrix},$$

$$\nabla_j G(x) \equiv \left(\frac{\partial G(x)}{\partial x_1^j}, \qquad \frac{\partial G(x)}{\partial x_{s_j}^j}\right)^T$$

$$\Delta G(x) \equiv \left(\nabla_1 G(x), \qquad \nabla_j G(x), \qquad \nabla_n G(x)\right)^T$$

**Теорема 4.** *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *функции* $F_j(x) = f_j(x^j) + A_j(x)$ $(j \in I)$ *выпуклы по* $x^j$ *для всех фиксированных* $x(j)$ *и имеют непрерывные первые частные производные по* $x_i^k$ $(i = 1, \ldots, s_k; \ k \in I)$,

2) *для всех* $x$ *и* $j \in I$ *имеют место равенства*

$$\nabla_j A_j(x) \equiv \sum_{i \neq j} \nabla_j A_i(x),$$

3) *функция* $G(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x^j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} A_j(x)$ *выпукла по* $x$;

4) $g_i^j(x^j)$ $(i = 1, \ldots, m_j; \ j \in I)$ — *выпуклые функции по* $x^j$, *имеющие непрерывные первые частные производные*;

5) *области ограничения частичных задач имеют внутренние точки, т. е. существуют такие* $\bar{x}^j$ $(j \in I)$, *что*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m_j} g_i^j(\bar{x}^j) < 0.$$

*Тогда множество равновесных решений векторной задачи минимизации* (11) *и множество оптимальных решений задачи выпуклого программирования* (12) *совпадают и выпуклы.*

Доказательство. Обозначим множество равновесных решений через $K_1$, а множество оптимальных решений через $K_2$.

Сначала покажем, что $K_2 \subset K_1$. Пусть $\bar{x}$ — оптимальное решение задачи (12). Тогда по одной теореме Зойтендейка (см. [3], стр. 38) существует такой неотрицательный вектор $\bar{u} = (\bar{u}^1, \quad \bar{u}^j, \quad \bar{u}^n)$, где $\bar{u}^j$ $(i \in I)$ — $m$-мерный вектор, что

$$\nabla G(\bar{x}) \equiv -\nabla g(\bar{x})\bar{u}, \ g^T(\bar{x})\bar{u} = 0.$$

Так как $\nabla_i g^j(x^j)=0$ (0 – нулевая матрица) для $i\neq j$, то из последнего равенства имеем

$$\nabla_j G(\bar{x}) \equiv -\nabla_j g^j(\bar{x}^j)\bar{u}^j, \quad \left(g^j(\bar{x}^j)\right)^T \bar{u}^j=0, \qquad j\in I.$$

Из 2) условия теоремы следует, что

$$\nabla_j G(\bar{x}) \equiv \nabla_j F_j(\bar{x}), \qquad j\in I.$$

Объединяя последние два равенства, получаем

$$\nabla_j F_j(\bar{x}) \equiv -\nabla_j g^j(\bar{x}^j)\bar{u}^j, \quad \left(g^j(\bar{x}^j)\right)^T \bar{u}^j=0, \qquad j\in I. \tag{14}$$

По теореме о представимости градиентов целевых функций частичных задач в точке равновесного решения через внешние нормали области ограничения (см. [2]) из (14) следует, что $\bar{x}$ – равновесное решение векторной задачи минимизации (11), т. е. $\bar{x}\in K_1$.

Итак, $K_2\subset K_1$.

Для доказательства включения $K_1\subset K_2$ берем $\tilde{x}\in K_1$. Опять по той же самой теореме из [2] следует, что существуют такие $\tilde{u}^j\geqq 0_{m_j}$ $(j\in I)$, что

$$\nabla_j F_j(\tilde{x}) \equiv -\nabla_j g^j(\tilde{x}^j)\tilde{u}^j, \quad \left(g^j(\tilde{x}^j)\right)^T \tilde{u}^j=0, \qquad j\in I.$$

Но из условий теоремы имеем

$$\nabla_j G(\tilde{x}) \equiv \nabla_j F_j(\tilde{x}), \qquad j\in I \tag{15}$$

и

$$\nabla_j g^j(\tilde{x}^j) \equiv 0, \qquad i\neq j. \tag{16}$$

Из (15) и (16) получаем

$$\nabla G(\tilde{x}) \equiv -\nabla d(\tilde{x})\cdot\tilde{u} \quad \text{и} \quad \tilde{u}^T g(x)=0,$$

где $\tilde{u}=(\tilde{u}^1, \ldots, \tilde{u}^j, \ldots, \tilde{u}^n)^T$.

По цитированной выше теореме Зойтендейка $\tilde{x}$ – оптимальное решение задачи выпуклого программирования (12). Теорема доказана.

Для более общего случая, когда ограничения для частичных задач векторной задачи минимизации (11) общие, т. е. имеют вид

$$m=m_j,\ g_i(x)=g_i^j(x),\ j=1, \ldots, n; \qquad i=1, \ldots, m,$$

справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** *Пусть выполняются* 1), 2) *и* 3) *условия теоремы* 4 *и*

4′) $g_i(x)$ $(i=1, \ldots, m)$ – *выпуклые функции по* $x$, *имеющие непрерывные первые частные производные по* $x_i^k$ $(i=1, \ldots, s_k;\ k\in I)$,

5′) *общая область ограничений* $P=\{x \mid g_i(x)\leqslant 0,\ i=1, \quad m\}$ *имеет внутреннюю точку, т. е. существует такой вектор* $x$, *что*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(\tilde{x})<0.$$

*Тогда каждое оптимальное решение задачи выпуклого программирования* (12) *является равновесным решением векторной задачи минимизации* (11).

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ – оптимальное решение задачи (12). Ввиду выполнения условий теоремы по теореме Зойтендейка существует такой неотрицательный $m$-мерный вектор $\bar{u}\geqslant 0_m$, что

$$\nabla G(\bar{x}) \equiv -\nabla g(\bar{x})\,\bar{u}.$$

Из условия 2) следует, что

$$\nabla_j G(\bar{x}) \equiv \nabla_j F_j(\bar{x}), \qquad j \in I.$$

Так как $\nabla g(x) \equiv \left(\nabla_1 g(x) \quad \nabla_j g(x) \quad \nabla_n g_n(x)\right)$, то из последних двух равенств получаем

$$\nabla_j F_j(\bar{x}) \equiv -\nabla_j g(\bar{x})\bar{u}, \; g^T(\bar{x})\bar{u}=0, \qquad j \in I. \tag{17}$$

Опять из представимости градиентов целевых функций в точке равновесного решения через внешние нормали областей ограничения (см. [2]) и из (17) следует, что $\bar{x}$ является равновесным решением векторной задачи минимизации (12). Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
28.IV.1969

### Литература

1. Р. Ю. Ясилионис, О существовании решений сложных задач математического программирования, Лит. матем. сб., **VII**, № 2 (1967).
2. Р. Ю. Ясилионис, Нахождение всех равновесных решений одного класса сложных задач математического программирования, Лит. матем. сб., **VII**, № 4 (1967).
3. Г. Зойтендейк, Методы возможных направлений, ИЛ, М., 1963.

## VEKTORINĖS MINIMIZACIJOS UŽDAVINIŲ RYŠYS SU IŠKILO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIAIS

R. Jasilionis, P. Rybakovaitė

(*Reziumė*)

Pirmoje dalyje nurodomos sąlygos, kai vektorinės minimizacijos uždavinių be apribojimų kintamiesiems pusiausvyros sprendinių aibė yra iškila. Antroje – duodama klasė vektorinės minimizacijos uždavinių, kurių pusiausvyros sprendinių aibė sutampa su atitinkamų iškilo programavimo uždavinių optimalių sprendinių aibe.

## THE CONNECTION BETWEEN THE VECTOR MINIMISING PROBLEM AND CONVEX PROGRAMMING PROBLEM

R. Jasilionis, P. Rybakovaitė

(*Summary*)

In the first part it is pointed out when the set of the equilibrium solutions of the vector minimising problem without restrictions is convex. In the second one vector minimising problem is given the set of the equilibrium solutions of which is equal to set of the optimal solutions of the convex programming problem.

## ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

### Замечание к статье „Локальные предельные теоремы с учетом больших уклонений"

В моей работе „Локальные предельные теоремы с учетом больших уклонений" (Лит. матем. сб., VIII, № 3 (1968), 553–579) содержится неточность, исказившая формулировку теоремы 5. На самом деле, следовало записать следующее.

**Теорема 6.** *В наших условиях при*

$$n\to\infty,\quad \frac{n^{\frac{1}{2\varepsilon}}}{\rho}<k<n^{\frac{1}{2\varepsilon}}\rho$$

$$P_n(k)=n\exp\left\{-k^{l-\varepsilon}+\frac{n(1-\varepsilon)^2\sigma^2}{2k^{2\varepsilon}}\right\}\Big(1+o(1)\Big).$$

Чтобы убедиться в этом, необходимо вместо неточных формул (3.5) записать:

$$m(s)=M\ \{\,\xi_i(s)/\xi_i(s)\leqslant k^{\varepsilon}\,\}=\sigma^2 s\,\Big(1+o(1)\Big)=k^{-\varepsilon}+O\left(\frac{\ln k^{\varepsilon} n}{k}\right),$$

$$\sigma^2(s)=D\ \{\,\xi_i(s)/\xi_i(s)\leqslant k^{\varepsilon}\,\}=\sigma^2+O(k^{-\varepsilon}),$$

$$M\ \{|\,\xi_i(s)\,|^3/\xi_i(s)\leqslant k^{\varepsilon}\,\}=M\,|\,\xi_i\,|^3+O(k^{-\varepsilon}).$$

Откуда немедленно следует, что

$$\frac{m(s)\sqrt{n-1}}{\sigma(s)}=\sigma k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}+O\left(\frac{\sqrt{n}\ln k^{\varepsilon} n}{k}\right)$$

$$\frac{1}{\sigma(s)\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-\varepsilon k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}\,u-\frac{1}{2\sigma^2(s)}\,(u-m(s)\sqrt{n-1})^2\right\}du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-\sigma\varepsilon k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}\,u-\frac{1}{2}\,(u-\sigma k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1})^2\right\}du\,\Big(1+o(1)\Big).$$

Далее

$$\pi_{n1}(s)=\frac{\varepsilon}{k^{\varepsilon}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-\sigma\varepsilon k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1}\,u-\frac{1}{2}\,(u-\sigma k^{-\varepsilon}\sqrt{n-1})^2\right\}du\,\Big(1+o(1)\Big),$$

что вместе с леммой 3 приводит к утверждению теоремы 5 в новой редакции.

А. В. Нагаев