X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

ХРОНИКА СЕМИНАРОВ ЛИТОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Семинар по теории вероятностей и теории чисел

6. X. 1969, Б. Григелионис, Б. Рябуа, Впечатления о Советско-Японском симпозиуме по теории вероятностей.
13. X. 1969, В. Статулявичус, Конференция в Венгрии по вопросам теории надежности.
10. X. 1969, Харри Кон (Румыния), О предельных теоремах для зависимых случайных величин.
27. X. 1969, Ю. Круопис, Об оценивании параметров марковских процессов.
3. XI. 1969, Т. Гергели (Венгрия), Об эргодической теореме Биркгофа.
10. XI. 1969, А. Бикялис, О центральной предельной теореме в R^k.

Получена оценка остаточного члена в многомерной центральной предельной теореме для распределения $P_n(A)$ нормированной и центрированной суммы $S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j-M\xi_j}{\sigma}$ последовательности $\xi_j=(\xi_{1j}, \xi_{2j}, \ldots, \xi_{kj}), j=1, 2, \ldots n$, независимых неодинаково распределенных векторов евклидова пространства R^k, где $M\xi_j=(M\xi_{1j}, \ldots, M\xi_{kj})$-вектор математических ожиданий;

$$\sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_k),\ \sigma_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_{ij}-M\xi_{ij})^2;\ \frac{\xi_j-M\xi_j}{\sigma}\left(\frac{\xi_{1j}-M\xi_{1j}}{\sigma_1}, \ldots, \frac{\xi_{kj}-M\xi_{kj}}{\sigma_k}\right)$$

Положим $F_j(x)$ — функция распределения случайного вектора $\frac{\xi_j-M\xi_j}{\sigma}$; Θ — k-мерный случайный вектор с функцией распределения $F(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}F_j(x)$; V — корреляционная матрица случайного вектора Θ; V^{-1} обратная матрица; $\Theta V^{-1}\Theta'$ — квадратичная форма; $\Phi(A)$ — нормальное распределение с равными нулю математическими ожиданиями и с корреляционной матрицей V.

Методом характеристических функций с использованием усеченых случайных векторов доказана следующая.

Теорема. *Пусть случайные векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют конечные моменты порядка $2+\delta$ $(0<\delta\leq 1)$ и пусть корреляционная матрица V невырождена; тогда существует постоянная $C(k)$, зависящая только от k, такая, что для всех выпуклых борелевских множеств A*

$$|P_n(A)-\Phi(A)|\leq\frac{C(k)}{n^{\frac{\delta}{2}}}M\left[(\Theta V^{-1}\Theta')^{\frac{2+\delta}{2}}\right].$$

Данная оценка точнее всех известных оценок того же типа; кроме того, из нее, без учета константы $C(k)$, вытекают известные результаты В. В. Сазонова для одинаково распределенных слагаемых суммы S_n, которые получены методом композиции.

* * *

18.IX.1969, Д. Сургайлис, О фильтрации марковских процессов.
25.II.1969, Н. Калинаускайте. Некоторые разложения многомерных устойчивых симметрических плотностей.

Пусть $p_\alpha(x)$, $x \in R_s$ плотность многомерного устойчивого распределения с характеристической функцией $\exp\{-\rho^\alpha\}$, $\rho^2 = t_1^2 + \ldots + t_s^2$.

Для всех $x \in R_s$, $x \neq 0$ получены разложения:

1) если $0 < \alpha < 1$, то

$$p_\alpha(x) = = -\frac{1}{2\pi^{\frac{s+1}{2}}|x|^s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left(\frac{2}{|x|}\right)^{\alpha k} \Gamma\left(\frac{\alpha k + s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha k + 2}{2}\right) \sin \frac{\alpha \pi k}{2};$$

2) если $1 < \alpha \leqslant 2$, то

$$p_\alpha(x) = = \frac{1}{\alpha(\sqrt{2\pi})^s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |x|^{2k} \Gamma\left(\frac{2k+s}{\alpha}\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{s}{2}\right) 2^{2k}},$$

$|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_s^2$

Так же получены асимптотические формулы для $p_\alpha(x)$, $0 < \alpha \leqslant 2$ при $|x| \to \infty$.

Литература

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, СМБ, Высшие трансендентные функции, Москва, 1966.
2. Bergström, On some expansions of stable distribution functions, Arkiv för mat., 2. № 18 (1952), 375–378.

1.XII.1969, Р. Цибульските, О распределении образующих элементов в свободных числовых полугруппах.

Рассматривается свободная числовая полутруппа. G — мультипликативно записанная свободная полугруппа со счетной системой P образующих элементов; N — гомоморфизм G на мультипликативную числовую полугруппу $\bar{G}$, образ $N\alpha$ — норма элемента $\alpha \in G$. Если α, $\beta \in G$, то $N\alpha\beta = N\alpha N\beta$. Кроме того, будем считать, что гомоморфизм N обладает еще следующим свойством: в полугруппе G имеется конечное число элементов α с $N\alpha \leqslant x$. Элементы полугруппы упорядочиваются по их возрастающим нормам. Суммирования будут вестись по всем элементам $\alpha \in G$ (или $\omega \in P$), нормы которых принадлежат заданному интервалу.

Если в такой полугруппе G каждый элемент α заменить его образом $N\alpha$, то получим полугруппу вещественных чисел, элементы которой могут повторяться. Полученная таким образом полугруппа является свободной числовой полугруппой.

Пусть

$$B(x) = \sum_{\substack{N\alpha \leqslant x \\ \alpha \in G}} 1$$

$$\pi_G(x) = \sum_{\substack{N\omega \leqslant x \\ \omega \in P}} 1.$$

Если существует

$$\lim_{x \to \infty} B(x)/x^\Theta = G,$$

где $C > 0$, $\Theta > 0$, то C будем называть степенной Θ-плотностью полгруппы G.

Пусть, далее, степенная Θ-плотность свободной полугруппы существует и равна константе $C>0$ и

$$B(x)=Cx^{\Theta}+O(x^{\Theta_1})$$

для $\Theta_1<\Theta$.

На полугруппе G определяются: функция Мёдиуса:

$$\mu(\alpha)=\begin{cases} 1, \text{ если } \alpha=(1),\ N\alpha=1, \\ (-1)^k, \text{ если } \alpha=\omega_1 \quad \omega_k,\ \omega_i\,(i=1,\ 1,\ \dots,\ k) \text{ различны}, \\ 0, \text{ если } \omega_i^2\backslash\alpha; \end{cases}$$

функция Мангольдта:

$$\Lambda(\alpha)=\begin{cases} \ln N\alpha, \text{ если } \alpha=\omega^x\,(x>0) \\ 0, \text{ если } \alpha\neq\omega^x; \end{cases}$$

функции Чебышева:

$$\Psi_G(x)=\sum_{\substack{N\alpha\leqslant x\\ \alpha\in G}}\ln N\alpha \qquad \vartheta_G(x)=\sum_{\substack{N\omega\leqslant x\\ \omega\in P}}\ln N\omega.$$

Б. М. Бредихин доказал, что для таких полугрупп

$$\pi_G(x)\sim\frac{1}{\Theta}\,\frac{x^{\Theta}}{\ln x}\,.$$

Элементарным методом доказывается теорема:

$$\pi_G(x)=\int\limits_2^x\frac{t^{\Theta-1}}{\ln t}\,dt+O(x^{\Theta}\ln^{-N}x)$$

для любого фиксированного $N>0$.

Пусть

$$R(x)=\psi_G(x)-\frac{1}{\Theta}\,x^{\Theta}.$$

Рассматриваема задача эквивалентна задаче об элементарной оценке остатка $R(x)$. При доказательстве теоремы использованы идеи работ С. Амитсура и Э. Бомбьери.

Пусть $f(\alpha)$ – арифметическая функция, определенная для любого элемента $\alpha\in G$; $\Phi(x)$ – вещественная или комплексная функция, определенная при всех $x\geqslant1$ и ограниченная на каждом конечном интервале. Определяются суммы:

$$S_f\Phi(x)=\sum_{\substack{N\alpha\leqslant x\\ \alpha\in G}}f(\alpha)\,\Phi\left(\frac{x}{N\alpha}\right) \quad \text{и} \quad I_f\Phi(x)=\sum_{\substack{N\alpha\leqslant x\\ \alpha\in G}}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}\,\Phi\left(\frac{x}{N\alpha}\right).$$

Если $\Phi(x)=\Phi(\ln x)$, а

$$\text{(1)}\quad S_f=S_{\mu}^{h}\prod_{j=1}^{k}S_{L^j}^{h_j},\quad \mu=\mu(\alpha),$$

$$L=\ln N\alpha,\quad n=\sum_{j=1}^{k}(j+1)\,h_j-h,\quad n\geqslant h,$$

h – любое целое число, то из свойств сумм S_f и I_f следует, что

$$S_f\Phi(x)=\frac{1}{\Theta}\,x^{\Theta}P(\ln x)+O(x^{\Theta}\ln^{h-1}x).\quad n\geqslant h.$$

$P(\ln x)$ – многочлен $(n-1)$ степени от $\ln x$.

Если

(II) $S_f \Phi(x) = O(x^{\Theta} \ln^{h-1} x)$, $\Phi(x) = \Phi(\ln x)$,

такие суммы рассматриваются отдельно.

Для сумм I и II типов получаются обобщенные формулы А. Сельберга, из которых далее следует оценка функции $R(x)$.

Вместо этих сумм рассматриваются функции:

$$V_k(\eta, f) = \frac{1}{k!} e^{-\eta} S_f L^k(e^{\eta/\Theta}) = \frac{1}{k!} e^{-\eta} \sum_{N\alpha \leqslant e^{\eta/\Theta}} f(\alpha)\left(\frac{\eta}{\Theta} - \ln N\alpha\right)^k$$

и $\bar{V}_k(\eta, f)$, удовлетворяющие условию:

$$\varlimsup_{\eta\to\infty} |V_k(\eta, f)|/\bar{V}(\eta, f) = 1,$$

f — арифметическая функция, $k \geqslant 0$ — целое число.

Если сумма S_f II-го типа, т. е.

$$S_f \Phi(x) = O(x^{\Theta} \ln^{h-1} x), \quad \Phi(x) = \Phi(\ln x)$$

$$a_0\left(\lambda - \frac{1}{C\Theta}\right) = -\varlimsup_{\eta\to\infty} \ln\left|V_0\left(\eta, \lambda - \frac{1}{C\Theta}\right)\right| \Big/ (\ln\eta - \ln\Theta),$$

то доказывается, что

$$V_{k-1}(\eta, f) = O\left(\eta^{n-1} \bar{V}_0^k\left(\eta, \lambda - \frac{1}{C\Theta}\right)\right), \quad \text{если} \quad a_0\left(\lambda - \frac{1}{C\Theta}\right) < \infty, \quad k \geqslant 1$$

$$V_{k-1}(\eta, f) = O(\eta^{-N}),$$

$N > 0$ — любое фиксированное число, если $a_0\left(\lambda - \frac{1}{C\Theta}\right) = \infty$, $k \geqslant 1$.

Кроме того, для таких сумм S_f, если $a_0\left(\lambda - \frac{1}{C\Theta}\right) < \infty$ и $k \geqslant 1$ и

$$\varlimsup_{\eta\to\infty} |V_0(\eta, f)|/(\eta\Theta^{-1})^{n-1} \bar{V}_0\left(\eta, \lambda - \frac{1}{C\Theta}\right) > 0,$$

существует целое число $m > 0$ и сумма S_{f_1}, удовлетворяющие неравенству:

$$\varlimsup_{\eta\to\infty} |V_0(\eta, f_1)|/(\eta\Theta^{-1})^{m+n} \bar{V}_0\left(\eta, \lambda - \frac{1}{C\Theta}\right) > 0.$$

Из этого неравенства получается, что

$$V_0\left(\eta, \lambda - \frac{1}{C\Theta}\right) = O(\eta^{-N})$$

для любого фиксированного $N > 0$.

Сформированная в начале теорема эквивалентна этому результату.

Кроме того, доказаны аналогичные теоремы для полугрупп:

G_1 — полугруппа положительных действительных чисел $\alpha \geqslant 1$, причем логарифмы образующих элементов линейно независимы;

G_2 — полугруппа целых гауссовых чисел. Системой образующих элементов служат простые гауссовые числа из первого квадранта;

G_3 — полугруппа целых ($\neq 0$) идеалов фиксированного алгебраического числового поля. Система образующих элементов состоит из простых идеалов этого поля.

8.XII.1969, Л. Кольчук, О фильтрации компонент скачкообразного марковского процесса.

УДК — 519.21

Неравенства для многомерных характеристических функций. Бикялис А. «Литовский математический сборник», 1970, X, № 1, 5 — 12.

В работе исследовано поведение модуля многомерной характеристической функции на R^k и полученные неравенства применены для изучения строения остаточного члена в многомерной локальной предельной теореме. Библиографий 6.

УДК — 519.55

Об одном обобщении теоремы Фавара на многомерный случай. Визель Я. Ф. «Литовский математический сборник», 1970, X, №1, 13 — 15.

В работе на случай почти периодических функций многих переменных обобщается теорема Фавара о неопределенном интеграле почти периодической функции. Библиографий 3.

УДК — 513.88:513.83+517.948

К теории многозначных Φ_+-операторов в топологических линейных пространствах. I. Владимирский Ю. Н. «Литовский математический сборик», 1970, X, № 1, 17—28.

Результат Г Нейбауэра (РЖМат, 1966, 2Б529) обобщается на полные локально выпуклые пространства. В качестве вспомогательного средства рассматривается обобщение на локально выпуклые пространства понятия раствора двух подпространств и доказываются некоторые свойства раствора, известные в случае банаховых пространств. Библиографий 15.

УДК — 519.21

Предельные теоремы для сумм многомерных ступенчатых случайных процессов. Григалионис. Б. «Литовский математический сборник», 1970, X, № 1, 29—49.

В работе получены необходимые и достаточные условия сходимости сумм независимых целочисленных случайных мер к пуассоновским мерам. Используя эти результаты, найдены общие критерии сходимости сумм независимых многомерных ступенчатых случайных процессов к пуассоновским процессам. В случае стационарных случайных мер и случайных процессов с стационарными приращениями эти условия выражены в терминах функций Пальма—Хинчина. Библиографий 23.

УДК – 519.21

Некоторые предельные теоремы для m-зависимых случайных величин. Егоров В. А. «Литовский математический сборник», 1970, X, № 1, 51 — 59.

Рассматривается последовательность m-зависимых случайных величин. Изучена скорость сходимости к нормальному закону в центральной предельной теореме при выполнении условия Ляпунова. Получен аналог теоремы В. Петрова о законе повторного логарифма для случая m-зависимых величин. Библиографий 3.

УДК – 519.21

О скорости роста нормирующего множителя и верхних и нижних функциях для сумм независимых случайных величин. Калинаускайте Н. «Литовский математический сборник», 1970, X, № 1, 61 — 68.

Рассматриваются верхние и нижние функции для сумм независимых в общем случае неодинаково распределенных случайных величин в случае сближения с устойчивым законом $G_\alpha(x)$ с характеристической функцией

$$\exp\left\{-|t|^\alpha\left(1+i\frac{t}{|t|}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\} \quad \text{при} \quad 1<\alpha<2$$

$$\exp\{-t^2\} \quad \text{при} \quad \alpha=2.$$

Условия налагаются на скорость роста нормирующего множителя и на остаточный член в интегральной предельной теореме. Библиографий 3.

УДК – 513

О геометрии некоторых квазилинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными. Лупейкис З. Ю. «Литовский математический сборник», 1970, X, № 1, 69 — 99.

Работа посвящена геометрии квазилинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными, не разрешенных относительно производных второго порядка

$$h_i^{a\alpha\beta}(u^j,\ u^\gamma,\ p_\gamma^j)\,p_{\alpha\beta}^i+h^a(x^j,\ u^\gamma,\ p_\gamma^j)=0, \tag{1}$$

$$(i,\ j,\ \ldots=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ a,\ b,\ \ldots=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

в которых число уравнений r не превышает числа неизвестных

$$nm+\frac{nm\,(m+1)}{2},\qquad m<n$$

и где в голономном репере

$$p_\alpha^i=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha},\quad p_{\alpha\beta}^i=\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}$$

Библиографий 8.

УДК – 519.21

Локальная теорема с большими уклонениями для однородных цепей Маркова. Мисявичюс Э. «Литовский математический сборник», 1970, X, № 1, 101 — 107.

Доказана локальная теорема с большими уклонениями для плотностей, когда случайные величины связаны в однородную цепь Маркова и удовлетворяют условиям типа Крамера. Библиографий 10.

УДК – 519.21

Локальная предельная теорема для числа восстановлений. Нагаев А. В. «Литовский математический сборник», 1970, X, № 1, 109 — 119.

Доказывается локальная предельная теорема для числа восстановлений при условии существования конечного второго момента распределения времени ожидания. Библиографий 6.

УДК – 517.946

Об одном классе решений дифференциальных уравнений в частных производных. Ненишките Е. К. «Литовский математический сборник», 1970, X, № 1, 121 — 134.

В работе исследуется дифференциальное уравнение в частных производных, коэффициентами которого являются абсолютные сходящиеся в некоторой области ряды Дирихле с отрицательными показателями. Доказывается, что дифференциальное уравнение, обладающее некоторой, соответствующим образом определенной эллиптичностью, имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида

$$u=e^{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2+\ldots+\beta_m z_m} f(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

где функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ представима абсолютно сходящимся в некоторой области рядом Дирихле, а β_i — суть корни характеристического уравнения. Библиографий 4.

УДК – 519.21

Об остаточных членах асимптотического разложения функции распределения суммы независимых случайных величин. Пипирас В. «Литовский математический сборник», 1970, X, № 1, 135 — 159.

Получен ряд оценок остаточного члена асимптотического разложения функции распределения $F_{Z_n}(x)$ нормированной суммы Z_n независимых случайных величин, имеющих конечные k-ые ($k \geqslant 3$) абсолютные моменты. При некоторых ограничениях в остаточных членах выделен множитель $(1+|x|)^{-k}$. Аналогичные исследования для одинаково распределенных случайных величин проведены Л. В. Осиповым (РЖМат, 1968, 8В31). Библиографий 12.

УДК – 517.53

Экстремальные задачи в некоторых подклассах аналитических функций ограниченного вида. Терпигорева В. М. «Литовский математический сборник», 1970, X, № 1, 171 — 187.

Рассматриваются экстремальные проблемы аналитических функций класса A^1_m:

$$\int_0^{2\pi} m[\ln^+ |f(re^{i\Theta})|]\, d\Theta \leqslant 1, \qquad 0<r<1.$$

Здесь $m(n)$ – возрастающая, выпуклая функция на $(0, \infty)$, для которой

$$\lim_{u\to 0} \frac{m(u)}{u} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{u\to\infty} \frac{m(u)}{u} = \infty.$$

Найден вид экстремальной функции в классе A^1_m и его подклассе A^0_m, состоящем из функций, не имеющих нулей в круге. Библиографий 7.

УДК – 511

Распределение числа классов квадратичных форм. Эллиотт П. Д. Т. А. «Литовский математический сборник», 1790, X, № 1, 189 — 197.

При использовании вероятностной интерпретации доказывается, что соответственно нормированное число классов положительных бинарных квадратичных форм имеет непрерывную предельную функцию распределения. Оценивается скорость сходимости к предельному закону. Библиографцй 5.

УДК – 512.25/26+519.3:330.115

Связь векторных задач минимизации с задачами выпуклого программирования. Ясилионис Р. Ю., Рыбаковайте П. Е. «Литовский математический сборник», 1970, X, № 1, 199 — 206.

Статья посвящена установлению связи между некоторыми векторными задачами минимизации (в. з. мин.) и соответствующими им задачами выпуклого программирования. Даются условия, когда множество равновесных решений в. з. мин. без ограничений на переменных является выпуклым. Исследовано поведение квадратичных целевых функций на множестве равновесных решений. Библиографий 3.