X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК – 518.9

ДИНАМИЧЕСКАЯ ИГРА, КОГДА ИНТЕРЕСЫ ИГРОКОВ СОВПАДАЮТ

С. П. ВАКРИНЕНЕ

Рассматривается следующая динамическая игра. В начальный момент времени игроки находятся в позиции (p_0, r_0). В k-ый момент времени первый игрок выбирает $i_k \in \{1, \quad m\}$, а второй одновременно выбирает $j_k \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда позиция (p, r) изменяется согласно формулам

$$p_{k+1} = p_k + a_{i_{k+1} j_{k+1}},$$

$$r_{k+1} = r_k + b_{i_{k+1} j_{k+1}},$$

где $A = \| a_{ij} \|$, $B = \| b_{ij} \|$ – заданные матрицы. Пусть игра останавливается, когда точка (p, r) выходит из некоторого круга L с центром в начале координат, а матрицы A и B такие, что $a_{ij} \geqslant 0$, $b_{ij} \geqslant 0$, $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (0, 0)$. Эти условия гарантируют блуждание точки (p, r) в первом квадранте и окончание игры за конечное число шагов.

На контуре круга L зададим две функции $M(p, r)$ и $N(p, r)$ – выигрыши игроков – следующим образом. Разобьем контур на три части. В каждой из частей выигрыши постоянные и такие, что функция $N = f(M)$ и обратная функция $M = f^{-1}(N)$ – однозначные на всем контуре. Кроме того, выигрыши $\bar{M}$ и $\bar{N}$, где $\bar{M} = \max\limits_{(p, r)} M(p, r)$, $\bar{N} = \max\limits_{(p, r)} N(p, r)$ достигаются на той же самой части контура. Для того, чтобы деление области L на части имело смысл, т. е. чтобы игра не закончилась за один шаг, предположим, что радиус области L значительно больше величины $\max \sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2}$. Через точки деления контура области L на части проведем прямые, параллельные координатным осям. Они разобьют область L на три треугольника с дугой окружности в качестве гипотенузы и три прямоугольника. Очевидно, что в треугольниках конечные выигрыши не зависят от поведения обоих игроков. Обозначим их через $L(M, N)$, где (M, N) – единственная возможная в них пара выигрышей. Остальную часть области L обозначим через L^+. В данной игре оба игрока заинтересованы попасть в область $L(\bar{M}, \bar{N})$. Чтобы это было осуществимо из любой точки прямоугольной частичной области, предположим, что криволинейный треугольник $L(\bar{M}, \bar{N})$ не примыкает ни к одной из координатных осей. В противном случае в одной из прямоугольных областей интересы игроков могут быть противоположными, и тогда будет динамическая игра, аналогичная рассмотренной в статье [1].

Хотя, в силу наших предположений, в точках каждой из прямоугольных областей интересы игроков и совпадают, при отсутствии координирования действий игроки действуют как в игре с природой.

Определение 1. В точке $(p, r)\in L^+$ пара чистых стратегий (i, j) принадлежит множеству $C(p, r)$, если существует натуральное число l такое, что точка $(p+la_{ij}, r+lb_{ij})$, принадлежит области $L(\overline{M}, \overline{N})$.

Очевидно, что оба игрока будут применять стратегии только из $C(p, r)$, так как в каждой точке $(p, r)\in L^+$ разыгрывается биматричная игра, в которой пары $(i, j)\in C(p, r)$ представляют собой все ситуации равновесия в чистых стратегиях и все дают те же самые выигрыши.

Таким образом, отдельно рассмотрим биматричную игру (A', B'), в которой матрицы A' и B' такие, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы A' есть хотя бы один элемент $a'=\max\limits_{ij} a'_{ij}$, а соответствующие элементы матрицы B' есть $b'=\max\limits_{ij} b_{ij}$. Множество всех ситуаций равновесия биматричной игры (A', B') обозначим через I.

Введем следующие обозначения.

1. Множество ситуаций равновесия, дающих выигрыши (V_1, V_2), обозначим через $I(V_1, V_2)$. В частности, множество пар чистых стратегий (i, j), для которых $b'_{ij}=b'_l$, $a'_{ij}=a'$, обозначим через $I(a', b')$.

2. Подматрицу, имеющую ситуацию равновесия во вполне смешанных стратегиях и дающую выигрыши (V_1, V_2), обозначим через $A(V_1, V_2)$.

3. Через $A_s(V_1, V_2)$ обозначим квадратную матрицу, на диагонали которой находится ровно s различных матриц $A(V_1, V_2)$. В частности, матрицы $A_s(a', b')$ есть просто квадратные подматрицы размеров $s\times s$ матрицы A', диагонали которых составлены из элементов a'. Когда $V_1<a'$, $V_2<b'$, матрицы $A_s(V_1, V_2)$ есть некоторые расширенные матрицы, так как в них могут повторяться строки и столбцы матрицы A'.

Каждой матрице $A_s(V_1, V_2)$ соответствует матрица $B_s(V_1, V_2)$. Элементы этих матриц обозначим через $a^s_{ij}(V_1, V_2)$ и $b^s_{ij}(V_1, V_2)$.

4. Для каждой ситуации равновесия $(X, Y)=[(x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_n)]$, дающей выигрыш (V_1, V_2), и для каждой матрицы $A_s(V_1, V_2)$ обозначим:

$$\alpha[A_s(V_1, V_2), (X, Y)]=\sum_{\substack{i\\ x_i>0}}\sum_{\substack{j\\ y_j=0}} a^s_{ij}(V_1, V_2),$$

$$\beta[A_s(V_1, V_2), (X, Y)]=\sum_{\substack{j\\ y_j>0}}\sum_{\substack{i\\ x_i=0}} b^s_{ij}(V_1, V_2),$$

$$\gamma[A_s(V_1, V_2), (X, Y)]=\alpha[A_s(V_1, V_2), (X, Y)]+\beta[A_s(V_1, V_2), (X, Y)],$$

$$\delta[A_s(V_1, V_2), (X, Y)]=$$
$$=\max\{\alpha[A_s(V_1, V_2), (X, Y)], \beta[A_s(V_1, V_2), (X, Y)]\}.$$

Предлагается некоторое упорядочение во множестве $I(V_1, V_2)$. (Всюду в дальнейшем для краткости символ $A_s(V_1, V_2)$ заменим символом A_s.)

Определение 2. Ситуация $(X, Y)\in I(V_1, V_2)$ доминирует ситуацию $(X', Y')\in I(V_1, V_2)$ в матрице A_s (обозначим $(X, Y)\overset{A_s}{\succ}(X', Y')$), если

$$\gamma[A_s, (X, Y)]>\gamma[A_s, (X', Y')]$$

или

$$\gamma [A_s, (X, Y)] = \gamma [A_s, (X', Y')]$$

$$\delta [A_s, (X, Y)] > \delta [A_s, (X', Y')].$$

Определение 3. Ситуация $(X, Y) \in I(V_1, V_2)$ эквивалентна ситуации $(X', Y') \in I(V_1, V_2)$ в матрице A_s $\left(\text{обозначим } (X, Y) \overset{A_s}{\sim} (X', Y')\right)$, если

$$\gamma [A_s, (X, Y)] = \gamma [A_s, (X', Y')],$$

$$\delta [A_s, (X, Y)] = \delta [A_s, (X', Y')].$$

Определение 4. Ситуация $(X, Y) \in I(V_1, V_2)$ называется выделяемой в матрице A_s, если в этой матрице не существует ситуация $(X', Y') \in I(V_1, V_2)$ такая, что

$$(X, Y) \overset{A_s}{\sim} (X', Y').$$

При помощи этих определений в каждой матрице A_s ситуации равновесия $(X, Y) \in I(V_1, V_2)$, соответствующие диагональным матрицам $A(V_1, V_2)$, можно выписать в порядке доминирования: (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_s, Y_s).

Множество всех матриц A_s обозначим через $\mathcal{A}_s$. Введем упорядочение в этом множестве.

Определение 5. Матрица A_s доминирует матрицу A'_s (обозначим $A_s \succ A'_s$), если существует такое $k = k_0$, что для $k < k_0$

$$\gamma [A_s, (X_k, Y_k)] = \gamma [A'_s, (X_k, Y_k)],$$

$$\delta [A_s, (X_k, Y_k)] = \delta [A'_s, (X_k, Y_k)],$$

а при $k = k_0$

$$\gamma [A_s, (X_k, Y_k)] > \gamma [A'_s, (X_k, Y_k)]$$

или

$$\gamma [A_s, (X_k, Y_k)] = \gamma [A'_s, (X_k, Y_k)]$$

$$\delta [A_s, (X_k, Y_k)] > \delta [A'_s, (X_k, Y_k)].$$

Определение 6. Матрица A_s эквивалентна матрице A'_s (обозначим $A_s \sim A'_s$), если для всех k

$$\gamma [A_s, (X_k, Y_k)] = \gamma [A'_s, (X_k, Y_k)],$$

$$\delta [A_s, (X_k, Y_k)] = \delta [A'_s, (X_k, Y_k)].$$

Пусть $\mathcal{A}_s(X, Y)$ есть множество всех различных матриц A_s, в которых ситуация $(X, Y) \in I(V_1, V_2)$ выделяема и доминирует в этой матрице все другие выделяемые ситуации (если они существуют). Если множество $\mathcal{A}_s(X, Y)$ непустое, то его элементы, в силу определений 5 и 6, можно написать в порядке доминирования: $A_s^1(X, Y)$, $A_s^2(X, Y)$, ..., $A_s^r(X, Y)$, где $r = r(X, Y)$ — число матриц во множестве $\mathcal{A}_s(X, Y)$.

Будем считать, что ситуация равновесия принадлежит множеству $I_s(V_1, V_2) \subset I(V_1, V_2)$, если множество $\mathcal{A}_s(X, Y)$ непустое, т. е. если ситуация (X, Y) выделяема и доминирует другие выделяемые хотя бы в одной матрице A_s.

Введем упорядочение ситуаций равновесия в непустом множестве $I_s(V_1, V_2)$.

Определение 7. Ситуация $(X, Y) \in I_s(V_1, V_2)$ доминирует ситуацию $(X', Y') \in I_s(V_1, V_2)$ $\left(\text{обозначим } (X, Y) \overset{I_s}{\succ} (X', Y')\right)$, если существует такое $k = k_0$, что для $k < k_0$

$$A_s^k(X, Y) \sim A_s^k(X', Y'),$$

а для $k = k_0$

$$A_s^k(X, Y) \succ A_s^k(X', Y')$$

или $r(X, Y) > r(X', Y')$, если для всех k

$$A_s^k(X, Y) \sim A_s^k(X', Y').$$

Определение 8. Ситуация $(X, Y) \in I_s(V_1, V_2)$ эквивалентна ситуации $(X', Y') \in I_s(V_1, V_2)$ во множестве $I_s(V_1, V_2)$ $\left(\text{обозначим } (X, Y) \overset{I_s}{\sim} (X', Y')\right)$, если $A_s^k(X, Y) \sim A_s^k(X', Y')$ для всех k, и $r(X, Y) = r(X', Y')$.

Определение 9. Ситуацию $(X, Y) \in I_s(V_1, V_2)$ назовем выделяемой во множестве $I_s(V_1, V_2)$, если не существует ситуация $(X', Y') \in I_s(V_1, V_2)$, такая, что $(X, Y) \overset{I_s}{\sim} (X', Y')$.

При таком упорядочении либо все ситуация множества $I_s(V_1, V_2)$ парами эквивалентны, либо существует выделяемая ситуация равновесия, которая доминирует другие ситуации, выделяемые в этом множестве.

Определение 10. Ситуацию $(X, Y) \in I(V_1, V_2)$ назовем доминирующей все другие во множестве $I(V_1, V_2)$, если она выделяема во множестве $I_s(V_1, V_2)$ и доминирует все другие выделяемые во множестве $I_s(V_1, V_2)$ с наибольшим индексом s.

Определение 11. Ситуацию $(X, Y) \in I$ назовем доминирующей во множестве I, если она доминирует во множестве $I(V_1, V_2)$ с наибольшими выигрышами V_1, V_2. Обозначим ее через $(\bar{X}, | \bar{Y})$.

Ситуация $(\bar{X}, \bar{Y})$ не существует, если все множества $I_s(V_1, V_2)$ пустые или если в них не существуют выделяемые ситуации.

Определение 12. Ситуацию равновесия $(X, Y) \in I(V_1, V_2)$ назовем строго выделяемой во множестве $I(V_1, V_2)$, если она выделяема и доминирует все другие выделяемые в матрице $A_s(V_1, V_2)$ и во всех ей эквивалентных.

Определение 13. Стратегии, составляющие ситуацию равновесия $(X, Y) \in I$ будем называть оптимальными, если эта ситуация равновесия строго выделяема во множестве $I(V_1, V_2)$ с наибольшим выигрышем и определяется единственным образом.

Теорема. *Стратегии, составляющие ситуацию равновесия* $(\bar{X}, \bar{Y})$, *являются оптимальными.*

Доказательство. Пусть ситуация $(\bar{X}, \bar{Y})$ принадлежит множеству $I(V_1, V_2)$. Очевидно, что она строго выделяема. Докажем, что не существует строго выделяемой ситуации, которая дала бы выигрыш больше (V_1, V_2). Действительно, если бы существовала строго выделяемая во множестве $I(V_1', V_2')$ ситуация (X', Y'), где $V_1' > V_1$, $V_2' > V_2$, то хотя бы в одном множестве $I_s(V_1', V_2')$ ситуация (X', Y') была выделяемой. Тогда существовала бы выделяемая ситуация, доминирующая все другие выделяемые во множестве $I(V'_1, V'_2)$, а это противоречит предположению, что $(\bar{X}, \bar{Y}) \in I(V_1, V_2)$.

Единственность ситуации $(\bar{X}, \bar{Y})$ следует из ее определения. Теорема доказана.

Вернемся к исходной динамической игре. Ожидаемые выигрыши обоих игроков, когда они находятся в позиции $(p, r) \in L^+$, обозначим через $U_1(p, r)$ и $U_2(p, r)$. В частичных областях $L(M, N)$ функции $U_1(p, r)$ и $U_2(p, r)$ равняются соответственно M и N. Будем считать также, что $U_1(p+a_{ij}, r+b_{ij}) = \bar{M}$ и $U_2(p+a_{ij}, r+b_{ij}) = \bar{N}$, если $(i, j) \in C(p, r)$, т. е. что однажды выбрав желаемое направление игроки уже не потеряют его и достигнут свои максимальные выигрыши. Тогда биматричная игра $(\| U_1(p+a_{ij}, r+b_{ij}) \|, \| U_2(p+a_{ij}, r+b_{ij}) \|)$, где $i \in \{i : (i, j) \in C(p, r)\}$ и $j \in \{j : (i, j) \in C(p, r)\}$ удовлетворяет условиям, наложенным на матрицы A' и B' Пару оптимальных стратегий, составляющих ситуацию равновесия для этой биматричной игры обозначим через $[X, (p, r), Y(p, r)]$.

Определение 14. Если игроки находятся в точке $(p_k, r_k) \in L^+$, то пару стратегий поведения, составляющую ситуацию (i_k, j_k), если $(i_k, j_k) \in C(p_{k-1}, r_{k-1})$, и ситуацию $[X(p_k, r_k), Y(p_k, r_k)]$ в противном случае – будем называть оптимальными.

При таком поведении ожидаемый выигрыш первого игрока определяется при помощи рекуррентных соотношений

$$U_1(p_k, r_k) = \begin{cases} \sum\limits_{(i,j) \notin C(p_k r_k)} x_i(p_k, r_k)\, y_j(p_k, r_k)\, U_1(p_k+a_{ij}, r_k+b_{ij}) + \\ \quad + \sum\limits_{(i,j) \notin C(p_k r_k)} x_i(p_k, r_k)\, y_j(p_k, r_k)\, \bar{M}, & \text{если } (p_k, r_k) \in L^+, \\ \bar{M}, & \text{если } (i_k, j_k) \in C(p_{k-1}, r_{k-1}), \\ M(p, r), & \text{если } (p_k, r_k) \in L(M, N). \end{cases}$$

Ожидаемый выигрыш второго игрока определяется аналогично.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
4.VII.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Вакринене, Антагонистическая динамическая игра на основе повторения биматричной игры, Лит. матем. сб., VII, № 3 (1968), 397–402.

DINAMINIS LOŠIMAS, KAI LOŠĖJŲ INTERESAI SUTAMPA

S. VAKRINIENĖ

(*Reziumė*)

Nagrinėjamas šitoks dinaminis lošimas. Pradiniu laiko momentu lošėjai yra pozicijoje (p_0, r_0). k-ju laiko momentu pirmasis lošėjas renkasi $i_k \in \{1, \ldots, m\}$, antrasis – $j_k \in \{1, \ldots, n\}$. Tada pozicija (p, r) keičiasi pagal formules

$$p_{k+1} = p_k + a_{i_{k+1} j_{k+1}},$$

$$r_{k+1} = r_k + b_{i_{k+1} j_{k+1}},$$

kur $A=\| a_{ij} \|$, $B=\| b_{ij} \|$ duotos matricos. Lošimas sustoja, kai taškas (p, r) išeina iš skritulio L. Ant skritulio kontūro duotos išlošimo funkcijos taip, kad egzistuoja pozicija,[1] kurioje abu lošėjai pasiekia savo maksimalius išlošimus. Kai lošimas nekooperatinis, lošėjai ne visada galės patekti į šią poziciją. Šiuo atveju tam tikras sutvarkymas pusiausvyros situacijų aibėje išskiria abiems priimtiną situacijų porą. Optimaliu elgesiu laikomas šių strategijų naudojimas kiekviename žingsnyje, kol taškas (p, r) įgauna kryptį, kurios laikymasis toliau užtikrina lošėjams maksimalius išlošimus.

THE DYNAMIC GAME WHEN THE INTERESTS OF PLAYERS COINCIDE

S. VAKRINIENĖ

(Summary)

Let us have a dynamic game. Suppose, that at the initial moment of time the players are in the position (p_0, r_0). The first player at the moment k chooses $i_k \in \{1, \ldots, m\}$ and the second player $j_k = \{1, \quad, n\}$. Then the position of the players changes by formulae

$$p_{k+1} = p_k + a_{i_{k+1} j_{k+1}}$$

$$r_{k+1} = r_k + b_{i_{k+1} j_{k+1}}$$

where $A=\| a_{ij} \|$, $B=\| b_{ij} \|$ are certain given matrices. In the point (p, r) reaches a given region, then the game is finished. The payoff functions are defined on the boundary of region so, that the position, in which both players achieve the maximal payoffs, exists. When the game is non-cooperative, the players cannot always get into this position. In this case a certain arrangement in the set of the equilibrium situations singles out the pair of the situations acceptable for both players. The behaviour, according which these strategies are used in each step till the point (p, r) takes the direction, which ensure maximal payoffs for the players, are considered as optimal.