X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК – 518.9

СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ИГРЫ ОДНОГО НАПАДАЮЩЕГО ПРОТИВ НЕСКОЛЬКИХ ЗАЩИТНИКОВ

И. Н. ВРУБЛЕВСКАЯ

1. В этой статье продолжается исследование игры, рассмотренной в [1]. Получен общий вид формулы для значения $v(i)$ игры, а также вид соответствующих i формул для каждой суммы Σy_j всех тех составляющих вектора оптимальной стратегии $Y(i)$, которые стоят при одинаковых коэффициентах, соответственно при $(1-p)^{l_s}a_s$ или при $(1-p)^{l_s-1}a_s$, для каждого $s \leqslant i$. Оказывается, что при каждом данном i для l_1 допустимы лишь два значения. Указывается процесс нахождения i_0, определенный явно при том условии, что мы умеем находить соответствующие значению $v(i)$ игры $A(i, 1, l)$ наборы $l_1, \quad l_i$, т. е. умеем вычислять $v(i)$. В п. 5 приводится ряд вспомогательных утверждений с соотношениях между упомянутыми выше суммами Σy_j. Основываясь на этих соотношениях, можно находить наборы $l_1, \quad l_i$ и вычислять $v(i)$, что и делается для случая достаточно большого числа вторых по ценности объектов. Подобные вычисления можно провести и в ряде других случаев.

2. **Значение игры $v(i_0)$ и оптимальная стратегия Y.** Как установлено в [1], существуют единственное число $i_0=i_0(n)$ и однозначно определенный набор показателей $l_1, \ldots, l_{i_0}$, такие, что значение игры $v=v(i_0)$ удовлетворяет системе

$$v(i_0)=(1-p)^{l_s}a_s \sum\nolimits_s' y_j+(1-p)^{l_s-1}a_s \sum\nolimits_s'' y_j, \qquad s=1,\ 2,$$

где

$$\sum\nolimits_s' y_j \equiv \left(\sum y_j \text{ при } l_s\right)>0,$$

$$\sum\nolimits_s'' y_j \equiv \left(\sum y_j \text{ при } l_s-1\right) \geqslant 0,$$

$$\sum_{s=1}^{i_0} l_s^j=l \quad \text{при} \quad l_s^j \in \{l_s,\ l_s-1\}, \qquad l_1 \geqslant l_2 \geqslant \qquad \geqslant l_{i_0}.$$

Максимальное возможное число ненулевых составляющих y_j вектора Y равно количеству вариантов соответствующих наборов $(l_1^j, \ldots, l_{i_0}^j)$; часть из этих y_j может и не входить в Y.

Мы имеем (Σy_j при l_s) + (Σy_j при $l_s - 1$) = 1 для $s = 1, \ldots, i_0$. Выражая отсюда сначала все суммы (Σy_j при l_s), $s = 1, \ldots, i_0$, через другие, а потом наоборот, получаем две системы, которым должно удовлетворять $v(i_0)$:

$$v(i_0) - (1-p)^{l_s} a_s = (1-p)^{l_s - 1} a_s p \left(\sum y_j \text{ при } l_s - 1 \right), \quad s = 1, \tag{1}$$

$$(1-p)^{l_s-1} a_s - v(i_0) = (1-p)^{l_s-1} a_s p \left(\sum y_j \text{ при } l_s \right), \quad s = 1, \tag{2}$$

Если при каком-то s будет (Σy_j при $l_s - 1$) = 0, то соответствующие s равенства остаются справедливыми и оказывается $v(i_0) = (1-p)^{l_s} a_s$.

Подсчитаем, сколько раз каждый y_j входит в систему (1) и сколько раз в систему (2). Число l должно складываться при любом j из i_0 слагаемых; обозначим $d = l - \sum_{s=1}^{i_0} (l_s - 1)$; тогда $d = l + i_0 - \sum_{s=1}^{i_0} l_s$. Значит, в любом столбце из Y (т. е. независимо от j) должно стоять d старших показателей l_s и $i_0 - d$ младших показателей $l_s - 1$. Отсюда следует, что любой y_j, входящий в Y, содержится ровно $i_0 - d$ раз во всех правых частях системы (1) и ровно d раз во всех правых частях системы (2). Если какой-нибудь y_j не входит в Y, то он не входит ни в систему (1), ни в систему (2). Очевидно, $1 \leqslant d \leqslant i_0$.

Поэтому мы имеем следующую зависимость:

$$d \cdot \sum_{s=1}^{i_0} \left(\sum y_j \text{ при } l_s - 1 \right) = (i_0 - d) \cdot \sum_{s=1}^{i_0} \left(\sum y_j \text{ при } l_s \right).$$

Подставляя сюда соответствующие выражения для каждой суммы Σy_j из систем (1) и (2), получим:

$$d \cdot \sum_{s=1}^{i_0} \frac{v(i_0) - (1-p)^{l_s} a_s}{(1-p)^{l_s-1} a_s} = (i_0 - d) \cdot \sum_{s=1}^{i_0} \frac{(1-p)^{l_s-1} a_s - v(i_0)}{(1-p)^{l_s-1} a_s},$$

$$\sum_{s=1}^{i_0} \frac{i_0 \cdot v(i_0) - (1-p)^{l_s-1} a_s (i_0 - dp)}{(1-p)^{l_s-1} a_s} = 0,$$

$$i_0 \cdot v(i_0) \cdot \sum_{s=1}^{i_0} \frac{1}{(1-p)^{l_s-1} a_s} = (i_0 - dp) \cdot \sum_{s=1}^{i_0} 1.$$

Следовательно,

$$v(i_0) = \frac{i_0 - dp}{\sum_{s=1}^{i_0} \frac{1}{(1-p)^{l_s-1} a_s}},$$

где

$$d = l + i_0 - \sum_{s=1}^{i_0} l_s, \tag{3}$$

или в другом виде:

$$v(i_0)=\frac{(1-p)^{l_1-1}(i_0-dp)a_1\ \cdots\ a_{i_0}}{\sum\limits_{s=i_0}^{1}(1-p)^{l_1-l_s}a_1\cdots\hat{a}_s\cdots} \tag{4}$$

Однако, здесь нам пока не известны ни i_0, ни набор $l_1, \ldots, l_{i_0}$.

Теперь, подставляя выражение (4) для $v(i_0)$ соответственно в системы (1) и (2), можно вывести формулы для (Σy_j при l_s-1) и (Σy_j при l_s) при $s=1$, i_0. Обозначим знаменатель в формуле (4) через $\Delta=\Delta\,(i_0;\,l_1, \ldots, l_{i_0})$. Тогда

$$\left(\sum y_j \text{ при } l_s-1\right)=\frac{v(i_0)-(1-p)^{l_s}a_s}{(1-p)^{l_s-1}a_s p}=$$

$$=\frac{1}{p\cdot\Delta}\ \{(i_0-dp)(1-p)^{l_1-l_s}a_1 \qquad a_{i_0}-(1-p)\cdot\Delta\}=$$

$$=\frac{1}{p\cdot\Delta}\left\{-\sum_{\substack{t=i_0\\ t\neq s}}^{1}(1-p)^{l_1-l_t+1}a_1 \qquad a_{i_0}+(1-p)^{l_1-l_s}[(i_0-1)-\right.$$

$$\left.-(d-1)p]\,a_1\cdots\hat{a}_s \qquad a_{i_0}\right\} \tag{5}$$

$$\left(\sum y_j \text{ при } l_s\right)=\frac{(1-p)^{l_s-1}a_s-v(i_0)}{(1-p)^{l_s-1}a_s p}=$$

$$=\frac{1}{p\cdot\Delta}\ \{\Delta-(i_0-dp)(1-p)^{l_1-l_s}a_1 \qquad a_{i_0}\}=$$

$$\frac{1}{p\cdot\Delta}\left\{\sum_{\substack{t=i_0\\ t\neq s}}^{1}(1-p)^{l_1-l_t}a_1 \qquad a_{i_0}-(1-p)^{l_1-l_s}[(i_0-1)-\right.$$

$$\left.-dp]\,a_1 \qquad a_{i_0}\right\}. \tag{6}$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. *Значение игры выражается формулой* (3), *а суммы компонент оптимальной стратегии* Y *при* $(1-p)^{l_s-1}a_s$ *и при* $(1-p)^{l_s}a_s$ *— соответственно формулами* (5) *и* (6).

Отметим, что если $d=i_0$, то Y сводится к одному столбцу $y_j=1$, $\sum\limits_{s=1}^{i_0} l_s^j=l$, т. е. Y является чистой стратегией с $l_s^j=l_s$; тогда $v\,(i_0)=(1-p)^{l_1}a_1=(1-p)^{l_2}a_2=$ $=\quad=(1-p)^{l_{i_0}}a_{i_0}$. Так как формулы (5) и (6) вполне определяют лишь суммы компонент, они могут вообще давать не одну стратегию, а целое множество оптимальных стратегий.

3. Система показателей $l_1, \ldots, l_{i_0}$. Будем считать, что $a_2>(1-p)^l a_1$, т. е. $i_0>1$. Очевидно, $i_0\,(i)=i$ для $i\leqslant i_0$. Из следствия 7 в [1] мы видим, что l_1 определяет по три возможности для l_s^j при каждом $s=2, \ldots, i$, $i\leqslant i_0$, именно,

$$l_1-k_s^1+1,\ l_1-k_s^1,\ l_1-k_s^1-1.$$

При этом, так как должно быть $l_1+\sum\limits_{s=2}^{i} l_s^j=l$, наибольшая величина для l_1 может получиться при наименьших возможных l_s^j (лемма 9 в [1]), т. е. при $l_s^j=l_1-k_s^1-1$. Отсюда получается, что

$$l_1 \leqslant \frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1+(i-1)}{i}.$$

Легко видеть, что значение

$$l_1=\left[\frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1+i-1}{i}\right]=r_i$$

(см. [1] стр. 453) допустимо только при обоих показателях l_1 и l_1-1 (см. [1] следствие 7, ср. с леммой 8).

С другой стороны, наименьшая величина для l_1 может получиться при наибольших возможных l_s^j, т. е. при $l_s^j=l_1-k_s^1+1$. Отсюда получается, что

$$l_1 \geqslant \frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1+(i-1)}{i}.$$

Легко видеть, что это крайнее значение

$$l_1=\frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1-(i-1)}{i}$$

возможно только при чистой стратегии Y, в которой $l_s=l_1-k_s^1+1$, $2\leqslant s\leqslant i$.

Если выписать два убывающих ряда чисел

$$\frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1+(i-1)}{i},$$

$$\frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1+(i-2)}{i}, \quad \ldots, \quad \frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1+1}{i}, \quad \frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1}{i}$$

$$\frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1-1}{i}, \quad \frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1-2}{i}, \quad \ldots, \quad \frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1-(i-1)}{i}$$

то, очевидно, имеется лишь две возможности: либо 1) только одно число

$$\frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1}{i}$$

целое, либо 2) только одна пара чисел

$$\frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1+c_i}{i}, \qquad \frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1-(i-c_i)}{i},$$

при $1\leqslant c_i\leqslant i-1$, целые, причем отличаются они на 1. Отсюда следует теорема.

Теорема 2. *При фиксированном номере i, $i\leqslant i_0$, для показателя l_1 допустимы лишь два значения r_i и r_{i-1}. Если число $l+k_2^1+\qquad+k_i^1$ делится на i, то имеется единственная возможность*

$$l_1=\frac{l+k_2^1+\qquad+k_i^1}{i}=r_i.$$

Если число $l+k_2^1+\quad+k_i^1+c_i$, $1\leqslant c_i\leqslant i-1$, *делится на* i, *то имеется две возможности, либо*

$$l_1=\frac{l+k_2^1+\quad+k_i^1+c_i}{i}=\left[\frac{l+k_2^1+\cdots+k_i^1+(i-1)}{i}\right]=r_i,$$

либо

$$l_1=\frac{l+k_2^1+\quad+k_i^1-(i-c_i)}{i}=\left[\frac{l+k_2^1+\quad+k_i^1-1}{i}\right]=r_i-1;$$

если $c_i=1$, *то для* $l_1=r_i-1$ *стратегия* Y *может быть только чистой, с* $l_s=l_1-k_s^1+1=r_i-k_s^1$, $s=2,\quad i$. *Значение* $l_1=r_i$ *допустимо только при обоих показателях* l_1 *и* l_1-1, $l_1=r_i$ *и* $l_1-1=r_i-1$.

4. Нахождение номера i_0. Допустим здесь, что случаи, разобранные в [1] в теоремах 5, 6 и в следствии 12, не имеют места, т. е. что $a_2>(1-p)^l a_1=v(1)$ и $a_3>v(2)$; это означает, что $i_0(n)>2$. Будем описывать процесс поиска i_0 дальше.

1-ый этап. Вычисляем r_3; если $k_4^1<r_3-1$ или если $k_4^1<r_3$ при $c_3=0$ или 1, то $i_0(n)>3$. Вычисляем r_4; если $k_5^1<r_4-1$ или если $k_5^1<r_4$ при $c_4=0$ или 1, то $i_0(n)>4$, и т. д. Пусть $h\geqslant 3$ — наименьший номер, для которого либо $k_{h+1}^1\geqslant r_h-1$ при $c_h\neq 0$ или 1, либо $k_{h+1}^1\geqslant r_h$ при $c_h=0$ или 1.

Если $k_{h+1}^1>r_h$, то $i_0(n)=h$.

2-ой этап. Остается рассмотреть два случая: $k_{h+1}^1=r_h$ и $k_{h+1}^1=r_h-1$ (при $c_h\neq 0$ или 1). Здесь нужно вычислять $v(h)$.

Если будет $a_{h+1}\leqslant v(h)$, то $i_0(n)=h$.

Если окажется $a_{h+1}>v(h)$, то $i_0(n)>h$. Нужно вычислить r_{h+1} при $k_{h+1}^1=r_h$ или $k_{h+1}^1=r_h-1$. Мы проведем более общее вычисление.

Лемма 1. *Пусть* $h<s\leqslant i_0(n)$. *Если* $r_t=r_h$ *при* $h<t\leqslant s-1$, *а* $k_t^1=r_h$ *или* $k_t^1=r_h-1$ *при* $h<t\leqslant s$, *то* $r_s=r_h$.

Доказательство. Из леммы 9 в [1] следует, что $r_s\leqslant r_{s-1}=r_h$. С другой стороны,

$$r_s=\left[\frac{(l+k_2^1+\cdots+k_h^1)+(k_{h+1}^1+\quad+k_s^1)+s-1}{s}\right]\geqslant$$

$$\geqslant\left[\frac{hr_h-c_h+(s-h)(r_h-1)+s-1}{s}\right]=\left[\frac{sr_h+h-1-c_h}{s}\right]=$$

$$=\left[r_h+\frac{h-1-c_h}{s}\right]=r_h.$$

Отсюда мы получаем, что $r_{h+1}=r_h$.

Если $k_{h+2}^1>r_h$, то $i_0(n)=h+1$.

Если $k_{h+2}^1\leqslant r_h$, то снова либо $k_{h+2}^1=r_h$, либо $k_{h+2}^1=r_h-1$. (Конечно, $k_{h+2}^1\geqslant k_{h+1}^1$.) Вычисляем $v(h+1)$.

Если будет $a_{h+2}\leqslant v(h+1)$, то $i_0(n)=h+1$.

Если окажется $a_{h+2}>v(h+1)$, то $i_0(n)>h+1$. Тогда, по лемме 1, $r_{h+2}=r_h$, и т. д. Можно сформулировать следующий результат.

Теорема 3. *Указанный здесь процесс позволяет найти* $i_0(n)$, *при условии, что мы умеем вычислять* $v(h)$, $v(h+1)$,

Таким образом, задача сводится к нахождению $v(i)$ при данном i (при условии $i_0(i)=i$), именно, к вычислению $v(i)$ по формуле (3), в которой

$l_1 \in \{r_i, r_i-1\}$, а $l_s \in \{l_1-k_s^1+1, l_1-k_s^1\}$, $2 \leqslant s \leqslant i$, в соответствии с l_1. Здесь общее число 2^i возможных комбинаций значений $l_1, \ldots, l_i$ может сократиться за счет того, что должно быть $l_s \leqslant l_{s-1}$ и $l_s \in \bigcap_{t=1}^{s-1} \{l_t-k_s^t+1, l_t-k_s^t\}$; кроме того, число $l_1-k_s^1$ при $l_1=r_i$ равно числу $l_1-k_s^1+1$ при $l_1=r_i-1$. Среди всех получающихся допустимых вариантов $v(i; \{l_t\}_{t=1}^i)$ для $v(i)$ нам нужно уметь находить единственный возможный.

Лемма 2. *В процессе нахождения номера i_0 каждое определенное для $v(i)$, $1 \leqslant i \leqslant i_0$, число $l_s(i)$, $1 \leqslant s \leqslant i$, не возрастает при возрастании i.*

Доказательство. Для $i+1 \leqslant i_0$ мы имеем $a_{i+1} > v(i)$; значит, игрок I будет обязательно нападать на $i+1$. Рассуждаем как в теореме 2 из [1]. Раз игрок I будет обязательно нападать на $i+1$, то при таком нападении он сможет получить больше, чем не нападая на него, т. е. будет $v(i+1) > v(i)$. Но $v(i) \geqslant (1-p)^{l_s(i)} a_s$, откуда следует, что $l_s(i+1) \leqslant l_s(i)$.

Поэтому в процессе нахождения i_0 может осуществиться лишь один из следующих двух случаев.

1) Найдется такое t, $h \leqslant t \leqslant i_0$, что $l_1(t-1) \geqslant r_h$ и $l_1(t) = r_h - 1$. Тогда $l_1(t') = r_h$ для $h \leqslant t' < t$ и $l_1(t) = r_h - 1$ для $t \leqslant t' \leqslant i_0$. Этот случай может осуществиться только при $k_{t'}^1 = r_h - 1$ для $h < t' \leqslant i_0$.

2) Для всех t, $h \leqslant t \leqslant i_0$, будет $l_1(t) = r_h$. В этом случае для некоторого u, $h \leqslant u \leqslant i_0$, будем иметь $k_{t'}^1 = r_h - 1$ при $h \leqslant t' < u$ и $k_{t'}^1 = r_h$ при $u < t' \leqslant i_0$.

5. Некоторые свойства формул для стратегии $Y(i)$. Как сказано выше, мы пока не можем прямо указать числа $l_1, \ldots, l_i$ (здесь также $i_0(i) = i$). Однако, имеют место некоторые связи между величинами, даваемыми формулами (5) и (6), которые могут оказаться здесь полезными. Эти связи следует использовать вместе с необходимыми условиями (Σy_j при l_s) > 0 и (Σy_j при $l_s - 1$) $\geqslant 0$ для $1 \leqslant s \leqslant i$.

Пусть фиксирован набор l_t при $1 \leqslant t \leqslant i$ и $t \neq s$, а для l_s рассмотрим (вообще говоря) два возможных значения, обозначив их через l_s+1 и l_s (при $l_s+1 \leqslant l_1$ и $l_s > 0$, если $s \neq 1$). Тогда выражение, стоящее в фигурных скобках в формуле (6), при $l_s = l_s + 1$ и соответствующем d принимает следующий вид:

$$\left\{ \sum_{\substack{t=i \\ t \neq s}}^{1} (1-p)^{l_1-l_t} a_1 \qquad a_i - (1-p)^{l_1-\bar{l}_s-1} [(i-1) - dp] a_1 \qquad a_i \right\};$$

обозначим его через $\gamma_s(i) = \gamma_s(i; \{l_t\}_{t \neq s}, l_s+1)$. Теперь выпишем выражение, стоящее в фигурных скобках в формуле (5), при $l_s = l_s$; соответствующее этому набору число „d", согласно формуле из (3), должно быть на 1 больше предыдущего, т. е. равняться $d+1$. Мы имеем:

$$\left\{ -\sum_{\substack{t=i \\ t \neq s}}^{1} (1-p)^{l_1-l_t+1} a_1 \qquad a_i + (1-p)^{l_1-\bar{l}_s} [(i-1) - dp] a_1 \qquad a_i \right\};$$

обозначим это выражение через $\delta_s(i)=\delta_s(i;\ \{l_t\}_{t\neq s},\ l_s)$. Следовательно,

$$\delta_s(i)=-\gamma_s(i)\cdot(1-p) \text{ при } s\neq 1,$$

$$\delta_1(i)=-\gamma_1(i).$$

Таким образом, установлена лемма.

Лемма 3. *При фиксированном наборе* $\{l_t\}_{t\neq s}$, *величины* γ_s *и* δ_s *имеют противоположные знаки, или обе одновременно равны нулю.*

Рассмотрим влияние на γ_1 и на δ_1 изменения каких-нибудь $l_{s_1}, \ldots, l_{s_b}$, $1\notin\{s_1, \ldots, s_b\}$, соответственно со значений $l_{s_1}, \ldots, l_{s_b}$ на значения $l_{s_1}+1$, $l_{s_b}+1$; при этом d, очевидно, перейдет в $d-b$.

Лемма 4. *При таком изменении показателей на бо́льшие величина* γ_1 *возрастает, если какое-нибудь* $a_t<(1-p)^{k_t^1-1}a_1$ *при* $t\in\{s_1, \ldots, s_b\}$, *и* γ_1 *сохраняется, если все* $a_t=(1-p)^{k_t^1-1}a_1$ *при* $t=s_1, \ldots, s_b$.

Доказательство.

$$\gamma_1\Big(i;\ \{l_t\}_{t\neq s_1,\ldots,s_b},\ \{l_{s_1}+1,\ \ldots,\ l_{s_b}+1\}\Big)-$$

$$-\gamma_1\Big(i;\ \{l_t\}_{t\neq s_1,\ldots,s_b},\ \{l_{s_1},\ \ldots,\ l_{s_b}\}\Big)=$$

$$=\Bigg\{\sum_{\substack{t=i\\ t\neq s_1,\ldots,s_b}}^{2}(1-p)^{l_1-l_t}a_1 \qquad a_i+$$

$$+\sum_{t=s_1}^{s_b}(1-p)^{l_1-\bar l_t-1}a_1 \qquad a_i-[(i-1)-(d-b)p]\,a_2 \qquad a_i\Bigg\}-$$

$$-\Bigg\{\sum_{\substack{t=i\\ t\neq s_1,\ldots,s_b}}^{2}(1-p)^{l_1-l_t}a_1 \qquad a_i+$$

$$+\sum_{t=s_1}^{s_b}(1-p)^{l_1-\bar l_t}\,a_1 \qquad a_i-[(i-1)-dp]\,a_2 \qquad a_i\Bigg\}=$$

$$=\sum_{t=s_1}^{s_b}(1-p)^{l_1-\bar l_t-1}\cdot p\cdot a_1 \qquad a_i-b\cdot p\cdot a_2 \qquad a_i=$$

$$=p\cdot\sum_{t=s_1}^{s_b}a_2 \qquad a_i\left[(1-p)^{l_1-\bar l_t-1}a_1-a_t\right]=$$

$$=p\cdot\sum_{t=s_1}^{s_b}a_2 \qquad a_i\left[(1-p)^{k_t^1-1}a_1-a_t\right],$$

так как

$$\{l_t+1,\ l_t\}\equiv\{l_1-k_t^1+1,\ l_1-k_t^1\}.$$

Лемма 5. *При таком изменении показателей на бо́льшие величина* δ_1 *всегда возрастает.*

Доказательство.

$$\delta_1\Big(i;\ \{l_t\}_{t\neq s_1,} \qquad \{l_{s_1}+1,\ \ldots,\ l_{s_b}+1\}\Big)-$$

$$-\delta_1\Big(i;\ \{l_t\}_{t\neq s_1,\ \ldots,\ s_b},\ \{l_{s_1}, \qquad ,\ l_{s_b}\}\Big)=$$

$$=\Bigg\{-\sum_{\substack{t=i\\ t\neq s_1,}}^{2} - (1-p)^{l_1-l_t+1}\,a_1 \qquad a_i -$$

$$-\sum_{t=s_1}^{s_b}(1-p)^{l_1-\bar{l}_t}\,a_1 \qquad a_i+[(i-1)-$$

$$-(d-b-1)p]\ a_2 \qquad a_i\Bigg\}-$$

$$-\Bigg\{-\sum_{\substack{t=i\\ t\neq s_1,\ \ldots}}^{2} \quad (1-p)^{l_1-l_t+1}\,a_1 \qquad a_i-$$

$$-\sum_{t=s_1}^{s_b}(1-p)^{l_1-\bar{l}_t+1}\,a_1 \qquad a_i+[(i-1)-(d-1)p]\,a_2 \qquad a_i\Bigg\}=$$

$$=-\sum_{t=s_1}^{s_b}(1-p)^{l_1-\bar{l}_t}\cdot p\cdot a_1 \qquad a_i+b\cdot p\cdot a_2 \qquad a_i=$$

$$=p\cdot\sum_{t=s_1}^{s_b} a_2 \qquad a_i\,[-(1-p)^{l_1-\bar{l}_t}\,a_1+a_t]=$$

$$=p\cdot\sum_{t=s_1}^{s_b} a_2\cdots\hat{a}_t\cdots a_i\ [-\ (1-p)^{k_t^1}\,a_1+a_t].$$

Отсюда следует, что если

$$\delta_1\Big(i;\ r_t-1,\quad \{l_1-k_t^1+1\}_{t\neq 1}\Big)<0,$$

то

$$l_1(i)=r_i.$$

Установим еще две зависимости.

Лемма 6.

$$v\Big(i;\ \{l_t\}_{t\neq s},\ l_s=l_s+1\Big)-v\Big(i;\ \{l_t\}_{t\neq s}\ l_s=l_s\Big)=$$

$$=C(s)\cdot\gamma_s\Big(i;\ \{l_t\}_{t\neq s},\ l_s=l_s+1\Big),$$

где

$$C(s)>0.$$

Доказательство. Пусть сначала $s \neq 1$. Тогда

$$v\left(i;\ l_1, \{l_t\}_{t\neq s,1}, l_s = l_1 - k_s^1 + 1\right) - v\left(i;\ l_1, \{l_t\}_{t\neq s,1}, l_s = l_1 - k_s^1\right) =$$

$$= \frac{(1-p)^{l_1-1}[i-dp]\, a_1 \cdots a_i}{\sum\limits_{\substack{t=i\\ t\neq s}}^{1} (1-p)^{l_1-l_t} a_1 \cdots \hat{a}_t \cdots a_i + (1-p)^{k_s^1-1} a_1 \cdots \hat{a}_s \cdots} -$$

$$- \frac{(1-p)^{l_1-1}[i-(d+1)p]\, a_1 \cdots a_i}{\sum\limits_{\substack{t=i\\ t\neq s}}^{1} (1-p)^{l_1-l_t} a_1 \cdots \hat{a}_t \cdots a_i + (1-p)^{k_s^1} a_1 \cdots \hat{a}_s \cdots} =$$

$$= \frac{(1-p)^{l_1-1} a_1 \cdots a_i}{\Delta(i,\ l_1-k_s^1+1)\cdot\Delta(i,\ l_1-k_s^1)} \times$$

$$\times \Bigg\{ [i-dp] \Bigg[\sum\limits_{\substack{t=i\\ t\neq s}}^{1} (1-p)^{l_1-l_t} a_1 \qquad\qquad a_i +$$

$$+ (1-p)^{k_s^1} a_1 \qquad\qquad a_i \Bigg] - [i-(d+1)p] \times$$

$$\times \Bigg[\sum\limits_{\substack{t=i\\ t\neq s}}^{1} (1-p)^{l_1-l_t} a_1 \qquad\qquad a_i + (1-p)^{k_s^1-1} a_1 \qquad\qquad a_i \Bigg] \Bigg\} =$$

$$= -\frac{(1-p)^{l_1-1} a_1 \cdots a_i}{\Delta(i,\ l_1-k_s^1+1)\cdot\Delta(i,\ l_1-k_s^1)} \Bigg\{ -[i-dp](1-p)^{k_s^1-1} a_1 \qquad\qquad a_i \cdot p +$$

$$+ p \Bigg[\sum\limits_{\substack{t=i\\ t\neq s}}^{1} (1-p)^{l_1-l_t} a_1 \qquad\qquad a_i + (1-p)^{k_s^1-1} a_1 \qquad\qquad a_i \Bigg] \Bigg\} =$$

$$= \frac{(1-p)^{l_1-1} a_1 \cdots a_i \cdot p}{\Delta(i, l_1-k_s^1+1)\cdot\Delta(i,\ l_1-k_s^1)} \Bigg\{ \sum\limits_{\substack{t=i\\ t\neq s}}^{1} (1-p)^{l_1-l_t} a_1 \qquad\qquad a_i -$$

$$- (1-p)^{k_s^1-1}[(i-1)-dp]\, a_1 \qquad\qquad a_i \Bigg\} =$$

$$= C(s)\cdot\gamma_s\left(i;\ l_1,\ \{l_t\}_{t\neq s},\ l_s = l_1 - k_s^1 + 1\right).$$

Пусть теперь $s=1$. Тогда

$$v\left(i;\ l_1+1,\ \{l_t\}_{t\neq 1}\right) - v\left(i;\ l_1, \{l_t\}_{t\neq 1}\right) =$$

$$= \frac{(1-p)^{\bar{l}_1}[i-dp]\, a_1 \cdots a_i}{\sum\limits_{t=i}^{2} (1-p)^{\bar{l}_1+1-l_t} a_1 \cdots \hat{a}_t \cdots a_i + \hat{a}_2 \cdots} -$$

$$-\frac{(1-p)^{\bar{l}_1-1}[i-(d+1)p]\,a_1\cdots a_i}{\sum\limits_{t=i}^{2}(1-p)^{\bar{l}_1-l_t}a_1\cdots\hat{a}_t\cdots a_i+a_2\cdots}=$$

$$=\frac{(1-p)^{\bar{l}_1-1}a_1\cdots a_i}{\Delta(i,\ \bar{l}_1+1)\cdot\Delta(i,\ \bar{l}_1)}\Big\{[i-dp]\Big[\sum_{t=i}^{2}(1-p)^{\bar{l}_1-l_t+1}a_1\qquad a_i+$$

$$+(1-p)a_2\qquad a_i\Big]-[i-(d+1)p]\times$$

$$\times\Big[\sum_{t=i}^{2}(1-p)^{\bar{l}_1+1-l_t}a_1\qquad a_i+a_2\qquad a_i\Big]\Big\}=$$

$$=\frac{(1-p)^{\bar{l}_1-1}a_1\cdots a_i}{\Delta(i,\ \bar{l}_1+1)\cdot\Delta(i,\ \bar{l}_1)}\Big\{-[i-dp]\,a_2\qquad a_i\cdot p+$$

$$+p\Big[\sum_{t=i}^{2}(1-p)^{\bar{l}_1+1-l_t}a_1\qquad a_i+a_2\qquad a_i\Big]\Big\}=$$

$$=\frac{(1-p)^{\bar{l}_1-1}a_1\cdots a_i\cdot p}{\Delta(i,\ \bar{l}_1+1)\cdot\Delta(i,\ \bar{l}_1)}\Big\{\sum_{t=i}^{2}(1-p)^{\bar{l}_1+1-l_t}a_1\qquad a_i-$$

$$-[(i-1)-dp]\,a_2\qquad a_i\Big\}=C(1)\cdot\gamma_1\Big(i;\ \bar{l}_1+1,\ \{l_t\}_{t\neq 1}\Big).$$

Лемма 7. *Пусть* $s\leqslant i$, $s\neq 1$. *Обозначим величину в фигурных скобках в формуле* (6) *для* l_{s-1} *при наборе*

$$\Big(\{l_t\}_{t\neq s},\ l_s=\bar{l}_s\Big)$$

через $\{\Sigma y_j$ *при* l_{s-1}; *для* $l_s=\bar{l}_s\}$. *Тогда* $\{\Sigma y_j$ *при* l_{s-1}; *для* $l_s=\bar{l}_s\}-$ $-\gamma_s\Big(i;\ \{l_t\}_{t\neq s},\ l_s=\bar{l}_s+1\Big)=C'(s)\cdot[(1-p)^{l_{s-1}-(\bar{l}_s+1)}a_{s-1}-a_s]$, *где* $C'(s)>0$.

Доказательство.

$$\{\Sigma y_j\ \text{при}\ l_{s-1};\ \text{для}\ l_s=\bar{l}_s\}-\gamma_s\Big(i;\ \{l_t\}_{t\neq s},\ l_s=\bar{l}_s+1\Big)=$$

$$=\Big\{\sum_{\substack{t=i\\ t\neq s-1,\,s}}^{1}(1-p)^{l_1-l_t}a_1\qquad a_i+$$

$$+(1-p)^{l_1-\bar{l}_s}a_1\qquad a_i-(1-p)^{l_1-l_{s-1}}\times$$

$$\times[(i-1)-(d+1)p]\,a_1\qquad a_i\Big\}-$$

$$-\Big\{\sum_{\substack{t=i\\ t\neq s-1,\,s}}^{1}(1-p)^{l_1-l_t}a_1\qquad a_i+$$

$$+(1-p)^{l_1-l_{s-1}}a_1\qquad\hat{a}_{s-1}\qquad a_i-(1-p)^{l_1-\bar{l}_s-1}[(i-1)-$$

$$-dp]\,a_1\qquad a_i\Big\}=$$

$$=(1-p)^{l_1-\bar{l}_s-1}[i-(d+1)p]\,a_1 \quad \hat{a}_s \quad a_i-$$
$$-(1-p)^{l_1-l_{s-1}}[i-(d+1)p]\,a_1 \quad \hat{a}_{s-1} \quad a_i=$$
$$=(1-p)^{l_1-l_{s-1}}[i-(d+1)p]\,a_1 \quad a_{s-2}\,a_{s+1}$$
$$\times[(1-p)^{l_{s-1}-(\bar{l}_s+1)}a_{s-1}-a_s].$$

Таким образом, указанная здесь разность будет $\geqslant 0$ в следующих случаях: 1) если $s-1=1$; 2) если $l_{s-1}=l_s+1$; 3) если $l_{s-1}=l_1-k^1_{s-1}$ (так как $l_s+1=l_1-k^1_s+1$ и всегда $a_s\leqslant(1-p)^{k^1_s-1}\,a_1<(1-p)^{k^1_s-1-k^1_{s-1}}\,a_{s-1}$).

Имеют место также некоторые связи между показателями и суммами (Σy_j *при* ...).

Лемма 8. *Если все* $l_t=l_1-k^1_t$, *то* (Σy_j *при* $l_1-1)>0$.

Доказательство. В этом случае для выражения в фигурных скобках в формуле (5) получим:

$$\left\{-\sum_{t=i}^{2}(1-p)^{k^1_t+1}a_1 \qquad a_i+[(i-1)-(d-1)p]\,a_2 \qquad a_i\right\}\geqslant$$
$$\geqslant-\sum_{t=i}^{2}(1-p)^{k^1_t+1}a_1 \qquad a_i+(i-1)(1-p)\,a_2 \qquad a_i=$$
$$=(1-p)\left\{\sum_{t=i}^{2}a_2 \qquad a_i[-(1-p)^{k^1_t}a_1+a_t]\right\}>0.$$

Лемма 9. *Если все* $l_t=l_1-k^1_t+1$, *то* (Σy_j *при* $l_1)>0$.

Доказательство. Здесь для выражения в фигурных скобках в формуле (6) получим (так как $d\geqslant 1$):

$$\left\{\sum_{t=i}^{2}(1-p)^{k^1_t-1}a_1 \qquad a_i-[(i-1)-dp]\,a_2 \qquad a_i\right\}>$$
$$>\sum_{t=i}^{2}(1-p)^{k^1_t-1}a_1 \qquad a_i-(i-1)\,a_2 \qquad a_i=$$
$$=\sum_{t=i}^{2}a_2 \qquad a_i[(1-p)^{k^1_t-1}a_1-a_t]\geqslant 0.$$

Лемма 10. *Пусть* $u<s$. *Если* $l_s=l_u-k^u_s$, *то* (Σy_j *при* $l_u-1)>(\Sigma y_j$ *при* $l_s-1)$ *и* (Σy_j *при* $l_s)>(\Sigma y_j$ *при* $l_u)$. *Если* $l_s=l_u-k^u_s+1$, *то* (Σy_j *при* $l_s-1)\geqslant(\Sigma y_j$ *при* $l_u-1)$ *и* (Σy_j *при* $l_u)\geqslant(\Sigma y_j$ *при* $l_s)$.

Доказательство. Из формул (5) для s и для u получаем:

$$(\Sigma y_j \text{ при } l_s-1)-(\Sigma y_j \text{ при } l_u-1)=$$
$$=\frac{1}{p\cdot\Delta}\left\{(1-p)^{l_1-l_s}(i-dp)\,a_1 \qquad a_i-\right.$$
$$\left.-(1-p)^{l_1-l_u}(i-dp)\,a_1 \qquad a_i\right\}=$$
$$=\frac{(1-p)^{l_1-l_u}(i-dp)\,a_1\cdots\hat{a}_u\cdots\hat{a}_s\cdots a_l}{p\cdot\Delta}\,\{(1-p)^{l_u-l_s}a_u-a_s\}.$$

Аналогично, из формул (6) для s и для u получаем:

$$(\Sigma y_j \text{ при } l_s)-(\Sigma y_j \text{ при } l_u)=$$

$$=\frac{1}{p\cdot\Delta}\Big\{(1-p)^{l_1-l_u}(i-dp)\,a_1 \qquad a_i-$$

$$-(1-p)^{l_1-l_s}(i-dp)\,a_1 \qquad a_i\Big\}=$$

$$=\frac{(1-p)^{l_1-l_u}(i-dp)\,a_1\cdots\hat{a}_u\cdots\hat{a}_s\cdots a_i}{p\cdot\Delta}\{a_s-(1-p)^{l_u-l_s}a_u\}.$$

Отсюда следуют все утверждения.

Можно установить еще одно свойство величин δ_1 и γ_1 — зависимость их от изменения i. Пусть для i имеется определенный набор $l_1,\ \ldots,\ l_i$, а для $i+1$, при $a_{i+1}>(1-p)^{l_1}a_1$, имеется l_{i+1} и этот же набор $l_1,\ \ldots,\ l_i$. Сравним $\delta_1(i)$ и $\delta_1(i+1)$. Очевидно, d при этом уменьшается на $l_{i+1}-1$ (см. формулу (3))

$$\delta_1\Big(i+1;\ \{l_t\},\ l_{i+1}\Big)=$$

$$=-\sum_{t=i}^{2}(1-p)^{l_1-l_t+1}a_1 \qquad a_{i+1}-$$

$$-(1-p)^{l_1-l_{i+1}+1}a_1 \qquad a_i+[i-(d-l_{i+1}+1)p]\,a_2 \qquad a_{i+1}=$$

$$=a_{i+1}\Big\{-\sum_{t=i}^{2}(1-p)^{l_1-l_t+1}a_1 \qquad a_i+$$

$$+[(i-1)-dp]\,a_2 \qquad a_i+[1-(l_{i+1}-1)p]\,a_2\cdots a_i\Big\}-$$

$$-(1-p)^{l_1-l_{i+1}+1}a_1 \qquad a_i=a_{i+1}\Big\{\delta_1\Big(i;\ \{l_t\}\Big)+$$

$$+[1+(l_{i+1}-1)p]\,a_2 \qquad a_i\Big\}-(1-p)^{l_1-l_{i+1}+1}a_1\{a_2 \qquad a_i\}.$$

Так как l_{i+1} равно либо $l_1-k^1_{i+1}+1$, либо $l_1-k^1_{i+1}$, мы имеем $l_1-l_{i+1}+1\geqslant k^1_{i+1}$ и, значит, $a_{i+1}>(1-p)^{l_1-l_{i+1}+1}a_1$. Отсюда следует лемма.

Лемма 11. *При сохранении набора l_t для $t\leqslant i$ и при $a_{i+1}>(1-p)^{l_1}a_1$, если $\delta_1(i)\geqslant 0$, то $\delta_1(i+1)>0$. И, значит, если $\gamma_1(i+1)\geqslant 0$, то $\gamma_1(i)>0$.*

Лемма 12. *При $l_{i+1}=1$ и сохранении набора l_t для $t\leqslant i$, если $a_{i+1}>v(i)$, то $v(i+1)>v(i)$.*

Доказательство. Очевидно, здесь d сохраняется. Из формул (4) для $i+1$ и для i получаем:

$$v(i+1)-v(i)=\frac{(1-p)^{l_1-1}[(i+1)-dp]\,a_1\cdots a_{i+1}}{\Delta(i+1;\ l_1,\cdots,l_i,\ 1)}-$$

$$-\frac{(1-p)^{l_1-1}[i-dp]\,a_1\cdots a_i}{\Delta(i;\ l_1,\cdots,l_i)}=\frac{(1-p)^{l_1-1}a_1\cdots a_i}{\Delta(i+1)\cdot\Delta(i)}\times$$

$$\times\{[(i+1)-dp]\,a_{i+1}\cdot\Delta(i)-[i-dp]\cdot\Delta(i+1)\}=$$

$$=\frac{(1-p)^{l_1-1}a_1\cdots a_i}{\Delta(i+1)\cdot\Delta(i)}\{a_{i+1}\cdot\Delta(i)-(1-p)^{l_1-1}[i-dp]\,a_1 \qquad a_i\},$$

так как $\Delta(i+1)=a_{i+1}\cdot\Delta(i)+(1-p)^{l_1-1}a_1$

6. Величины i_0 и $l_1, \ldots, l_{i_0}$ при достаточно большом числе вторых по ценности объектов, $m \geqslant l-k_2^1$.

Пусть $k_2^1 \leqslant l$, $(1-p)^{k_2^1} a_1 < a_m$ и $a_{m+1} \leqslant (1-p)^{k_2^1} a_1$; $m \geqslant 2$.

Если $k_2^1 = l$, то $r_2 = \ldots = r_{i_0} = l = k_2^1$; следовательно, $l_1 = l$, $l_2 = \quad = l_{i_0} = 1$, и $i_0 \leqslant m$ находится согласно п. 4 (см. теорему 7 из [1]).

Если $k_2^1 < l$, то для $2 \leqslant t \leqslant m$ получаем

$$r_t = \left[\frac{l+(t-1)k_2^1+t-1}{t}\right] = \left[k_2^1+1+\frac{l-k_2^1-1}{t}\right] \geqslant k_2^1+1.$$

При $t \leqslant l-k_2^1-1$ получаем $r_t > k_2^1+1$; значит, самое малое t, при котором $r_t = k_2^1+1$, равно $l-k_2^1$. Поэтому значение $l_1 = k_2^1$ допустимо только при $m \geqslant l-k_2^1$, и тогда $h = l-k_2^1$ и номер $t = l-k_2^1$ обязательно должен участвовать в Y (см. п. 4). Кроме того, при $l_1 = k_2^1$ участвовать могут лишь номера $t \leqslant m$ и притом с показателями $l_t = l_1 - k_2^1 + 1 = 1$. Так как этими $l_t = 1$ нужно дополнять столбцы до $\sum_{t=1}^{i_0} l'_t = l$, мы, учитывая теорему 2, получим следующее.

Теорема 4. *Если $m = l-k_2^1$, то номер 1 участвует с двумя показателями $l_1 = k_2^1+1$ и $l_1-1 = k_2^1$, и при этом $i_0 \geqslant m = l-k_2^1$. Если $m = l-k_2^1+1$, то либо номер 1 участвует с двумя показателями $l_1 = k_2^1+1$ и $l_1-1 = k_2^1$, и при этом $i_0 \geqslant m = l-k_2^1+1$; либо номер 1 участвует с одним показателем $l_1 = k_2^1$, и при этом $i_0 = m = l-k_2^1+1$ и Y является чистой стратегией с $l_t = 1$, $2 \leqslant t \leqslant l-k_2^1+1$. Если $m \geqslant l-k_2^1+2$, то номер 1 может участвовать либо с двумя показателями $l_1 = k_2^1+1$ и $l_1-1 = k_2^1$, и тогда $i_0 \geqslant m$; либо с одним показателем $l_1 = k_2^1$, и тогда $i_0 = m$; либо с двумя показателями $l_1 = k_2^1$ и $l_1-1 = k_2^1-1$, и тогда $l-k_2^1+2 \leqslant i_0 \leqslant m$.*

Вычислим для этих случаев величину $d(i)$. Пусть сначала $l_1 = k_2^1$; тогда могут быть только $l_t = l_1 - k_2^1 + 1 = 1$, и, значит, $d(i) = l+i-(k_2^1+i-1) = l-k_2^1+1$.

Пусть теперь $l_1 = k_2^1+1$. Тогда могут быть все $l_t = 1$, и в этом случае $d(i) = l+i-(k_2^1+1+i-1) = l-k_2^1$. Также может быть часть $l_t = 2$; тогда, так как $l_{t+1} \leqslant l_t$, до некоторого $s \geqslant 2$ будут $l_2 = \quad = l_s = 2$, а затем $l_{s+1} = \quad = l_i = 1$; легко видеть, что должно быть $s \leqslant l-k_2^1$; в этом случае получим

$$d(i) = l+i-[k_2^1+1+2(s-1)+i-s] = l-k_2^1-s+1.$$

Исследуем подробнее возможность участия номера 1 с показателями $l_1 = k_2^1+1$ и $l_1-1 = k_2^1$, при $m \geqslant l-k_2^1$. Здесь может быть $l_t = 2$ или 1 для $2 \leqslant t \leqslant l-k_2^1$, и лишь $l_t = 1$ для $t > l-k_2^1$ и для $t > m$ при $k_t^1 = k_2^1+1$. Из следствия 7 в [1] видно, что $l_t = 2$ может быть только при участии номера t с двумя показателями $l_t = 2$ и $l_t - 1 = 1$. Итак, либо будут все $l_t = 1$, либо до некоторого $s = s(i)$, $2 \leqslant s \leqslant l-k_2^1$, будут $l_2 = \ldots = l_s = 2$, а остальные $l_{s+1} = \quad = l_i = 1$. В последнем случае должно быть $(\Sigma y_j$ при $l_s = 2) > 0$, т. е. $\gamma_s(i;\ k_2^1+1,\ \{l_t = 2\}_{t=2}^{s},\ \{l_t = 1\}_{t=s+1}^{i}) > 0$; при этом, по лемме 10, получим и $(\Sigma y_j$ при $l_1 = k_2^1+1) > 0$ при наборе $\{l_t = 2\}_{t=2}^{s(i)}$ и $\{l_t = 1\}_{t=s(i)+1}^{i}$. Нам нужно (см. стр. 240) из всех вариантов

$$v(i;\ k_2^1+1,\ \{l_t = 1\}_{t=2}^{i}) \equiv v(i,\ k_2^1+1,\ 1),$$

$$v(i;\ k_2^1+1,\ l_2 = 2,\ \{l_t = 1\}_{t=3}^{i}) \equiv v(i,\ k_2^1+1,\ 2),$$

$$v(i;\ k_2^1+1,\ \{l_t = 2\}_{t=2}^{3},\ \{l_t = 1\}_{t=4}^{i}) \equiv v(i,\ k_2^1+1, 3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v(i;\ k_2^1+1,\ \{l_t = 2\}_{t=2}^{l-k_2^1},\ \{l_t = 1\}_{t=l-k_2^1+1}^{i}) \equiv v(i,\ k_2^1+1,\ l-k_2^1)$$

для значения $v(i)$, при $i \geqslant m$, найти единственный возможный.

Из леммы 7 и следующего за ней замечания мы получаем, что величина $\gamma_u(i;\ k_2^1+1,\ \{l_t=2\}_{t=2}^u,\ \{l_t=1\}_{t=u+1}^i)$, $2\leqslant u\leqslant l-k_2^1$, не убывает при убывании u. Отсюда и из леммы 3 следует, что искомый вариант для $v(i)$ вполне определится: числом $s=s(i)$ окажется первое, т. е. наибольшее, среди чисел $u=l-k_2^1$, $l-k_2^1-1,\ \ldots,\ 2$, для которого будет $\gamma_u=\gamma_u(i;\ k_2^1+1,\ \{l_t=2\}_{t=2}^u,\ \{l_t=1\}_{t=u+1}^i)>0$; в этом случае получаем $\gamma_2(i;\ k_2^1+1,\ l_2=2,\ \{l_t=1\}_{t=3}^i)>0$, откуда, по лемме 7, $\gamma_1(i;\ k_2^1+1,\ \{l_t=1\}_{t=2}^i)>0$, и, по лемме 11, $\gamma_1(m;\ k_2^1+1,\ \{l_t=1\}_{t=2}^m)>0$. Если все такие $\gamma_u\leqslant 0$, то все $l_t=1$, считаем $s(i)=1$; тогда здесь должно выполняться условие (Σy_j при $l_1=k_2^1+1)>0$ при наборе $\{l_t=1\}_{t=2}^i$, и, значит (см. лемму 11), должно выполняться условие $\gamma_1(m;\ k_2^1+1,\ \{l_t=1\}_{t=2}^m)>0$. Если будут $\gamma_u=0$, то они должны следовать подряд.

Заметим, что для $m=l-k_2^1$ должно автоматически оказываться $\gamma_1(m;\ k_2^1+1)>0$, а для $m=l-k_2^1+1$ – оказываться $\gamma_1(m;\ k_2^1+1)\geqslant 0$. Так это и есть: при $s(m)>1$ – в обоих случаях на основании леммы 10; при $s(m)=1$ – непосредственно из формулы для $\gamma_1(m;\ k_2^1+1)$ на стр. 240, так как будет $d=l-k_2^1$, и в первом случае получим

$$\gamma_1(m)=\sum_{t=m}^{2} a_2 \qquad a_m[(1-p)^{k_2^1}a_1-(1-p)a_t]+p\cdot a_2 \qquad a_m>0,$$

а во втором случае –

$$\gamma_1(m)=\sum_{t=m}^{2} a_2 \qquad a_m[(1-p)^{k_2^1}a_1-(1-p)a_t]\geqslant 0.$$

Исследуем теперь возможность участия номера 1 с показателями $l_1=k_2^1$ и $l_1-1=k_2^1-1$. Здесь $m\geqslant l-k_2^1+2$, $m\geqslant i_0\geqslant l-k_2^1+2$, и каждый номер i, $1<i\leqslant i_0$, должен участвовать (см. следствие 7 из [1]) с показателями 1 и 0. Нужно, в соответствии с п. 4, вычислять $v(i)$ для $i\geqslant l-k_2^1+2$ и сравнивать с a_{i+1}.

Для каждого такого i, по лемме 9, имеем (Σy_j при $k_2^1)>0$, а (Σy_j при k_2^1-1) зависит от $\delta_1(i)=\delta_1(i;\ k_2^1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$. На основании леммы 11, для осуществления рассматриваемого случая должно быть $\delta_1(m)>0$ при наборе $l_1=k_2^1$, $\{l_t=1\}_{t=2}^m$. Тогда нужно найти i', являющееся самым малым среди $i\geqslant l-k_2^1+2$, для которых $\delta_1(i)>0$, и указанное в п. 4 сравнение a_{i+1} с $v(i)$ проводить последовательно, начиная с $i=i'$. При этом, по лемме 12, величины $v(i)$ будут возрастать.

Мы покажем здесь, что условие $\delta_1(m)>0$ является достаточным для участия номера 1 с показателями k_2^1 и k_2^1-1. Нужно проверить остальные знаки, при $i\geqslant i'$. На основании леммы 10 для $u=1$, имеем (Σy_j при $l_t-1)>0$ при всех $t\neq 1$ (это находится в соответствии со следствием 7 из [1]); здесь $l_t-1=0$. Также на основании леммы 10 сумма (Σy_j при l_t), $t\neq 1$, будет самой малой при $t=i$, так как $a_t>(1-p)^{k_t^1}a_1\geqslant(1-p)^{k_t^1-k_u^1+1}\ a_u=(1-p)\,a_u$ и $a_t\leqslant a_u$, т. е. $k_t^u=1$ и, значит, $l_t=l_u-k_t^u+1$.

Но (Σy_j при l_i), согласно формуле (6), зависит от скобки

$$\left\{\sum_{t=i-1}^{1}(1-p)^{l_1-l_t}a_1 \qquad \hat{a}_t\ \ldots a_i-(1-p)^{l_1-1}[(i-1)-dp]\,a_1 \qquad a_{i-1}\right\}.$$

Для $i'=l-k_2^1+2$ эта скобка >0, так как тогда

$$d(l-k_2^1+2)=l-k_2^1+1=i'-1,\ a_{i'}>(1-p)^{k_t^1}a_1,\ a_{i'}>(1-p)\,a_t,$$

и мы получаем

$$\left\{\sum_{t=i'-1}^{2}(1-p)^{k_t^1-1}a_1 \qquad a_{i'}+a_2 \qquad a_{i'}-\right.$$
$$\left.-(i'-1)(1-p)^{k_t^1}a_1 \qquad a_{i'-1}\right\}>0.$$

Если $v(i)$ и $v(i-1)$ вычисляются при одинаковых l_1, d и $\{l_t=1\}$, то эта скобка равна

$$a_i\cdot\Delta(i-1;\ l_1,\ \ldots,\ l_{i-1})-(1-p)^{l_1-1}[(i-1)-dp],$$

и поэтому она >0 при $a_i>v(i-1)$. Отсюда следует, что остается проверить сумму (Σy_j при l_i) для $i=i'$ и $i'>l-k_2^1+2$ $(l_i=1)$.

Если окажется $\delta_1(i'-1)=0$, то $v(i'-1)=(1-p)^{k_t^1}a_1<a_{i'}$, а $v(i'-1)$ и $v(i')$ вычисляются при одинаковых l_1, d и $\{l_t=1\}$; следовательно, в этом случае получаем (Σy_j при l_i)>0 для $i=i'$.

Пусть теперь $\delta_1(i'-1)<0$, и, значит, для $i'-1$ номер 1 участвует с показателями $l_1=k_2^1+1$ и $l_1-1=k_2^1$; следовательно $v(i'-1)<(1-p)^{k_t^1}a_1<a_{i'}$, где $v(i'-1)$ имеет вполне определенный соответствующий вид $v(i'-1,\ k_2^1+1,\ s(i'-1))$, при $1\leqslant s(i'-1)\leqslant l-k_2^1$. Из леммы 6 следует, что должно быть соответственно (при $s(i'-1)>1$)

$$v(i'-1)=v(i'-1,\ k_2^1+1,\ s)>v(i'-1,\ k_2^1+1,\ s-1)> \quad >$$
$$>v\left(i'-1,\ k_2^1+1,\ 1\right),$$

а, так как $\delta_1(i'-1)<0$, и, значит, $\gamma_1(i'-1)>0$, имеем

$$v(i'-1,\ k_2^1+1,\ 1)>v(i'-1,\ k_2^1,\ 1).$$

Отсюда получаем $a_{i'}>v(i'-1,\ k_2^1,\ 1)$, т. е.

$$a_{i'}>\frac{(1-p)^{k_t^1-1}[(i'-1)-dp]\ a_1\ \ldots\ a_{i'-1}}{\sum\limits_{t=i'-1}^{2}(1-p)^{k_t^1-1}a_1 \qquad a_{i'-1}+a_2},$$

а это как раз и означает, что нужная нам скобка будет >0.

Далее, теперь ясно, что для участия номера 1 с одним показателем $l_1=k_2^1$ характерным является условие $\delta_1(m;\ k_2^1,\ 1,\ \ldots,\ 1)=0$.

Будем обозначать через $s(i)$, при $i\geqslant m$ $(m\geqslant l-k_2^1)$, либо наибольшее из чисел $u=l-k_2^1,\ l-k_2^1-1,\ \ldots,\ 2$, для которых

$$\gamma_u(i;\ k_2^1+1,\ \{l_t=2\}_{t=2}^{u},\ \{l_t=1\}_{t=u+1}^{l})>0,$$

либо $s(i)=1$, если $\gamma_2(i;\ k_2^1+1,\ l_2=2,\ \{l_t=1\}_{t=3}^{l})\leqslant 0$.

Из всех последних рассуждений следует теорема.

Теорема 5. *При $m\geqslant l-k_2^1$ имеют место лишь следующие случаи.*

1) *Если $m=l-k_2^1$, или если $m\geqslant l-k_2^1+1$ и $\gamma_1(m;\ k_2^1+1,\ \{l_t=1\}_{t=2}^{m})>0$, то номер 1 участвует с показателями $l_1=k_2^1+1$ и $l_1-1=k_2^1$, для каждого*

$v(i)$, $i \geqslant m$, номера t при $2 \leqslant t \leqslant s(i)$ участвуют с показателями $l_t = 2$ и $l_t - 1 = 1$, а номера t при $s(i)+1 \leqslant t \leqslant i$ участвуют или с одним показателем $l_t = 1$ (очевидно, лишь при $t \leqslant l - k_2^1$), или с показателями $l_t = 1$ и $l_t - 1 = 0$; номер $i_0 \geqslant m$ определяется в соответствии с п. 4, из сравнения a_{i+1} с $v(i)$ для $i \geqslant m$.

2) *Если $m \geqslant l - k_2^1 + 1$ и $\gamma_1(m;\ k_2^1+1,\ \{l_t=1\}_{t=2}^m) = 0$, то $i_0 = m$, номер 1 участвует с одним показателем $l_1 = k_2^1$, а номера t при $2 \leqslant t \leqslant i_0$ участвуют или с одним показателем $l_t = 1$ (очевидно, лишь при $t \leqslant l - k_2^1 + 1$), или с показателями $l_t = 1$ и $l_t - 1 = 0$; при этом в случае $m = l - k_2^1 + 1$ стратегия $Y(i_0)$ должна быть чистой.*

3) *Если $m \geqslant l - k_2^1 + 2$ и $\gamma_1(m;\ k_2^1+1,\ \{l_t=1\}_{t=2}^m) < 0$, то номер 1 участвует с показателями $l_1 = k_2^1$ и $l_1 - 1 = k_2^1 - 1$, а номера t при $2 \leqslant t \leqslant i_0$ участвуют или с одним показателем $l_t = 1$ (очевидно, лишь при $t \leqslant l - k_2^1 + 1$), или с показателями $l_t = 1$* и *$l_t - 1 = 0$; номер i_0, $l - k_2^1 + 2 \leqslant i' \leqslant i_0 \leqslant m$, определяется в соответствии с п. 4, из сравнения a_{i+1} с $v(i)$ для $i' \leqslant i \leqslant m$, где i' есть самое малое среди $i \geqslant l - k_2^1 + 2$, для которых $\delta_1(i;\ k_2^1,\ \{l_t=1\}_{t=2}^i) > 0$.*

7. **Замечания.** Аналогично проведенному в п. 6 исследованию, можно, используя леммы из п. 5, искать i_0 и набор $l_1, \ldots, l_{i_0}$ в любом из еще не разобранных случаев, считая уже $k_2^1 < l$ и $m < l - k_2^1$. Если k_2^1 велико, то $l - k_2^1$ мало, и рассмотреть все возможности при $m < l - k_2^1$ вполне доступно.

Случай $k_2^1 = l - 1$ подойдет под $m \geqslant l - k_2^1$, так как здесь $l - k_2^1 = 1$, следовательно всегда даже $m \geqslant l - k_2^1 + 1$. Случай $k_2^1 = l - 2$ также подойдет под $m \geqslant l - k_2^1$, так как здесь $l - k_2^1 = 2$, а всегда $m \geqslant 2$.

При $k_2^1 = l - 3$ (и $m < l - k_2^1 = 3$) для l_1 возможны лишь значения $l - 1$ или $l - 2$, а для l_t при $t \geqslant 2$ – лишь значения 2 или 1. Здесь легко можно провести сравнение и найти искомый вариант набора (а также i_0).

При $k_2^1 = l - 4$ (и $m < l - k_2^1 = 4$) для l_1 возможны лишь значения $l - 2$ или $l - 3$, а для l_t при $t \geqslant 2$ либо снова 2 или 1, либо единственный вариант, когда номер 1 участвует с показателями $l_1 = l - 2$ и $l_1 - 1 = l - 3$, номер 2 – с показателями $l_2 = 3$ и $l_2 - 1 = 2$, а для l_t при $t \geqslant 3$, в случае участия t, возможно уже лишь значение 1. Это все также можно разобрать.

Если рассмотреть все эти случаи, то для $l \leqslant 5$ задачу можно будет считать решенной.

Ленинград

Поступило в редакцию
8.XII.1968

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Врублевская, Об игре одного нападающего против нескольких защитников, Лит. матем. сб., **VIII**, 3(1968), 445–459.

VIENO PUOLĖJO PRIEŠ KELETĄ GYNĖJŲ LOŠIMO SPRENDINIO SAVYBĖS

I. VRUBLEVSKAJA

(*Reziumė*)

Tai – [1] darbo tęsinys. Išvestos lošimo reikšmės ir gynybos optimalių strategijų formulės. Duota keletas savybių, kuriomis remiantis galima rasti šių formulių dydžių reikšmes. Šios reikšmės surastos, kai antros eilės svarbumo objektų yra pakankamai daug.

PROPERTIES OF SOLUTION FOR THE GAME OF ONE ATTACKER AGAINST SEVERAL DEFENDERS

I. VRUBLEVSKAJA

(Summary)

The continuation of [1]. Formulas for the value of the game and for the optimal strategies of defence are derived. There are some properties permitting to find the values of the quantities in these formulas. For sufficient number of second-amount objects these values are found explicitly.