X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК – 519.21

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Б. КАМИНСКЕНЕ

Пусть имеется набор последовательностей

$$\xi_1^{(l)},\ \xi_2^{(l)},\ \ldots,\ l=1,\ 2,$$

независимых неотрицательных случайных величин, причем величины l-той ($l=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) последовательности распределены одинаково, и их общая функция распределения $F_l(x)$. Будем считать, что ни одна из величин $\xi_1^{(l)}$, $l=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, не равна константе с вероятностью единица.

Обозначим

$$S_{l,0}=0,\quad S_{l,m}=\sum_{i=1}^{m}\xi_i^{(l)},\quad m=1,\ 2,\qquad l=1,\ 2,$$

Случайный процесс

$$N_l(t)=\max\{m: S_{l,m}<t\},\quad l=1,\ 2,$$

принято называть процессом восстановления, а $\xi_i^{(l)}$ ($i=1,\ 2,\ \ldots;\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n$)- временем восстановления.

Мы будем рассматривать последовательность

$$N_1(t),\ N_2(t),\qquad N_n(t)$$

независимых неодинаково распределенных процессов восстановления.

Асимптотическая нормальность сумм $\sum\limits_{l=1}^{n} N_l(t)$ одинаково распределенных процессов восстановления рассматривалась в работах [6], [7], [8] и [9]. В работах [9] и [10] доказана асимптотическая нормальность сумм $\sum\limits_{l=1}^{n} N_l(t)$ неодинаково распределенных процессов восстановления при условии, что для дискретных процессов восстановления существует шестой момент времени восстановления, а для непрерывных – пятый. В работе [13] доказана асимптотическая нормальность сумм $\sum\limits_{l=1}^{n} N_l(t)$ для дискретных неодинаково распределенных процессов восстановления при менее жестких ограничениях, а именно в предположении, что $\mathbf{M}\,(\xi_1^{(l)})^3<\infty$. Тот же результат для неодинаково распределенных процессов восстановления, распределение времени восстановления которого имеет абсолютно непрерывную компоненту, получен в настоящей заметке.

Обозначим

$$\mu_{l,j}=\mathbf{M}\,(\xi_1^{(l)})^j,\quad j=1,\ 2,\ 3;\quad l=1,\ 2,$$

$$\bar{\sigma}_n^2=\sum_{l=1}^{n}\frac{\mu_{l,2}-\mu_{l,1}^2}{\mu_{l,1}^3};\qquad \Lambda_l(t)=\mathbf{M}\,N_l(t);$$

$$F_{n,t}(x)=P\left\{\frac{1}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\sum_{l=1}^{n}[N_l(t)-\Lambda_l(t)]<x\right\}$$

и

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Пусть выполнены условия:

(а) $\mu=\inf\limits_{l}\mu_{l,1}>0,$

(б) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\bar{\sigma}_n^2>0,$

(в) $M=\sup\limits_{l}\mu_{l,3}<\infty$

и

(г) $\sup\limits_{l}\bar{F}_l(\infty)>0,$

где через $\bar{F}_l(x)$ обозначена абсолютно непрерывная компонента $F_l(x)$.

Теорема. *Если выполнены условия (а)—(г), то при достаточно больших n и t*

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F_{n,t}(x)-\Phi(x)|\leqslant C\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{nt}}\right),$$

где C не зависит от l, n и t.

Доказательство. Вместе с величинами $\xi_i^{(l)}$ ($i=1,\ 2,\ \ldots;\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) рассмотрим случайные величины $\tilde{\xi}_i^{(l)}$, $i=1,\ 2,\ \ldots;\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, определенные следующим образом:

$$\tilde{\xi}_i^{(l)}=\begin{cases}\xi_i^{(l)}, & \xi_i^{(l)}\leqslant c\sqrt{nt},\\ c\sqrt{nt}, & \xi_i^{(l)}>c\sqrt{nt},\end{cases}\tag{1}$$

где $c=\max\left(1;\ \frac{1}{\mu}\right)$.

Обозначим

$$\tilde{F}_l(x)=P\,\{\tilde{\xi}_1^{(l)}<x\},\qquad l=1,\ 2,$$

$$\tilde{S}_{l,m}=\sum_{i=1}^{m}\tilde{\xi}_i^{(l)},\quad m=1,\ 2,$$

$$\tilde{F}_{l,m}(x)=P\,\{\tilde{S}_{l,m}<x\};$$

$$\tilde{N}_l(t)=\max\,\{m:\tilde{S}_{l,m}<t\},\qquad l=1,\ 2,$$

$$F_{n,t}(x)=P\left\{\frac{1}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\sum_{l=1}^{n}[\tilde{N}_l(t)-\Lambda_l(t)]<x\right\}.\tag{2}$$

Нетрудно видеть, что

$$|P\{S_{l,m}<x\}-P\{\bar{S}_{l,m}<x\}|\leqslant 2\sum_{l=1}^{m}\int\limits_{x>c\sqrt{nt}} dF_l(x). \tag{3}$$

Имеем

$$\sum_{l=1}^{m}\int\limits_{x>c\sqrt{nt}} dF_l(x)\leqslant\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{c^3 nt\sqrt{nt}}\int\limits_{x>c\sqrt{nt}} x^3 dF_l(x)=0\left(\frac{1}{\sqrt{nt}}\right) \tag{4}$$

при $m\leqslant c^2 nt$ и достаточно больших n и t. С другой стороны, из условий теоремы следует, что при $m>c^2nt$ и достаточно больших n и t

$$P\{S_{l,m}<t\}=c_1\frac{1}{\sqrt{nt}},$$

$$P\{\bar{S}_{l,m}<t\}=c_2\frac{1}{\sqrt{nt}}. \tag{5}$$

Здесь и далее через c_k, $k=1, 2, \ldots$, обозначены константы, независящие от l, t и n.

Из (3)–(5) получаем, что для достаточно больших n и t

$$|P\{S_{l,m}<t\}-P\{\bar{S}_{l,m}<t\}|\leqslant c_3\frac{1}{\sqrt{nt}}. \tag{6}$$

В силу того, что

$$P\{S_{l,m}<t\}=P\{N_l(t)\geqslant m\} \tag{7}$$

и соотношения (6), получаем

$$|F_{n,t}(x)-\bar{F}_{n,t}(x)|\leqslant c_3\frac{1}{\sqrt{nt}}.$$

Поэтому достаточно доказать теорему для $\bar{F}_{n,t}(x)$.

Пусть

$$\bar{f}_{l,t}(z)=\mathbf{M}e^{iz[N_l(t)-\Lambda_l(t)]}. \tag{8}$$

Из независимости процессов $\bar{N}_l(t)$ следует, что

$$f_{n,t}(z)=\mathbf{M}\exp\left\{\frac{iz}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\sum_{l=1}^{n}[\bar{N}_l(t)-\Lambda_l(t)]\right\}=$$

$$=\prod_{l=1}^{n}\bar{f}_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\right)=\exp\left\{-iz\frac{1}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_l(t)\right\}\prod_{l=1}^{n}\bar{\varphi}_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\right), \tag{9}$$

где $\bar{\varphi}_{l,t}(z)$ — характеристическая функция $\bar{N}_l(t)$.

Далее, из (9) получаем

$$\ln f_{n,t}(z)=\sum_{l=1}^{n}\ln\bar{f}_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\right)=$$

$$=-\frac{iz}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_l(t)+\sum_{l=1}^{n}\ln\bar{\varphi}_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\right). \tag{10}$$

Но,

$$\ln \tilde f_{l,t}\left(\frac{z}{\bar\sigma_n\sqrt{t}}\right)=\mathbf{M}[\tilde N_l(t)-\Lambda_l(t)]\ \frac{iz}{\bar\sigma_n\sqrt{t}}-$$

$$-\mathbf{M}[\tilde N_l(t)-\Lambda_l(t)]^2\ \frac{z^2}{\bar\sigma_n^2 t}+[\ln f_{l,t}(z)]'''\Big|_{z=\Theta\frac{z}{\bar\sigma_n\sqrt{t}}}\cdot\frac{(iz)^3}{\bar\sigma_u^3 t\sqrt{t}},\tag{11}$$

$$0<\Theta<1.$$

Имея в виду (10), выводим, что

$$[\ln f_{l,t}(z)]'''=\frac{1}{\tilde\varphi_{l,t}^3(z)}\ [\tilde\varphi_{l,t}'''(z)\,\tilde\varphi_{l,t}^2(z)-$$

$$-3\,\tilde\varphi_{l,t}''(z)\,\tilde\varphi_{l,t}'(z)\,\tilde\varphi_{l,t}(z)+2\,\tilde\varphi_{l,t}'^2(z)].\tag{12}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими преобразованиями Лапласа и Лапласа—Стилтьеса:

$$f_l^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\bar F_l(x)\,dx,$$

$$f_l(s)=\int_0^\infty e^{-sx}d\bar F_l(x).$$

Если

$$Q_l(x)=1-\bar F_l(x),$$

то

$$q_l(s)=\int_0^\infty e^{-sx}Q_l(x)\,dx=\frac{1-f_l(s)}{s}.$$

Далее, (7) дает

$$\tilde\varphi_{l,t}(z)=\sum_{r=0}^\infty e^{izr}P\{\tilde N_l(t)=r\}=\sum_{r=0}^\infty e^{izr}[P\{\tilde S_{l,r}<t\}-P\{\tilde S_{l,r+1}<t\}]=$$

$$=1+\sum_{r=1}^\infty e^{iz(r-1)}(e^{iz}-1)P\{\tilde S_{l,r}<t\}.\tag{13}$$

Применяя к (13) преобразование Лапласа по t, получаем

$$\psi_l(s,z)=\int_0^\infty e^{-st}\tilde\varphi_{l,t}(z)\,dt=$$

$$=\frac{1}{s}+\sum_{r=1}^\infty\int_0^\infty e^{-st}e^{iz(r-1)}(e^{iz}-1)P\{\tilde S_{l,r}<t\}\,dt=$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^\infty e^{iz(r-1)}(e^{iz}-1)f_l^r(s)=$$

$$=\frac{1}{s}\cdot\frac{1-f_l(s)}{1-e^{iz}f_l(s)}=\frac{q_l(s)}{1-e^{iz}f_l(s)}.\tag{14}$$

Нетрудно видеть, что преобразованиями Лапласа по t от функций $\tilde{\varphi}'_{l,t}(z)$, $\tilde{\varphi}''_{l,t}(z)$ и $\tilde{\varphi}'''_{l,t}(z)$ являются соответственно выражения:

$$[\psi_l(s,\ z)]'_z=\frac{ie^{iz}f_l(s)\,q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^2};$$

$$[\psi_l(s,\ z)]''_z=\frac{i^2e^{iz}f_l(s)\,q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^2}+2\ \frac{i^2e^{2iz}f_l^2(s)\,q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^3}$$

$$[\psi_l(s,\ z)]'''_z=\frac{i^3e^{iz}f_l(s)\,q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^2}+6\ \frac{i^3e^{2iz}f_l^2(s)\,q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^3}+6\ \frac{i^3e^{3iz}f_l^3(s)\,q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^4}. \tag{15}$$

Пусть $s_l(z)$ является корнем уравнения

$$1-e^{iz}f_l(s)=0. \tag{16}$$

При $z=0$ уравнение (16) имеет корень $s_l(0)=0$. Так как $f'_l\big(s_l(0)\big)\neq 0$, то $s_l(0)$ является простым корнем. Согласно свойствам неявных функций (см., напр., [13] стр. 95–102), существует такое число $\Delta^{(l)}_{n,t}>0$, что уравнение (16) определяет в интервале $[-\Delta^{(l)}_{n,t},\ \Delta^{(l)}_{n,t}]$ однозначную, непрерывную и трехкратно дифференцируемую функцию $s=s_l(z)$, обращающую уравнение (16) в тождество и удовлетворяющую равенству $s_l(0)=0$. Интервал $[-\Delta^{(l)}_{n,t},\ \Delta^{(l)}_{n,t}]$ можно заменить интервалом, в котором

$$[1-e^{iz}f_l(s)]'_s\neq 0.$$

Так как $f'_l(s)\neq 0$ для всех $s\in\left\{s:\dfrac{2\sqrt{\ln nt}}{\sqrt{nt}}=\bar{\Delta}_{n,t}\right\}$, то для каждого l, $l=1,\ 2,\ \ldots,$ n, вместо интервала $[-\Delta^{(l)}_{n,t},\ \Delta^{(l)}_{n,t}]$ можно взять интервал $[-c'\bar{\Delta}_{n,t},\ c'\bar{\Delta}_{n,t}]$, где $c'=\frac{1}{2}\min(1,\ \mu)$. Тогда для $|z|\leqslant c'\bar{\Delta}_{n,t}$ справедливо разложение

$$s_l(z)=s_l(0)+s'_l(0)\,z+s''_l(0)\ \frac{z^2}{2}+s'''_l(0)\ \frac{z^3}{6}+0\,(|z|^3).$$

Для вычисления $s'_l(0)$, $s''_l(0)$ и $s'''_l(0)$ воспользуемся уравнениями

$$f_l\big(s_l(z)\big)\equiv e^{-iz},$$

$$s'_l(z)f'_l\big(s_l(z)\big)=-ie^{-iz},$$

$$s''_l(z)f'_l\big(s_l(z)\big)+s'^2_l(z)f''_l\big(s_l(z)\big)=(-i)^2e^{-iz}$$

и

$$s'''_l(z)f'_l\big(s_l(z)\big)+3\,s''_l(z)\,s'_l(z)f''_l\big(s_l(z)\big)+s'^3_l(z)f'''_l\big(s_l(z)\big)=(-i)^3e^{-iz}.$$

Отсюда при $z=0$ получаем

$$s'_l(0)=\frac{i}{m_{l,1}},$$

$$s''_l(0)=i^2\ \frac{m_{l,2}-m^2_{l,1}}{m^3_{l,1}},$$

$$s'''_l(0)=i^3\ \frac{1}{m^5_{l,1}}\ [m^4_{l,1}-m_{l,1}m_{l,3}+3\,m^2_{l,2}-3\,m_{l,2}m^2_{l,1}],$$

где

$$m_{l,k}=\int\limits_0^\infty x^k\,d\bar{F}_l(x),\qquad k=1,\ 2,\ 3.$$

Следовательно

$$s_l(z)=\frac{iz}{m_{l,1}}+\frac{m_{l,2}-m_{l,1}^2}{m_{l,1}^3}\,\frac{(iz)^2}{2}+$$

$$+\frac{1}{m_{l,1}^5}\,(m_{l,1}^4-m_{l,1}m_{l,3}+3m_{l,2}^2-3m_{l,1}^2m_{l,2})\,\frac{(iz)^3}{6}+o(|z|^3)=$$

$$=\frac{iz}{\mu_{l,1}}+\frac{\mu_{l,2}-\mu_{l,1}^2}{\mu_{l,1}^3}\,\frac{(iz)^2}{2}+\frac{1}{\mu_{l,1}^5}\,(\mu_{l,1}^4-\mu_{l,1}\mu_{l,3}+$$

$$+3\mu_{l,2}^2-3\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2)\,\frac{(iz)^3}{6}+o\left(\frac{|z|}{nt}+|z|^3\right). \tag{17}$$

Воспользуемся тем фактом, что $[\psi_l(s,\ z)]_s''$ является преобразованием Лапласа по t функции $t^2\bar{\varphi}_{l,t}(z)$. Имеем

$$[\psi_l(s,\ z)]_s''=\left[\frac{q_l(s)}{1-e^{iz}f_l(s)}\right]_s''=\frac{q_l''(s)}{1-e^{iz}f_l(s)}+2\,\frac{e^{iz}f_l'(s)\,q_l'(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^2}+$$

$$+\frac{e^{iz}f_l''(s)\,q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^2}+2\,\frac{e^{2iz}f_l'^2(s)\,q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^3}. \tag{18}$$

Далее, так как при $|z|\leqslant c'\bar{\Delta}_{n,t}$

$$1-e^{iz}f_l(s)=e^{iz}\left[f_l\left(s_l(z)\right)-f_l(s)\right]$$

и $f_l'(s_l(z))\neq 0$ для достаточно больших n и t, то

$$\frac{1}{1-e^{iz}f_l(s)}=e^{-iz}\,\frac{1}{f_l\left(s_l(z)\right)-f_l(s)}=e^{-iz}\,\frac{1}{f_l'\left(s_l(z)\right)[s_l(z)-s]}+w_l(s,\ z), \tag{19}$$

где

$$w_l(s,\ z)=e^{-iz}\,\frac{f_l(s)-f_l\left(s_l(z)\right)-f_l'\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]}{f_l'\left(s_l(z)\right)\left[f_l(s)-f_l\left(s_l(z)\right)\right][s-s_l(z)]}=$$

$$=e^{-iz}\,\frac{\dfrac{f_l(s)-f_l\left(s_l(z)\right)-f_l\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]}{[s-s_l(z)]^2}}{f_l'\left(s_l(z)\right)\,\dfrac{f_l(s)-f_l\left(s_l(z)\right)}{s-s_l(z)}}. \tag{20}$$

Покажем, что $w_l(s,z)$ является частным двух преобразований Лапласа от функций из класса L_1.

Имеем

$$f_l(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF_l(x)=f_l\left(s_l(z)\right)\int_0^\infty e^{-(s-s_l(z))\,x}\,dG_l(x,\ z), \tag{21}$$

где

$$G_l(x,\ z)=\frac{1}{f_l\left(s_l(z)\right)}\int_0^x e^{-s_l(z)\,u}\,dF_l(u).$$

Пусть

$$G_{l,1}(x,\ z)=-\frac{f_l\left(s_l(z)\right)}{f_l'\left(s_l(z)\right)}\int_0^x[1-G_l(u,\ z)]\,du.$$

Тогда

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,dG_{l,1}(x,\ z)=\frac{-f_l\left(s_l(z)\right)\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\,dG_l(x,\ z)\right]}{f_l'\left(s_l(z)\right)}$$

и отсюда

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,dG_l(x,\ z)=1+\frac{f_l'\left(s_l(z)\right)}{f_l\left(s_l(z)\right)}\,s\int_0^\infty e^{-sx}\,dG_{l,1}(x,\ z). \tag{22}$$

Если

$$G_{l,2}(x,\ z)=-\frac{2f_l'\left(s_l(z)\right)}{f_l''\left(s_l(z)\right)}\int_0^x [1-G_{l,1}(u,\ z)]\,du,$$

то, согласно (22),

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,dG_l(x,\ z)=1+\frac{f_l'\left(s_l(z)\right)}{f_l\left(s_l(z)\right)}\,s+\frac{f_l''\left(s_l(z)\right)}{2f_l\left(s_l(z)\right)}\,s^2\int_0^\infty e^{-sx}\,dG_{l,2}(x,\ z). \tag{23}$$

Из (21), (22) и (23) получаем:

$$f_l(s)=f_l\left(s_l(z)\right)\int_0^\infty e^{-\left(s-s_l(z)\right)x}\,dG_l(x,\ z)=$$

$$=f_l\left(s_l(z)\right)+f_l'\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]\int_0^\infty e^{-\left(s-s_l(z)\right)x}\,dG_{l,1}(x,\ z),$$

$$f_l(s)=f_l\left(s_l(z)\right)+f_l'\left(s_l(z)\right)\left(s-s_l(z)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}f_l''\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]^2\int_0^\infty e^{-\left(s-s_l(z)\right)x}\,dG_{l,2}(x,\ z).$$

Далее, если

$$F_{l,1}(x,\ z)=\int_0^\infty e^{s_l(z)u}\,dG_{l,1}(u,\ z)$$

и

$$F_{l,2}(x,\ z)=\int_0^x e^{s_l(z)u}\,dG_{l,2}(u,\ z),$$

а функции $f_{l,1}(s,\ z)$ и $f_{l,2}(s,\ z)$ являются преобразованиями Лапласа—Стилтьеса функций $F_{l,1}(x,\ z)$ и $F_{l,2}(x,\ z)$ соответственно, то $f_{l,1}(s,\ z)$ и $f_{l,2}(s,\ z)$ являются преобразованиями Лапласа от функций из класса L_1.

Из соотношений

$$f_l(s)=f_l\left(s_l(z)\right)+f_l'\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]\,f_{l,1}(s,\ z)$$

и

$$f_l(s)=f_l\left(s_l(z)\right)+f_l'\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]+$$

$$+\frac{1}{2}f_l''\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]^2 f_{l,2}(s,\ z)$$

вытекает, что $w_l(s,\ z)$ является частным двух преобразований Лапласа от функций из класса L_1.

Теперь покажем, что $w_l(s, z)$ при $|z| \leqslant c'\bar{\Delta}_{n,l}$ и $\operatorname{Re} s > 0$ является преобразованием Лапласа – Стилтьеса функции ограниченного изменения $W_l(t, z)$. Для этой цели введем вспомогательную функцию

$$\varphi_A(u) = \begin{cases} 1, & |u| < A, \\ 2 - \frac{|u|}{A}, & A \leqslant |u| \leqslant 2A, \\ 0, & |u| > 2A \end{cases}$$

для всех действительных u. Положим

$$w_l(-iu, z) = w_{l,1}(u, z) + w_{l,2}(u, z),$$

где

$$w_{l,1}(u, z) = \varphi_A(u)\, w_l(-iu, z)$$

и

$$w_{l,2}(u, z) = [1 - \varphi_A(u)]\, w_l(-iu, z).$$

Покажем, что при постоянном A обе функции $w_{l,1}(u, z)$ и $w_{l,2}(u, z)$ являются преобразованиями Фурье–Стилтьеса от функций ограниченного изменения.

Заметим, что

$$w_{l,1}(u, z) = e^{-iz}\varphi_A(u)\, \frac{\dfrac{f_l(-iu) - f_l\big(s_l(z)\big) - f_l'\big(s_l(z)\big)[-iu - s_l(z)]}{\big(-iu - s_l(z)\big)^2}}{\dfrac{f_l(-iu) - f_l\big(s_l(z)\big)}{-iu - s_l(z)}\, f_l'\big(s_l(z)\big)} =$$

$$= e^{-iz}\varphi_A(u)\, \frac{g_{l,1}(-iu, z)}{g_{l,2}(-iu, z)}.$$

Так как $\varphi_A(u)$ является преобразованием Фурье от функции из класса L_1, то и $\varphi_A(u)\, g_{l,1}(-iu, z)$ является преобразованием Фурье от функции из класса L_1. Значит, $w_{l,1}(s, z)$ является частным двух функций, каждая из которых является преобразованием Фурье от функции из класса. L_1. Знаменатель этой функции нигде не обращается в нуль, а числитель равен нулю вне конечного интервала. По теореме Винера ([11], стр. 207) $w_{l,1}(s, z)$, при достаточно больших n, t и $|z| \leqslant c'\bar{\Delta}_{n,t}$, является преобразованием Фурье функции из класса L_1, а, следовательно, и преобразованием Фурье–Стилтьеса некоторой функции ограниченного изменения.

Имеем, что

$$w_{l,2}(u, z) = -[1 - \varphi_A(u)]\, \frac{f_l(-iu) - f_l\big(s_l(z)\big) - f_l'\big(s_l(z)\big)[-iu - s_l(z)]}{f_l'\big(s_l(z)\big)\left\{1 - e^{iz} f_l(-iu)\big(1 - \varphi_{\frac{A}{2}}(u)\big)\right\}\big(-iu - s_l(z)\big)} =$$

$$= \frac{1 - \varphi_A(u)}{1 - e^{iz} f_l(-iu)\big(1 - \varphi_{\frac{A}{2}}(u)\big)} - \frac{g_{l,2}(-iu, z)\big[1 - \varphi_{\frac{A}{2}}(u)\big]}{f_l'\big(s_l(z)\big)\left\{1 - e^{iz} f_l(-iu)\big(1 - \varphi_{\frac{A}{2}}(u)\big)\right\}}.$$

Утверждение, что $w_{l,2}(u, z)$ является преобразованием Фурье—Стилтьеса функции ограниченного изменения будет доказано, если мы докажем это для функции

$$\{1-e^{iz}f_l(-iu)[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)]\}^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\{e^{iz}f_l(-iu)[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)]\}^k=$$

$$=\lim_{r\to 1}\sum_{k=1}^{\infty}r^k\{e^{iz}f_l(-iu)[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)]\}^k$$

при любом $0<r<1$. Но, $\{e^{iz}f_l(-iu)[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)]\}^k$ является преобразованием Фурье—Стилтьеса функции ограниченного изменения, кроме того,

$$|f_l(-iu)[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)]|<1. \tag{24}$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}r^k\{e^{iz}f_l(-iu)[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)]\}^k$$

сходится, и сумма его

$$\{1-re^{iz}f_l(-iu)[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)]\}^{-1} \tag{25}$$

является преобразованием Фурье—Стилтьеса от функции ограниченного изменения. Из (24) следует, что в (25) возможен переход к пределу при $r\to 1$, т. е.

$$\lim_{r\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}r^k\{e^{iz}f_l(-iu)[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)]\}^k=\lim_{r\to 1}\frac{1}{1-re^{iz}f_l(-iu)[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)]}=$$

$$=\frac{1}{1-e^{iz}f_l(-iu)[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)]},$$

и этот предел является преобразованием Фурье—Стилтьеса функции ограниченного изменения. Значит, $w_{l,2}(u, z)$, а тем самым и $w_l(-iu, z)$ является преобразованием Фурье—Стилтьеса функции ограниченного изменения, т. е.

$$w_l(-iu,\ z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}\,dW_l(t,\ z), \tag{26}$$

где $W_l(t, z)$ — функция ограниченного изменения.

Соотношение (26) можно переписать в таком виде:

$$\int_{-\infty}^{0}e^{iut}\,dW_l(t,\ z)=-\int_{0}^{\infty}e^{iut}\,dW_l(t,\ z)+w_l(-iu,\ z).$$

Заметим, что знаменатель $w_l(s, z)$ не обращается в нуль при $\operatorname{Re} s>0$, а $|w_l(s, z)|$ — ограничена при $\operatorname{Re} s\geqslant 0$. Функция от s

$$-\int_{0}^{\infty}e^{-st}\,dW_l(t,\ z)+w_l(s,\ z)$$

является аналитической и ограниченной в правой полуплоскости от мнимой оси (сама ось исключается), а функция

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-st}\, dW_l(t, z)$$

– аналитическая и ограниченная в левой полуплоскости без мнимой оси и непрерывная в замкнутой полуплоскости (мнимая ось включается). На мнимой оси эти функции совпадают, следовательно они являются частями одной и той же аналитической функции ([12], стр. 180). Эта функция оказывается целой и ограниченной, а поэтому является постоянной. Так как

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-st}\, dW_l(t, z) \to 0$$

при $s \to -\infty$, то эта постоянная может быть только нулем. Итак,

$$w_l(s, z) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, dW_l(t, z),$$

где $W_l(t, z)$ – функция ограниченного изменения.

Из (18) и (19) следует, что

$$\begin{aligned}
[\psi_l(s,z)]_s'' &= e^{-iz}\frac{q_l''(s)}{f_l'(s_l(z))\,[s_l(z)-s]} + 2e^{-iz}\frac{q_l'(s) f_l'(s)}{f_l'^2(s_l(z))\,[s_l(z)-s]^2} + \\
&+ e^{-iz}\frac{q_l(s) f_l''(s)}{f_l'^2(s_l(z))\,[s_l(z)-s]^2} + 2e^{-iz}\frac{q_l(s) f_l'^2(s)}{f_l'^3(s_l(z))\,[s_l(z)-s]} + \\
&+ 4e^{-iz}\frac{q_l'(s) f_l'(s)\, w_l(s, z)}{f_l'(s_l(z))\,[s_l(z)-s]} + 2e^{-iz}\frac{q_l(s) f_l''(s)\, w_l(s, z)}{f_l'(s_l(z))\,[s_l(z)-s]} + \\
&+ 6e^{-iz}\frac{q_l(s) f_l'^2(s)\, w_l(s, z)}{f_l'^2(s_l(z))\,[s_l(z)-s]^2} + 6e^{-iz}\frac{q_l(s) f_l'^2(s)\, w_l^2(s, z)}{f_l'(s_l(z))\,[s_l(z)-s]} + \\
&+ 2q_l(s) f_l'^2(s)\, w_l^3(s, z) + q_l''(s)\, w_l(s, z) + \\
&+ 2q_l'(s) f_l'(s)\, w_l^2(s, z) + q_l'(s) f_l(s) f_l''(s)\, w_l^2(s, z).
\end{aligned} \tag{27}$$

Обозначим

$$q_l'(s) f_l'(s) = r_l(s).$$

Выражение $\mu_{l,2}^{-1} q_s'(s)$ является преобразованием Лапласа плотности неотрицательной случайной величины, обладающей конечным моментом (см. [2], лемма 3). Далее, $r_l(s)$ является преобразованием Лапласа функции $\bar{r}_l(t)$. Из класса L_1, а также преобразованием Лапласа–Стилтьеса от функции ограниченного изменения, обладающей конечным первым моментом. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
\frac{q_l'(s) f_l'(s)}{f_l'^2(s_l(z))\,[s-s_l(z)]^2} &= \frac{q_l'(s_l(z))}{f_l'(s_l(z))\,[s-s_l(z)]^2} + \\
&+ \frac{q_l''(s_l(z)) f_l'(s_l(z)) + q_l'(s_l(z)) f_l''(s_l(z))}{f_l'^2(s_l(z))\,[s-s_l(z)]} + \\
&+ \frac{r_l(s) - r_l(s_l(z)) - r_l'(s_l(z))\,[s-s_l(z)]}{f_l'^2(s_l(z))\,[s-s_l(z)]^2}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Последний член в правой части соотношения (38) является преобразованием Лапласа функции

$$\frac{1}{f_l'^2\left(s_l(z)\right)}\left[te^{s_l(z)\,t} * \bar{r}_l(t)-r_l\left(s_l(z)\right)te^{s_l(z)\,t}-\right.$$

$$\left.-r_l'\left(s_l(z)\right)e^{s_l(z)\,t}\right]=\frac{1}{f_l'^2\left(s_l(z)\right)}\left[\int\limits_0^t e^{s_l(z)(t-y)}(t-y)\,\bar{r}_l(y)\,dy-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{c\sqrt{nt}} te^{s_l(z)(t-y)}\,\bar{r}_l(y)\,dy+\int\limits_0^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)}\,y\bar{r}_l(y)\,dy\right]=$$

$$=-\frac{1}{f_l'^2\left(s_l(z)\right)}\int\limits_t^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)}(t-y)\,\bar{r}_l(y)\,dy=o(1). \qquad (29)$$

Далее,

$$-\frac{q_l''(s)}{s-s_l(z)}=-\frac{q_l''\left(s_l(z)\right)}{s-s_l(z)}-\frac{q_l''(s)-q_l''\left(s_l(z)\right)}{s-s_l(z)}.$$

Второй член правой части последнего равенства является преобразованием Лапласа функции

$$-e^{s_l(z)\,t} * t^2\bar{q}_l(t)-q_l''\left(s_l(z)\right)e^{s_l(z)\,t}=$$

$$=-\int\limits_0^t e^{s_l(z)(t-y)}\,y^2\,\bar{q}_l(y)\,dy+\int\limits_0^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)}\,y^2\,\bar{q}_l(y)\,dy=$$

$$=\int\limits_t^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)}\,y^2\,\bar{q}_l(y)\,dy=o(1). \qquad (30)$$

(Преобразованием Лапласа от функции $\bar{q}_l(t)$ является $q_l(s)$. Функции с чертой будут иметь аналогичный смысл и в дальнейшем.)

Если $q_l(s)f_l''(s)=k_l(s)$, то

$$\frac{q_l(s)f_l''(s)}{[s_l(z)-s]^2}=\frac{q_l\left(s_l(z)\right)f_l''\left(s_l(z)\right)}{[s_l(z)-s]^2}+\frac{q_l'\left(s_l(z)\right)f_l''\left(s_l(z)\right)+q_l\left(s_l(z)\right)f_l'''\left(s_l(z)\right)}{s-s_l(z)}+$$

$$+\frac{k_l(s)-k_l\left(s_l(z)\right)-k_l'\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]}{[s-s_l(z)]^2}. \qquad (31)$$

Последний член правой части (31) является преобразованием Лапласа функции

$$te^{s_l(z)} * k_l(t)-k_l\left(s_l(z)\right)te^{s_l(z)\,t}-k_l'\left(s_l(z)\right)e^{s_l(z)\,t}=$$

$$=\int\limits_0^t e^{s_l(z)(t-y)}(t-y)\,\bar{k}_l(y)\,dy-\int\limits_0^{c\sqrt{nt}} te^{s_l(z)(t-y)}\,\bar{k}_l(y)\,dy+$$

$$+\int\limits_0^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)}\,y\bar{k}_l(y)\,dy=\int\limits_0^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)}(t-y)\,\bar{k}_l(y)\,dy=o(1). \qquad (32)$$

Далее, если $q_l(s)f_l'^2(s)=h_l(s)$, то

$$\frac{q_l(s)f_l'^2(s)}{[s_l(z)-s]^3}=\frac{q_l(s_l(z))f_l'^2(s_l(z))}{[s_l(z)-s]^3}-$$

$$-\frac{q_l'(s_l(z))f_l'^2(s_l(z))+2q_l(s_l(z))f_l'(s_l(z))f_l''(s_l(z))}{[s_l(z)-s]^2}+$$

$$+\frac{1}{s-s_l(z)}\Big[q_l''\left(s_l(z)\right)f_l'^2\left(s_l(z)\right)+4q_l'\left(s_l(z)\right)f_l'\left(s_l(z)\right)f_l''\left(s_l(z)\right)+$$

$$+2q_l\left(s_l(z)\right)f_l''^2\left(s_l(z)\right)+2q_l\left(s_l(z)\right)f_l'\left(s_l(z)\right)f_l'''\left(s_l(z)\right)\Big]+$$

$$+\frac{h_l(s)-h_l(s_l(z))-h_l'(s_l(z))[s-s_l(z)]-h_l''(s_l(z))[s-s_l(z)]}{[s-s_l(z)]^3};\qquad(33)$$

последний член является преобразованием Лапласа функции

$$t^2e^{s_l(z)t}*\bar h_l(t)-t^2e^{s_l(z)t}h_l\left(s_l(z)\right)-$$

$$-te^{s_l(z)t}h_l'\left(s_l(z)\right)-e^{s_l(z)t}h_l''\left(s_l(z)\right)=o(1).\qquad(34)$$

Заметим, что, если $t\geqslant c\sqrt{nt}$, то выражения (29), (30), (32) и (34) равны нулю.

Обозначим $v_l(s,z)=q_l'(s)f_l'(s)w_l(s,z)$. Имеем, что $v_l(s,z)$ является преобразованием Лапласа от функции $\bar v_l(t,z)$ из класса L_1

$$\frac{q_l'(s_l(z))f_l'(s)w_l(s,z)}{f_l'(s_l(z))[s_l(z)-s]}=-\frac{1}{2}\frac{q_l'(s_l(z))f_l''(s_l(z))}{f_l'^2(s_l(z))[s_l(z)-s]}-$$

$$-\frac{v_l(s,z)-v_l(s_l(z),z)}{[s-s_l(z)]f_l'(s_l(z))}.\qquad(35)$$

Таким образом, последний член (35) является преобразованием Лапласа функции ограниченного изменения. Аналогичный результат дают и последние три слагаемые равенства (27).

Так как

$$q_l''(s)=-\frac{f_l''(s)}{s}-2\frac{q_l'(s)}{s},$$

$$2q_l(s)f_l'^2(s)w_l^3(s,z)+q_l''(s)w_l(s,z)+2q_l'(s)f_l'(s)w_l^2(s,z)+$$

$$q_l'(s)f_l''(s)f_l(s)w_l^2(s,z)=\frac{\Omega_l(s)}{s},$$

где $\Omega_l(s)$ является преобразованием Лапласа—Стилтьеса функции ограниченного изменения $\omega_l(t)$. Поскольку $\Omega_l(s)\to0$ при $s\to0$, то $\omega_l(t)\to0$ при $t\to\infty$.

Теперь из соотношений (27)—(35) следует, что $[\psi_l(s,z)]_s''$ является преобразованием Лапласа от функции

$$-e^{-iz}e^{s_l(z)t}t^2\frac{q_l(s_l(z))}{f_l'(s_l(z))}+\lambda_l(t,z),$$

где $\lambda_l(t,z)$ — функция ограниченного изменения, стремящаяся к нулю при $t\to\infty$.

Итак, для $|z| \leqslant c'\bar{\Delta}_{n,t}$ и достаточно больших n и t имеем

$$\varphi_{l,t}(z) = -e^{-iz} e^{s_l(z)t} \frac{q_l(s_l(z))}{f'_l(s_l(z))} + o\left(\frac{1}{t^2}\right). \tag{36}$$

Приступим к отысканию функций $\varphi'_{l,t}(z)$, $\varphi''_{l,t}(z)$ и $\varphi'''_{l,t}(z)$. Из (13) имеем:

$$[\psi_l(s, z)]'_z = -i\frac{q_l(s)}{1-e^{iz}f_l(s)} + i\frac{q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^2},$$

$$[\psi_l(s, z)]''_z = 2i^2\frac{q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^3} - 3i^2\frac{q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^2} + i^2\frac{q_l(s)}{1-e^{iz}f_l(s)}$$

$$[\psi_l(s, z)]'''_z = 6i^3\frac{q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^4} - 12i^3\frac{q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^3} +$$

$$+7i^3\frac{q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^2} - i^3\frac{q_l(s)}{1-e^{iz}f_l(s)}. \tag{37}$$

В силу (19) получаем

$$\frac{q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^2} = e^{-2iz}\frac{q_l(s)}{f_l'^2(s_l(z))[s-s_l(z)]^2} -$$

$$-2e^{-iz}\frac{q_l(s)w_l(s, z)}{f'_l(s_l(z))[s-s_l(z)]} + q_l(s)w_l(s, z),$$

$$\frac{q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^3} = -e^{-3iz}\frac{q_l(s)}{f_l'^3(s_l(z))[s-s_l(z)]^3} +$$

$$+3e^{-2iz}\frac{q_l(s)w_l(s, z)}{f_l'^2(s_l(z))[s-s_l(z)]^2} - 3e^{-iz}\frac{q_l(s)w_l^2(s, z)}{f'_l(s_l(z))[s-s_l(z)]} + q_l(s)w_l^3(s, z)$$

и

$$\frac{q_l(s)}{[1-e^{iz}f_l(s)]^4} = e^{-4iz}\frac{q_l(s)}{f_l'^4(s_l(z))[s-s_l(z)]^4} -$$

$$-4e^{-3iz}\frac{q_l(s)w_l(s, z)}{f_l'^3(s_l(z))[s-s_l(z)]^3} + 16e^{-2iz}\frac{q_l(s)w_l^2(s, z)}{f_l'^2(s_l(z))[s-s_l(z)]^2} -$$

$$-4\frac{q_l(s)w_l^3(s, z)}{f'_l(s_l(z))[s-s_l(z)]} + q_l(s)w_l^4(s, z). \tag{38}$$

Имеем

$$\frac{q_l(s)}{[s-s_l(z)]^4} = \frac{q_l(s_l(z))}{[s-s_l(z)]^4} + \frac{q'_l(s_l(z))}{[s-s_l(z)]^3} + \frac{q''_l(s)}{2[s-s_l(z)]^2} +$$

$$+\frac{q_l(s)-q_l(s_l(z))-q'_l(s_l(z))[s-s_l(z)]-\frac{1}{2}q''_l(s_l(z))[s-s_l(z)]^2}{[s-s_l(z)]^4}, \tag{39}$$

где последний член является преобразованием Лапласа функции

$$\frac{1}{6}\, t^3 e^{s_l(z)t} * \bar{q}_l(t) - \frac{1}{6}\, t^3 e^{s_l(z)t} q_l\left(s_l(z)\right) - \frac{1}{2}\, t^2 e^{s_l(z)t} q_l'\left(s_l(z)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\, t e^{s_l(z)t} q_l''\left(s_l(z)\right) = \frac{1}{6} \int_0^t (t-y)^3 e^{s_l(z)(t-y)} \bar{q}_l(y)\, dy -$$

$$-\frac{1}{6}\, t^3 \int_0^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)} \bar{q}_l(y)\, dy + \frac{1}{2}\, t^2 \int_0^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)} y\, \bar{q}_l(y)\, dy -$$

$$-\frac{1}{2}\, t \int_0^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)} y^2 \bar{q}_l(y)\, dy =$$

$$= -\frac{1}{6} \int_t^{c\sqrt{nt}} t^3 e^{s_l(z)(t-y)} \bar{q}_l(y)\, dy + \frac{1}{2} \int_t^{c\sqrt{nt}} t^2 e^{s_l(z)(t-y)} y\, \bar{q}_l(y)\, dy -$$

$$-\frac{1}{2} \int_t^{c\sqrt{nt}} t e^{s_l(z)(t-y)} y^2 \bar{q}_l(y)\, dy - \frac{1}{6} \int_0^t e^{s_l(z)(t-y)} y^3 \bar{q}_l(y)\, dy = c_5 t. \tag{40}$$

Далее,

$$\frac{q_l(s)}{[s-s_l(z)]^3} = \frac{q_l\left(s_l(z)\right)}{[s-s_l(z)]^3} + \frac{q_l'\left(s_l(z)\right)}{[s-s_l(z)]^2} + \frac{q_l''\left(s_l(z)\right)}{2\,[s-s_l(z)]} +$$

$$+ \frac{q_l(s) - q_l\left(s_l(z)\right) - q_l'\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)] - \frac{1}{2}\, q_l''\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]^2}{[s-s_l(z)]^3}$$

и

$$\frac{q_l(s)}{[s-s_l(z)]^2} = \frac{q_l\left(s_l(z)\right)}{[s-s_l(z)]^2} + \frac{q_l'\left(s_l(z)\right)}{s-s_l(z)} +$$

$$+ \frac{q_l(s) - q_l\left(s_l(z)\right) - q_l'\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]}{[s-s_l(z)]^2}. \tag{41}$$

Последние члены равенств (41) являются преобразованиями Лапласа от функций соответственно

$$\frac{1}{2}\, t^2 e^{s_l(z)t} * \bar{q}_l(t) - \frac{1}{2}\, t^2 e^{s_l(z)t} q_l\left(s_l(z)\right) -$$

$$- t e^{s_l(z)t} q_l'\left(s_l(z)\right) - \frac{1}{2}\, e^{s_l(z)t} q_l''\left(s_l(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t e^{s_l(z)(t-y)} (t-y)^2 \bar{q}_l(y)\, dy - \frac{1}{2} t^2 \int_0^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)} \bar{q}_l(y)\, dy +$$

$$+ t \int_0^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)} y\, \bar{q}_l(y)\, dy - \frac{1}{2} \int_0^{c\sqrt{nt}} e^{s_l(z)(t-y)} y^2 \bar{q}_l(y)\, dy = o(1) \tag{42}$$

и

$$te^{s_l(z)t} * \bar{q}_l(t) - te^{s_l(z)t} q_l\left(s_l(z)\right) - e^{s_l(z)t} q_l'\left(s_l(z)\right) =$$

$$= \int_0^t e^{s_l(z)(t-y)}(t-y)\,\bar{q}_l(y)\,dy - te^{s_l(z)t}\int_0^{cV\overline{nt}} e^{-s_l(z)y}\bar{q}_l(y)\,dy +$$

$$+ e^{s_l(z)t}\int_0^{cV\overline{nt}} e^{-s_l(z)y}\,y\,\bar{q}_l(y)\,dy = o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Аналогично получаем, что функции

$$\frac{q_l(s)\,w_l(s,\ z)}{f_l'\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]},\quad \frac{q_l(s)\,w_l(s,\ z)}{f_l'^2\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]^2},$$

$$\frac{q_l(s)\,w_l(s,\ z)}{f_l'^3\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]^3},\quad \frac{q_l(s)\,w_l^2(s,\ z)}{f_l'\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]},$$

$$\frac{q_l(s)\,w_l^2(s,\ z)}{f_l'^2\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]^2},\quad \frac{q_l(s)\,w_l^3(s,\ z)}{f_l'\left(s_l(z)\right)[s-s_l(z)]}$$

являются преобразованиями Лапласа от функций

$$\frac{1}{2}\,\frac{q_l\left(s_l(z)\right)f_l''\left(s_l(z)\right)}{f_l'^3\left(s_l(z)\right)}\,e^{s_l(z)t} + o\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\frac{1}{2}\,t\,\frac{q_l\left(s_l(z)\right)f_l''\left(s_l(z)\right)}{f_l'^4\left(s_l(z)\right)}\,e^{s_l(z)t} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{6}\,q_l''\left(s_l(z)\right)f_l'''\left(s_l(z)\right) + \frac{1}{2}\,q_l'\left(s_l(z)\right)f_l''\left(s_l(z)\right)}{f_l'^5\left(s_l(z)\right)}\,e^{s_l(z)t} + o(1),$$

$$\frac{1}{4}\,t^2\,\frac{q_l\left(s_l(z)\right)f_l''\left(s_l(z)\right)}{f_l'^5\left(s_l(z)\right)}\,e^{s_l(z)t} +$$

$$+ t\,\frac{\frac{1}{6}\,q_l\left(s_l(z)\right)f_l'''\left(s_l(z)\right) + \frac{1}{2}\,q_l'\left(s_l(z)\right)f_l''\left(s_l(z)\right)}{f_l'^6\left(s_l(z)\right)}\,e^{s_l(z)t} + o(t),$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{q_l\left(s_l(z)\right)f_l''^2\left(s_l(z)\right)}{f_l'^3\left(s_l(z)\right)}\,e^{s_l(z)t} + o\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\frac{1}{2}\,t\,\frac{q_l\left(s_l(z)\right)f_l''^2\left(s_l(z)\right)}{f_l'^5\left(s_l(z)\right)}\,e^{s_l(z)t} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{3}\,q_l\left(s_l(z)\right)f_l'''\left(s_l(z)\right) + f_l''\left(s_l(z)\right)q_l'\left(s_l(z)\right)}{f_l'^7\left(s_l(z)\right)}\,e^{s_l(z)t} + o(1),$$

$$\frac{q_l(s)\,f_l''^3\left(s_l(z)\right)}{f_l'^7\left(s_l(z)\right)}\,e^{s_l(z)t} + o\left(\frac{1}{t}\right). \tag{43}$$

Функции $q_l(s)\,w_l^2(s,z)$, $q_l(s)\,w_l^3(s,z)$ и $q_l(s)\,w_l^4(s,z)$ являются преобразованиями Лапласа от функций ограниченного изменения, которые стремятся к нулю при $t\to\infty$.

Из соотношений (37)–(43) получаем, что для $|z|\leqslant -c\sqrt{nt}$ и достаточно больших n и t

$$\tilde{\varphi}'_{l,t}(z)=ie^{-2iz}\frac{q_l(s_l(z))}{f_l'^2(s_l(z))}\,te^{s_l(z)t}+\Big[ie^{-iz}\frac{q_l(s_l(z))}{f_l'(s_l(z))}+$$
$$+ie^{-2iz}\frac{q_l'(s_l(z))}{f_l'^2(s_l(z))}-ie^{-iz}\frac{q_l(s_l(z))f_l''(s_l(z))}{f_l'^3(s_l(z))}\Big]e^{s_l(z)t}+o\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\tilde{\varphi}''_{l,t}(z)=i^2e^{s_l(z)t}\Big[-e^{-3iz}\frac{q_l(s_l(z))}{f_l'^3(s_l(z))}t^2+$$
$$+\left(-2e^{-3iz}\frac{q_l'(s_l(z))}{f_l'^3(s_l(z))}+3e^{-2iz}\frac{q_l(s_l(z))f_l''(s_l(z))}{f_l'^4(s_l(z))}-3e^{-2iz}\frac{q_l(s_l(z))}{f_l'^2(s_l(z))}\right)t+$$
$$+\Bigg(-e^{-3iz}\frac{q_l''(s_l(z))}{f_l'^3(s_l(z))}+6e^{-2iz}\frac{\frac{1}{6}q_l(s_l(z))f_l'''(s_l(z))+\frac{1}{2}q_l'(s_l(z))f_l''(s_l(z))}{f_l'^5(s_l(z))}-$$
$$-\frac{3}{2}e^{-iz}\frac{q_l(s_l(z))f_l''^2(s_l(z))}{f_l'^5(s_l(z))}-3e^{-2iz}\frac{q_l'(s_l(z))}{f_l'^2(s_l(z))}+$$
$$+3e^{-iz}\frac{q_l(s_l(z))f_l''(s_l(z))}{f_l'^3(s_l(z))}+e^{-iz}\frac{q_l(s_l(z))}{f_l'(s_l(z))}\Bigg)\Big]+o(1)$$

$$\tilde{\varphi}'''_{l,t}(z)=i^3e^{s_l(z)t}\Big[e^{-4iz}\frac{q_l(s_l(z))}{f_l'^4(s_l(z))}t^3+\Big(3e^{-4iz}\frac{q_l'(s_l(z))}{f_l'^4(s_l(z))}-$$
$$-6e^{-3iz}\frac{q_l(s_l(z))f_l''(s_l(z))}{f_l'^5(s_l(z))}+6e^{-3iz}\frac{q_l(s_l(z))}{f_l'^3(s_l(z))}\Big)t^2+$$
$$+\Bigg(3e^{-4iz}\frac{q_l''(s_l(z))}{f_l'^4(s_l(z))}-24e^{-3iz}\frac{\frac{1}{6}q_l(s_l(z))f_l'''(s_l(z))+\frac{1}{2}f_l''(s_l(z))\,q_l'(s_l(z))}{f_l'^6(s_l(z))}+$$
$$+24e^{-2iz}\frac{q_l(s_l(z))f_l''^2(s_l(z))}{f_l'^6(s_l(z))}+12e^{-3iz}\frac{q_l'(s_l(z))}{f_l'^3(s_l(z))}-$$
$$-18e^{-2iz}\frac{q_l(s_l(z))f_l''(s_l(z))}{f_l'^4(s_l(z))}+7e^{-2iz}\frac{q_l(s_l(z))}{f_l'^2(s_l(z))}\Bigg)t\Big]+o(t). \tag{44}$$

В условиях нашей теоремы

$$\Lambda_l(t)=\frac{1}{\mu_{l,1}}\,t+\frac{\mu_{l,2}-2\mu_{l,1}^2}{2\mu_{l,1}^2}+o\left(\frac{1}{t}\right),$$
$$\mathbf{M}\left(\tilde{N}_l(t)-\Lambda_l(t)\right)=\frac{1}{m_{l,1}}\,t-\frac{1}{\mu_{l,1}}\,t+\frac{m_{l,2}}{2m_{l,1}}-\frac{\mu_{l,2}}{2\mu_{l,1}}+$$
$$+o\left(\frac{1}{t}\right)=o\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{t}\right) \tag{45}$$

при $n\leqslant c^2t$.

Когда $n > c^2 t$

$$\mathbf{M}\left(\tilde{N}_l(t) - \Lambda_l(t)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} [P\{\tilde{S}_{l,k} < t\} - P\{S_{l,k} < t\}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{F}_{l,k}(t) - F_{l,k}(t)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t \tilde{F}_{l,1}(t-y)\, d\tilde{F}_{l,k-1}(y) - \int_0^t F_{l,1}(t-y)\, dF_{l,k-1}(y) = 0. \right. \tag{46}$$

Далее,

$$\mathbf{M}\left(N_l(t) - \Lambda_l(t)\right)^2 = \frac{\mu_{l,2} - \mu_{l,1}^2}{\mu_{l,1}^3}\, t +$$

$$+ \frac{15\mu_{l,2}^2 - 8\mu_{l,3}\mu_{l,1} - 6\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2}{12\mu_{l,1}^4} + o(1), \tag{47}$$

$$q_l\left(s_l(z)\right) = \mu_{l,1} + o\left(\frac{1}{nt}\right) + O\left(|z|\right),$$

$$f_l'\left(s_l(z)\right) = -\mu_{l,1} + o\left(\frac{1}{nt}\right) + O\left(|z|\right),$$

$$q_l'\left(s_l(z)\right) = -\frac{1}{2}\mu_{l,2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{nt}}\right) + O\left(|z|\right), \tag{48}$$

$$q_l''\left(s_l(z)\right) = \frac{1}{6}\mu_{l,3} + o(1) + O\left(|z|\right),$$

$$f_l''\left(s_l(z)\right) = \mu_{l,2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{nt}}\right) + O\left(|z|\right)$$

$$f_l'''\left(s_l(z)\right) = -\mu_{l,3} + o(1) + O\left(|z|\right).$$

При $|z| \leqslant \frac{Z}{c\sqrt{nt}}$, где Z — любое конечное число, и достаточно больших n и t из соотношений (12), (44) и (48) имеем

$$\left(\ln \tilde{f}_{l,t}(z)\right)''' = \left(3e^{-2iz} \frac{q_l''\left(s_l(z)\right)}{f_l'^2\left(s_l(z)\right) q_l\left(s_l(z)\right)} - \right.$$

$$- \frac{3}{2} e^{-2iz} \frac{f_l'''\left(s_l(z)\right)}{f_l'^4\left(s_l(z)\right)} - \frac{9}{2} e^{-2iz} \frac{f_l''\left(s_l(z)\right) q_l'\left(s_l(z)\right)}{f_l'^4\left(s_l(z)\right) q_l\left(s_l(z)\right)} +$$

$$+ \frac{23}{2} e^{-iz} \frac{f_l''^2\left(s_l(z)\right)}{f_l'^5\left(s_l(z)\right)} - 3e^{-iz} \frac{f_l''\left(s_l(z)\right)}{f_l'^3\left(s_l(z)\right)} -$$

$$\left. - e^{-iz} \frac{1}{f_l'\left(s_l(z)\right)} \right) t + o(t) + O\left(t(z)\right) =$$

$$= \left(\frac{3\mu_{l,2}^2}{\mu_{l,1}^5} - \frac{\mu_{l,3}}{\mu_{l,1}^4} - \frac{3\mu_{l,2}}{\mu_{l,1}^3} + \frac{1}{\mu_{l,1}} \right) t + o(t) + O\left(t|z|\right). \tag{49}$$

Из (11), (12) и (45)–(49) получаем

$$\ln \tilde{f}_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n \sqrt{t}}\right) = -\frac{\mu_{l,2}-\mu_{l,1}^2}{\mu_{l,1}^3}\frac{z^2}{2\bar{\sigma}_n^2}+$$

$$+\frac{15\mu_{l,2}^2-8\mu_{l,3}\mu_{l,1}-6\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2}{12\mu_{l,1}^4}\frac{z^2}{2\bar{\sigma}_n^2 t}+$$

$$+\left(3\frac{\mu_{l,2}^2}{\mu_{l,1}^5}-\frac{\mu_{l,3}}{\mu_{l,1}^4}-\frac{3\mu_{l,2}}{\mu_{l,1}^3}-\frac{1}{\mu_{l,1}}\right)\frac{\Theta z^3}{6\bar{\sigma}_n^3\sqrt{t}}+$$

$$+o\left(\frac{|z|}{\bar{\sigma}_n n\sqrt{t}}+\frac{|z|^3}{\bar{\sigma}_n^3\sqrt{t}}+\frac{z^2}{\bar{\sigma}_n^2 t}\right)$$

и

$$\ln f_{n,t}(z)=\sum_{l=1}^{n}\ln\tilde{f}_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\right)=-\frac{z^2}{2}+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{15\mu_{l,2}^2-8\mu_{l,3}\mu_{l,1}-6\mu_{l,2}\mu_{l,1}^2}{12\mu_{l,1}^4}\frac{z^2}{2\sigma_n^2 t}-$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{3\mu_{l,2}^2}{\mu_{l,1}^5}-\frac{\mu_{l,3}}{\mu_{l,1}^4}-\frac{3\mu_{l,2}}{\mu_{l,1}^3}+\frac{1}{\mu_{l,1}}\right)\frac{\Theta z^3}{6\bar{\sigma}_n^3\sqrt{t}}+$$

$$+o\left(\frac{|z|}{\sigma_n\sqrt{t}}+\frac{z^2}{t}+\frac{|z|^3}{\sqrt{nt}}\right)\leqslant-\frac{z^2}{2}+c_6\frac{z^2}{t}+c_7\frac{z^3}{\sqrt{nt}}+c_8\frac{z}{\sqrt{nt}}.$$

Значит,

$$f_{n,t}(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}\leqslant e^{-\frac{z^2}{2}}\left(c_6\frac{z^2}{t}+c_7\frac{z^3}{\sqrt{nt}}+c_8\frac{z}{\sqrt{nt}}\right). \tag{50}$$

По лемме Эссеена ([5], стр. 211) имеем

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|\tilde{F}_{n,t}(x)-\Phi(x)|\leqslant c_9\delta+c_{10}\frac{1}{T}, \tag{51}$$

где

$$\delta=\int_{-T}^{T}\frac{|f_{n,t}(z)-\varphi(z)|}{z}\,dz.$$

Здесь $\varphi(z)$ – характеристическая функция нормального распределения. Величина T будет выбрана позднее.

Оценим δ:

$$\delta=\int_{-T}^{T}\frac{|f_{n,t}(z)-\varphi(z)|}{z}\,dz=I_1+I_2,$$

$$I_1=\int_{-Z}^{Z}\frac{|f_{n,t}(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}}{z}\,dz,$$

$$I_2=\int_{Z\leqslant|z|\leqslant T}\frac{|f_{n,t}(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}|}{z}\,dz.$$

Из (50) имеем, что

$$I_1=\int_{-Z}^{Z}\frac{|f_{n,t}(z)-e^{-\frac{z^2}{2}}|}{z}\,dz=c_{11}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{nt}}\right).$$

Оценим I_2 при $T=\pi\bar{\sigma}_n\sqrt{t}$.

Вспомнив выражение

$$f_{n,t}(z)=e^{-iz\frac{1}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\sum_{l=1}^{n}\Lambda_l(t)}\prod_{l=1}^{n}\bar{\varphi}_{l,t}\left(\frac{z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\right),$$

замечаем, что нам достаточно оценить

$$I_2'=\int_{\frac{Z}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}}^{\pi}\frac{\prod_{l=1}^{n}\bar{\varphi}_{l,t}(z)}{z}\,dz.$$

Вернемся к выражению

$$\psi_l(s,\ z)\ =\frac{1-f_l(s)}{s\left(1-e^{iz}f_l(s)\right)}$$

и покажем, что оно является преобразованием Лапласа от функции ограниченного изменения.

Имеем:

$$\frac{1-f_l(s)}{1-e^{iz}f_l(s)}=\frac{\frac{1-f_l\ s)}{s}\cdot\frac{s}{(1+s)^2}}{\frac{1-e^{iz}}{(1+s)^2}+e^{-iz}\ \frac{1-f_l(s)}{s}\cdot\frac{s}{(1+s)^2}},$$

где $\frac{s}{(1+s)^2}$ – преобразование Лапласа от функции $(1-t)e^{-t}$, $\frac{1}{(1+s)^2}$ – преобразование Лапласа от функции te^{-t}.

Далее,

$$\frac{1-f_l(-iu)}{1-e^{iz}f_l(-iu)}=\frac{\frac{1-f_l(-iu)}{-iu}\ \frac{-iu}{(1-iu)^2}\ \varphi_A(u)}{\left\{(1-e^{iz})\frac{1}{(1-iu)^2}+e^{iz}\ \frac{1-f_l(-iu)}{-iu}\ \frac{-iu}{(1-iu)^2}\right\}\varphi_{2A}(u)}+$$

$$+\left(1-\varphi_A(u)\right)\ \frac{1-f_l(-iu)}{1-e^{iz}f_l(-iu)[1-\varphi_{\frac{A}{2}}(u)]}=b_{l,1}(-iu,\ z)+b_{l,2}(-iu,\ z),$$

где $b_{l,1}(-iu, z)$ и $b_{l,2}(-iu, z)$ обозначены первое и второе слагаемые, соответственно. Выше упоминалось, что $b_{l,2}(-iu, z)$ является преобразованием Фурье–Стилтьеса функции ограниченного изменения. Величина $b_{l,1}(-iu, z)$ является частным двух функций из класса L_1 и обращается в нуль лишь в тех случаях, когда функция в числителе превращается в нуль. По теории Винера (см. [11]) следует, что $b_{l,1}(-iu, z)$ является преобразованием Фурье–Стилтьеса от функции из класса L_1, L тем самым и преобразованием Фурье–Стилтьеса от функции ограниченного изменения. Аналогично тому, как это делалось для $w_l(s, z)$, получаем, что при $\mathrm{Re}\,s>0$ и для каждого l, $l=1, 2,\dots,n$,

$$\frac{1-f_l(s)}{1-e^{-iz}f_l(s)}=\int_0^{\infty}e^{-st}\,d\gamma_l(t,\ z),$$

где $\gamma_l(t, z)$ – функция ограниченного изменения, которая стремится к нулю при $t\to\infty$. Итак,

$$\psi_l(s,\ z)=\int_0^{\infty}e^{-st}\gamma_l(t,\ z)\,dt.$$

Поскольку $\psi_l''(s, z)$ является преобразованием Лапласа от функции $t^2\gamma_l(t, z)$, применим к $\psi_l''(s, z)$ следующую теорему ([15] стр. 38).

Условие

$$\sup_{\sigma>\rho} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\sigma+i\tau)\; d\tau < \infty$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \rho$ функция $f^*(p)$ была преобразованием Лапласа от функции $f(t)$, для которой

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 e^{-2\rho t}\, dt < \infty.$$

Когда $|z| \in \left[\frac{Z}{\sigma_n \sqrt{t}}, \pi\right]$ и фиксировано, аналитическая на полуплоскости $\operatorname{Re} s>0$ функция $\psi_l''(s, z)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\sigma>0} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_l''(\sigma+i\tau, z)|^2 d\tau < \infty.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} |t^2\gamma_l(t, z)|^2 dt < \infty.$$

Так как $\gamma_l(t, z)$ является функцией ограниченного изменения, то для достаточно больших t при $|z| \in \left[\frac{Z}{\sigma_n \sqrt{t}}, \pi\right]$ получаем, что

$$\gamma_l(t, z) = c_{12}\,\frac{1}{t^2}.$$

Значит,

$$I_2' = c_{13}\,\frac{1}{\sqrt{nt}}$$

Окончательно получаем

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F_{n,t}(x) - \varphi(x)| \leqslant C\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{nt}}\right),$$

где C — максимальная из констант c_{11} и c_{13}. Теорема доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю А. Алешкявичене за постановку задачи и ценные указания при выполнении этой работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
23.IX.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Feller, Fluctuation theory of Recurrent Events. Trans. Amer. Math. Soc., 67, 98–119.
2. W. L. Smith, Asymptotic Renewal Theorems, Proc. Roy. Soc. Edinb., A, 64, 9–48.
3. W. L. Smith, Renewal theory and its ramifications, J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, 20, 2, 243–302.
4. W. L. Smith, On the comulants of renewal processes, Biometrica, 46, 1–2, 1–29.
5. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.–Л., 1949.

6. Б. Григелионис, О центральной предельной теореме для сумм процессов восстановления, Лит. матем. сб., **IV**, 2(1964), 197–201.
7. А. Алешкявичене, Центральная предельная теорема для сумм дискретных процессов восстановления, Лит. матем. сб., **VII**, 3(1967), 373–387.
8. А. Алешкявичене, Центральная предельная теорема для сумм процессов восстановления, Лит. матем. сб., **VIII**, 4(1968), 617–631.
9. В. Лютикас, О центральной предельной теореме для сумм дискретных процессов восстановления, Лит. матем. сб., **VI**, 3(1966), 381–392.
10. В. Лютикас, Центральная предельная теорема для сумм процессов восстановления, Кандидатская диссертация, Вильнюс, 1967.
11. Н. Винер, Интеграл Фурье и некоторые его приложения, Москва, 1963.
12. Е. Титчмарш, Теория функций, М.–Л., 1951.
13. И. Г. Араманович, Р. С. Гутер и др., Математический анализ, дифференцирование и интегрирование, Москва, 1961.
14. Б. Каминскене, Центральная предельная теорема для дискретных процессов восстановления, Лит. матем., сб. **IX**, 3(1969), 497–514.
15. В. А. Диткин и А. П. Прудников, Интегральное преобразования и операционное исчисление, Москва, 1961.

CENTRINĖ RIBINĖ TEOREMA ATSTATYMO PROCESŲ SUMOMS

B. KAMINSKIENĖ

(*Reziumė*)

Sakykime, turime aibę neneigiamų nepriklausomų atsitiktinių dydžių sekų

$$\xi_1^{(l)},\ \xi_2^{(l)}, \qquad l=1,\ 2,$$

Atsitiktinis procesas

$$N_l(t)=\max\left\{m:\ \sum_{i=1}^{m}\xi_i^{(l)}<t\right\}$$

paprastai vadinamas atstatymo procesu.

Darbe nagrinėjama seka nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atstatymo procesų

$$N_1(t),\ N_2(t),\ \ldots,\ N_n(t).$$

Žymima

$$F_l(x)=P\ \{\xi_1^{(l)}<x\}, \qquad l=1,\ 2,$$

$\tilde{F}_l(x)$ – pasiskirstymo $F_l(x)$ tolydinė komponentė;

$$\mu_{l,j}=\mathbf{M}(\xi_1^{(l)})^j,\quad j=1,\ 2,\ 3;\ \bar{\sigma}_n^2=\sum_{l=1}^{n}\frac{\mu_{l,3}-\mu_{l,1}^2}{\mu_{l,1}^3},$$

$$\Lambda_l(t)=\mathbf{M}\ N_l(t);$$

$$F_{n,t}(x)=P\left\{\frac{1}{\bar{\sigma}_n\sqrt{t}}\sum_{l=1}^{n}[N_l(t)-\Lambda_l(t)<x\right\}$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Parodome: jei

$$\mu=\inf_l \mu_{l,1}>0,\ \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ \bar\sigma_n^2>0,\ \ M=\sup_l \mu_{l,3}<\infty \text{ ir } \sup_l \bar F_l(\infty)>0,$$

tai, esant pakankamai dideliems n ir t,

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F_{n,t}(x)-\Phi(x)|\leqslant C\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{nt}}\right),$$

kur C nepriklauso nuo l, n ir t.

THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR THE SUMS OF RENEWAL PROCESSES

B. KAMINSKIENĖ

(*Summary*)

Let

$$\xi_1^{(l)},\ \xi_2^{(l)},\qquad (l=1,\ 2,\ \ ..,\ n)$$

be a series of sequences of independent non-negative random variables.

The stochastic process

$$N_l(t)=\max\left\{m:\sum_{i=1}^{m}\xi_i^{(l)}<t\right\},\qquad l=1,\ 2,$$

is called the renewal process.

In the paper a sequence $\{N_l(t)\}$ of the independent nonequally distributed renewal processes in e amined.

Let

$$F_l(x)=P\{\xi_1^{(l)}<x\},\qquad l=1,\ 2,$$

$\bar F_l(x)$ — the absolutely continuous component of distribution $F_l(x)$;

$$\mu_{l,j}=\mathbf{M}(\xi_1^{(l)})^j,\ \ j=1,\ 2,\ 3;\ \ \bar\sigma_n^2=\sum_{l=1}^{n}\frac{\mu_{l,2}-\mu_{l,1}^2}{\mu_{l,1}^3},$$

$$\Lambda_l(t)=\mathbf{M}\,N_l(t);$$

$$F_{n,t}(x)=P\left\{\frac{1}{\bar\sigma_n\sqrt{t}}\sum_{l=1}^{n}[N_l(t)-\Lambda_l(t)]<x\right\}$$

and

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

We prove that if

$$\inf_l \mu_{l,1}>0;\ \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ \bar\sigma_n^2>0,\ M=\sup_l \mu_{l,3}<\infty \text{ and } \sup_l \bar F_l(\infty)>0,$$

then for n and t large enough

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F_{n,t}(x)-\Phi(x)|\leqslant C\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{nt}}\right).$$

The constant C is independent of l, n and t.