X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК–511

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНЫХ ЧЛЕНОВ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОТ ЭЛЕМЕНТОВ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Г. А. МИСЯВИЧУС

Формулировка результатов

Разложение числа t в цепную дробь будем обозначать, как обычно,

$$t=[a_0(t);\ a_1(t),\ a_2(t)\qquad],$$

в случае $t\in(0,1)$

$$t=[0;\ a_1(t),\ a_2(t)\qquad]=[a_1(t),\ a_2(t)\qquad].$$

Подходящую дробь порядка k обозначим

$$\frac{p_k}{q_k}=[a_0;\ a_1\ \ldots\ a_k].$$

Символ $E\{\quad\}$ означает множество тех $t\in(0,1)$, для которых выполнены соотношения, указанные в фигурных скобках. Иногда скобки будем опускать.

И. А. Ибрагимовым [3] получен следующий результат о предельном распределении знаменателей $q_n(t)$: существуют такие постоянные $\sigma>0$ и a, что при $n\to\infty$

$$F_n(z)=m\,E\left\{\frac{\log q_n(t)-na}{\sigma\sqrt{n}}<z\right\}\to\Phi(z),$$

где

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du. \tag{1}$$

И. А. Ибрагимов $\log q_n$ выразил суммой величин $b_j=\log\frac{q_j}{q_{j-1}}=\log[a_j;\ a_{j-1}\ldots a_1]$. С целью получить скорость сходимости для распределения других параметров цепных дробей к нормальному закону, будем исследовать суммы

$$S_n=S_n(t)=\sum_{j=1}^{n}f([a_j;\ a_{j-1}\ \ldots\ a_1]). \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $f(t)$-измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условиям:*

a) $f(t)=B\ln t,$ $(t\geqslant 1)$, (3)

где B – число, не всегда одно и то же, ограниченное по модулю константой;

б) *для какого-нибудь* $\alpha>0$ *справедливо неравенство*

$$|f(t+h)-f(t)| \leqslant Ah^{\alpha}; \tag{4}$$

в)

$$\mathbf{D}S_n \to \infty, \tag{5}$$

здесь

$$\mathbf{D}S_n=\int_0^1 (S_n(t)-\mathbf{M}S_n)^2\,dt, \qquad \mathbf{M}S_n=\int_0^1 S_n(t)\,dt.$$

Тогда существуют константы $\sigma>0$, a *и* C_1, *для которых справедливо неравенство*

$$\sup_x \left| mE\left\{\frac{S_n-an}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}-\Phi(x)\right| \leqslant C_1 \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}. \tag{6}$$

Наш метод применим также для последовательностей $f(T^j t)$, где T — сохраняющее меру преобразование отрезка $(0, 1)$ в себя, связанное со стационарной последовательностью $a_1(t)$, $a_2(t)$

$$Tt=T[a_1(t),\ a_2(t)\quad]=[a_2(t),\ a_3(t)\quad].$$

Как известно, последовательность $a_1(t)$, $a_2(t)$ ... стационарна по отношению к мере Гаусса

$$\mu(A)=\frac{1}{\log 2}\int_A \frac{dt}{1+t}$$

Будем обозначать

$$[f]_k^s(t)=M\{f(T^s t)\,|\,a_{1+s}\ \dots\ a_{k+s}\}, \tag{8}$$

$$(k=1,\ 2,\ \dots,\ s=0,1\ ,\ \dots).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(t)$ *удовлетворяет условиям*

а) $$f(t)=B\ln\left|\frac{1}{t}\right|, \qquad t\in(0,1); \tag{9}$$

б) $$\int_0^1 |f(t)-[f]_k^0(t)|^2\,dt \leqslant A q^k, \qquad |q|<1. \tag{10}$$

Обозначим

$$\int^1 f(t)\,\mu(dt)=\frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\,dt=a. \tag{11}$$

Тогда

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{C_2\ln^2 n}{\sqrt{n}}, \tag{12}$$

здесь

$$F_n(x)=mE\left\{\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(f(T^k t)-a)}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\} \tag{13}$$

Сделаем несколько замечаний по поводу наших теорем.

1. По сути дела, нами доказана справедливость теоремы несколько более общей формы, чем теорема 1, из которой видна зависимость остаточного члена от роста функции.

Теорема 1*. *Пусть функция* $|f(t)|\geqslant c>0$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда имеет место соотношение*

$$\sup_x\left|E\left\{\frac{S_n-an}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}-\Phi(x)\right|\leqslant C_1^*\,\frac{|f(n)|\ln n}{\sqrt{n}}$$

2. В предположении, что исследуемая функция зависит от конечного числа коэффициентов a_k, можно отбросить требование *б* теоремы 1.

Обозначим за t k-мерный вектор $(t_1,\quad t_k)$,

$$S_n^*=\sum_{j=1}^{n}f(a_j,\,a_{j+1}\qquad a_{j+k}).$$

Теорема 3. *Пусть для измеримой функции* $f(t)$ *выполняются условия*

а) $|f(t)|=B\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\log|t_i|$;

б) $DS_n^*\to\infty,\ (n\to\infty)$.

Тогда справедливо соотношение

$$\sup_x\left|m\,E\left\{\frac{S_n^*-a\,n}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}-\Phi(x)\right|\leqslant\frac{C_3\ln n}{\sqrt{n}}$$

Теорема доказывается аналогично теореме 1, с очевидными изменениями.

В случае ограниченной последовательности остаточный член получается порядка $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, что дает улучшение результата Леблина [9].

§ 1. Слабая зависимость последовательности $\{a_j\}$

Докажем, что последовательность коэффициентов $\{a_k\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания с коэффициентом $A_0e^{-\lambda n}$.

Как известно, коэффициенты a_k есть случайные величины, определенные в вероятностном пространстве $\{U,\,F,\,m\}$, где U — интервал $(0,1)$, F — σ-алгебра лебеговских множеств и $m(A)$ — мера Лебега. Условие сильного перемешивания означает: для всех $A\in\mathfrak{M}_1^k$, $B\in\mathfrak{M}_{k+n}^{\infty}$

$$|m(A\cap B)-m(A)\,m(B)|\leqslant A_0e^{-\lambda n}\,m(A),\tag{1.1}$$

где $A_0\lambda$ — константы, $\mathfrak{M}_a^b$ — минимальная σ-алгебра, порожденная событиями

$$E\{a_{l_1}(t)=i_1,\quad a_{l_2}(t)=i_2,\qquad a_{l_s}(t)=i_s\},\qquad a\leqslant l_1\leqslant l_2\leqslant\ldots\leqslant l_s\leqslant b.$$

Для доказательства нам понадобится теорема.

Теорема (П. Сюс, [6]). *Пусть дифференцируемая функция* $g_0(x)$, *определенная в интервале* $(0,1)$ *с помощью рекуррентной формулы*

$$g_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\frac{1+x}{(k+x)\,(k+1+x)},\tag{1.2}$$

определяет последовательность $g_1(x), g_2(x)$ *Пусть, кроме того,* $g_0(x)$ *удовлетворяет одному из неравенств*

$$-M_0 \leqslant g_0'(x) \leqslant 0 \tag{1.3}$$

или

$$0 \leqslant g_0'(x) \leqslant M_0. \tag{1.4}$$

Тогда справедливо неравенство

$$g_n'(x) = O(q^n), \quad |q| < 1.$$

(Оценка в символе „О" зависит только от M_0.*)*

Условиям этой теоремы удовлетворяют функции $g_n(x)$, получаемые с помощью равенства

$$m_n'(x) = \frac{g_n(x)}{1+x},$$

где $m_n(x)$ есть мера тех $t \in (0, 1)$, для которых $z_n(t) < x$, $z_n = r_n - a_n$, $r_n = [a_n; a_{n+1} \quad]$. Из этой теоремы следует

$$m_n'(x) = \frac{1}{\log 2} \quad \frac{1}{1+x} + O(q^n).$$

Для наших целей необходимо получить аналогичное соотношение для функций $\chi_n(x) = \dfrac{M_n(x)}{m\,E\begin{pmatrix}1\ldots k\\ i_1\ldots i_k\end{pmatrix}}$, где

$$M_n(x) = mE\,\{a_1(t) = i_1, \qquad a_k(t) = i_k,\ z_{k+n}(t) < x\}.$$

Функции $g_n(x)$, получаемые из равенств

$$\chi_n'(x) = \frac{'g_n(x)}{1+x}, \qquad n = 1, 2 \ldots,$$

удовлетворяют условию теоремы Сюса (1.2), но условия (1.3) или (1.4), вообще говоря, не выполняются. Поэтому поступим следующим образом.

Как известно, [7],

$$m\,E\begin{pmatrix}1 \ldots k\\ i_1 \ldots i_k\end{pmatrix} = \frac{1}{q_k(q_k+q_{k-1})}, \qquad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

поэтому

$$g_0'(x) = \frac{q_k^3 - (1+x)\,q_k^2 q_{k-1} - (2+x)\,q_k\,q_{k-1}^2}{(q_k+q_{k-1}\,x)^3} \tag{1.5}$$

При $a_k = 1$

$$-5 \leqslant g_{01}'(x) \leqslant 0,$$

при $a_k \geqslant 3$

$$0 \leqslant g_{01}'(x) \leqslant 2.$$

Действительно, в первом случае $q_k = q_{k-1} + q_{k-2}$,

$$g_{01}'(x) = \frac{q_k\left(-(2+2x)\,q_{k-1}^2 + (1-x)\,q_{k-1}\,q_{k-2} + q_{k-2}^2\right)}{(q_k+q_{k-1})^3} \leqslant 0.$$

Во втором случае, т. е. при $a_k \geqslant 3$

$$g'_{0k}(x) = \frac{q_k\left(q_{k-1}^2(a_k^2 - a_k - 2 - x a_k - x) + q_{k-2} q_{k-1}(2a_k - (1+x)) + q_{k-2}^2\right)}{(q_k + q_{k-1}x)^3} \geqslant 0.$$

В этих случаях по теореме Сюса, имея ввиду

$$\chi_n(1) = 1, \ \chi_n(0) = 0,$$

получаем соотношение

$$\chi'_n(x) = \frac{1}{\log 2} \ \frac{1}{1+x} + O(q^n). \qquad (1.6)$$

В случае $a_k = 2$ функция

$$g'_{02}(x) = \frac{q_k\left(q_{k-1}^2(-3x) + q_{k-1} q_{k-2}(3-x) + q_{k-2}^2\right)}{(q_k + q_{k-1}x)^3}$$

меняет знак в интервале (0, 1). Поэтому будем рассматривать функции

$$g_n^*(x) = g_{n2}(x) + g_{nj}(x),$$

где g_{n2} и g_{nk} отличаются только значением коэффициента a_k (для второй функции $a_k = j$), а a_{k-1} a_1, тем самым q_{k-1} для обоих функций одинаковые.

Фиксируя q_{k-1} и устремляя a_k в бесконечность, получим, что g'_{1j} стремится к единице равномерно относительно x. Подбирая j таким, что

$$g'_{0j} > 1 - \varepsilon,$$

будем иметь

$$g_0^*(x) > g_{02} + 1 - \varepsilon =$$

$$= \frac{q_k\left(a_{k-1}^2(-3x) + q_{k-1} q_{k-2}(3-x) + q_{k-2}^2\right) + (q_k + q_{k-1}x)^3(1-\varepsilon)}{(q_k + q_{k-1}x)^3} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{q_k\left(q_{k-1}^2\left(-3x + 4(1-\varepsilon)\right)\right)}{(q_k + q_{k-1}x)^3} \geqslant 0 \qquad \text{при } 0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$$

Тем самым

$$0 \leqslant g^{*\prime}(x) \leqslant g.$$

Так как для суммы функций, удовлетворяющих рекуррентному соотношению (1.2), оно также выполнено, g_n^* удовлетворяет всем условиям теоремы Сюса. По теореме получаем

$$\chi'_{2n} + \chi'_{jn} = \frac{2}{\log 2} \ \frac{1}{1+x} + O(q^n). \qquad (1.8)$$

(Здесь $\chi'_{2n} = \frac{g_{2n}}{1+x}$, $\chi'_{jn} = \frac{g_{jn}}{1+x}$.)

Из соотношений (1.6) и (1.8) заключаем, что (1.6) выполнено во всех случаях.

Интегрируя соотношение (1.6) по множеству $E\begin{pmatrix} 1 & & S \\ j_{k+n} & \ldots & j_{k+n+s}\end{pmatrix}$ и, рассуждая аналогично [1] (стр. 481—482), получаем

$$m\left(E\begin{pmatrix}1 & & k\\ i_1 & \ldots & i_k\end{pmatrix} \cap E\begin{pmatrix}k+n & \ldots & k+n+s\\ j_{k+n} & \ldots & j_{k+n+s}\end{pmatrix}\right)=$$

$$= m\,E\begin{pmatrix}1 & \ldots & k\\ i_1 & & i_k\end{pmatrix} \mu\, E\begin{pmatrix}k+n & \ldots & k+n+s\\ j_{k+n} & \ldots & j_{k+n+s}\end{pmatrix}+$$

$$+K_1\, m\, E\begin{pmatrix}1 & \ldots & k\\ i_1 & \ldots & i_k\end{pmatrix} m\,E\begin{pmatrix}k+n & \ldots & k+n+s\\ j_{k+n} & \ldots & j_{k+n+s}\end{pmatrix} e^{-\lambda n}. \tag{1.9}$$

Для того, чтобы заменить в формуле (1.9) в правой части меру μ мерой m, воспользуемся леммой.

Лемма. *Если множество $B\in(0, 1)$ измеримо относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_n^\infty$, порожденной $a_j(t)$, $j\geqslant n$, то*

$$|\mu(B)-m(B)|\leqslant K_2 e^{-\lambda n} m(B). \tag{1.10}$$

Доказательство. Применим теорему Сюса для функций

$$\chi_n(x)=\frac{M_n(x)}{m\,E\binom{1}{i_1}},$$

где $M_n(x)=mE\{t : a_1(t)=i_1,\ z_{n+1}(t)<x\}$ и рассуждаем аналогично лемме 19.4.2 в [1].

Взяв в оценке (1.10) $B=E\begin{pmatrix}k+n & \ldots & k+n+s\\ j_{k+n} & \ldots & j_{k+n+s}\end{pmatrix}$ из (1.9) и (1.10), получаем

$$m\left(E\begin{pmatrix}1 & & k\\ i_1 & \ldots & i_k\end{pmatrix} \cap E\begin{pmatrix}k+n & \ldots & k+n+s\\ j_{k+n} & \ldots & j_{k+n+s}\end{pmatrix}\right)=$$

$$= m\,E\begin{pmatrix}1 & & k\\ i_1 & \ldots & i_k\end{pmatrix} m\,E\begin{pmatrix}k+n & \ldots & k+n+s\\ j_{k+n} & \ldots & j_{k+n+s}\end{pmatrix}+$$

$$+\Theta K_3\, m\, E\begin{pmatrix}1 & & k\\ i_1 & & i_k\end{pmatrix} m\,E\begin{pmatrix}k+n & \ldots & k+n+s\\ j_{k+n} & \ldots & j_{k+n+s}\end{pmatrix} e^{-\lambda n}. \tag{1.10*}$$

Так как любое множество, измеримое относительно $\mathfrak{M}_a^b$ можно с любой степенью точности аппроксимировать множествами

$$E\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_k\\ j_{i_1} & \ldots & j_{i_k}\end{pmatrix}, \quad a\leqslant j_{i_1}\leqslant \quad \leqslant j_{i_k}\leqslant b$$

из (1.10)* заключаем, что справедлива теорема.

Теорема 4. *Последовательность $\{a_j\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания*

$$\sup_{A\in\mathfrak{M}_1^t,\ B\in\mathfrak{M}_{t+\tau}^\infty} \frac{|P(AB)-P(A)P(B)|}{P(A)}=\varphi(\tau)\to 0\ (\tau\to\infty),$$

где $\varphi(\tau)\leqslant K_3 e^{-\lambda n}$.

Для наших целей используется условие сильного перемешивания и для величин $\{a_j\}$ в вероятностном пространстве $\{u, F, \mu\}$, μ-мера Гаусса. Аналогично доказывается*) теорема.

Теорема 4*. *Для всех* $A \in \mathfrak{M}_1^k$, $B \in \mathfrak{M}_{k+n}^\infty$

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leqslant B_0 e^{-\varkappa n} \mu(A)\mu(B). \tag{1.11}$$

Доказательство. В этом случае возьмем

$$\chi_n(x) = \frac{M_n(x)}{\mu E\begin{pmatrix}1 & \ldots & k\\ i_1 & \ldots & i_k\end{pmatrix}},$$

$$M_n(x) = \mu E\{t\colon a_1(t) = i_1, \qquad a_k(t) = i_k,\ z_{k+n} < x\}.$$

Так как

$$\frac{1}{2\ln 2\, q_k(q_k+q_{k-1})} \leqslant \mu E\begin{pmatrix}1 & & k\\ i_1 & & i_k\end{pmatrix} \leqslant \frac{1}{\log 2\, q_k(q_k+q_{k-1})},$$

$$h_0'(x) =$$

$$= \frac{\Theta\,(q_k^2 + q_k p_k - q_{k-1}^2 x^2 - q_{k-1}p_{k-1}x^2 - x\,q_{k-1}^2 - x\,q_{k-1}p_{k-1} - 2q_k q_{k-1} - q_k q_{k-1}}{(q_k + x\,q_{k-1})^2\,(q_k + p_k + (p_{k-1} + q_{k-1})x)^2} +$$

$$+ \frac{-q_{k-1}^2 x - q_{k-1}p_{k-1}x - q_{k-1}p_k)\quad q_k(q_k + q_{k-1})}{(q_k + x\,q_{k-1})^2\,(q_k + p_k + (p_{k-1} + q_{k-1})\,x)^2} =$$

$$= \left[\frac{q_{k-1}^2(a_k^2 - 2a_k - x^2 - x) + q_{k-1}p_{k-1}(a_k^2 - 2a_k x^2 - x) + q_{k-1}q_{k-2}(2a_k - 2)}{(q_k + x\,q_{k-1})^2\,(q_k + p_k + (p_{k-1} + q_{k-1})\,x)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{q_{k-1}p_{k-2}(a_k - 1) + q_{k-2}p_{k-2} + q_{k-2}^2}{(q_k + x\,q_{k-1})^2(q_k + p_k + (p_{k-1} + q_{k-1})x)^2}\right]\Theta\, q_k(q_k + q_{k-1}),\quad \frac{1}{2} < \Theta < 1.$$

Функция $h_n(x)$, получаемая из равенства

$$\chi_n'(x) = \frac{h_n(x)}{1+x},$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению (1.2) в теореме Сюса. Как видно из выражения $h_0'(x)$, при $a_k = 1$

$$-12 \leqslant h_0'(x) \leqslant 0,$$

а при $a_k \geqslant 3$

$$0 \leqslant h_0'(x) \leqslant 24.$$

Здесь имелось в виду $\frac{p_k}{q_k} \leqslant 1$ для всех $t \in (0, 1)$.

Фиксируя $a_1 \qquad a_{k-1}$ и устремляя a_k в бесконечность, получаем

$$\lim_{a_k \to \infty} h_0'(x) \geqslant \frac{1}{8}$$

равномерно для всех $x \in (0, 1)$.

*) Упомянутый результат вытекает из теорем 1 и 3 в [10].

Беря a_k таким, что соответствующий $h_0(x) > \frac{1}{8} - \varepsilon$, и обозначив h_{nj}, получаем, что для функции

$$h_n(x) = h_{n2}(x) + 10h_{nj}(x)$$

выполнено неравенство

$$0 \leqslant h_0'(x) \leqslant 42$$

и, очевидно, рекуррентное соотношение (1.2).

Доказательство завершается аналогичными рассуждениями, как в теореме 4.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Для оценки скорости сходимости воспользуемся результатами В. А. Статулявичуса ([4], теорема 28, аналогичный результат в [5]).

Лемма 2.1. *Пусть случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями удовлетворяют условию сильного перемешивания с коэффициентом* $\varphi_n(\tau) = Ae^{-\alpha_n \tau}$ *Пусть для* $j_0 \geqslant 1$

$$\left|\sum_{j=s}^{s+j_0} \xi_j\right| \leqslant C_{j_0, n}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant n. \tag{2.1}$$

Тогда существует абсолютная константа C_H, *для которой выполнено неравенство*

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{C_H}{\Delta_n} \tag{2.2}$$

Здесь $F_n(x)$ — *функция распределения нормированной суммы случайных величин* $\{\xi_j\}$,

$$\Delta_n = \frac{\alpha_n \sigma(n)}{H C_{j_0, n}}, \qquad \sigma(n) = \sqrt{D S_n}.$$

Теорема доказывается при помощи неравенства для семиинвариантов суммы S_n, полученного в 27 теореме в [4]:

$$|\Gamma_k\{S_n\}| \leqslant \frac{k!\, H_1 H^{k-2} C_{j_0, n}^{k-2} \sigma^2(n)}{\alpha_n^{-2}}, \qquad k = 3, 4 \tag{2.3}$$

Для того, чтобы воспользоваться упомянутыми результатами, величины ξ_j заменим, как это делается в [3], величинами $\xi_j^{(s)}$ и „урежем" сверху, чтоб полученные величины удовлетворяли условию (2.1) леммы.

Обозначим $\xi_j = f([a_j;\ a_{j-1} \quad a_1])$ и введем новые величины

$$\xi_j^{(s)} = \begin{cases} f([a_j;\ a_{j-1} \ldots a_{j-s}]), & j > s, \\ f([a_j;\ a_{j-1} \ldots a_1]), & j \leqslant s, \end{cases}$$

$$\eta_j^{(n)} = \begin{cases} \xi_j^{(s)} \text{ при } |\xi_j^{(s)}| \leqslant p \log n, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Величины $\eta_j^{(n)}$ удовлетворяют условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом $\varphi_s(n)$, который по неравенству (1.7) удовлетворяет

$$\varphi_s(\tau) \leqslant \begin{cases} 1, & \tau \leqslant s \\ B_0 e^{-\varkappa(n-s)}, & \tau > s, \end{cases} \tag{2.4*}$$

и ограничены $p \log n$. Поэтому по лемме 2.1 получаем

$$\sup_x \left| \mu E \left\{ \frac{S_n^n - M_\mu S_n^n}{\sqrt{D_\mu S_n^n}} < x \right\} - \Phi(x) \right| \leqslant \frac{C_H S \ln n}{\sqrt{D S_n^n}},$$

где

$$S_n^n = \sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(n)};$$

Здесь и в дальнейшем $\mathbf{M}_\mu$, $\mathbf{D}_\mu$ есть дисперсия и математическое ожидание по мере Гаусса, $\mathbf{M}_m, \mathbf{D}_m$ — соответствующие величины по мере Лебега.

Мерой Гаусса мы пользуемся вследствие стационарности последовательности $\{a_j\}$ по отношению к ней (теорема 19.4.1 в [1]).

Лемма 2.2. *Справедливы равенства*

$$\mathbf{M}_\mu S_n = an + r_n, \quad |r_n| < c_1; \tag{2.4}$$

$$\mathbf{M}_\mu (S_n - an)^2 = \sigma^2 n + \Theta_n, \quad |\Theta_n| < c_1^*. \tag{2.5}$$

Условие а теоремы 1 обеспечивает существование моментов любого порядка. Как в [3], использовав условие б, получим неравенство

$$|\mathbf{M}_\mu \xi_{j+1} - \mathbf{M}_\mu \xi_j| \leqslant 8 \cdot 2^{-j},$$

из которого следует (2.4).

По теореме 17.23 в [1] получим

$$|\mathbf{M}_\mu \xi_j^{(s)} \xi_{j+k}^{(s)} - \mathbf{M}_\mu \xi_j^{(s)} M_\mu \xi_{j+k}^{(s)}| \leqslant 2\sqrt{B_0}\, e^{-\frac{\varkappa k}{2}}$$

при $S < \frac{k}{2}$ Затем, воспользовавшись условием б теоремы 1 и вычисляя аналогично [3], получим

$$|\mathbf{M}_\mu \xi_j^{(s)} \xi_{j+k}^{(s)} - \mathbf{M}_\mu \xi_j^{(s)} M_\mu \xi_{j+k}^{(s)}| \leqslant 2c_2 \sqrt{B_0}\, e^{-c_3 k} \tag{2.6}$$

для всех s.

Заметим, далее, что из условия в теоремы 1 следует $\mathbf{D}_\mu S_n \to \infty$. Это вытекает из неравенства

$$\mathbf{D}_\mu S_n \geqslant \frac{1}{2\log 2} \int_0^1 (S_n - \mathbf{M}_\mu S_n)^2\, dt \geqslant c_0 \mathbf{D}_m S_n.$$

Следуя рассуждениям лемм 7 в [3], получим

$$\mathbf{M}_\mu (S_n - \mathbf{M}_\mu S_n)^2 = n r_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) r_k + \Theta_n, \tag{2.7}$$

где

$$r_k = \lim_{j\to\infty} r_{jk}, \qquad |\Theta_n| \leqslant c_4,$$

$$r_{jk} = M_\mu (\xi_j - M_\mu \xi_j)(\xi_{j+k} - M_\mu \xi_{j+k}).$$

Благодаря (2.6), справедливы оценки

$$|r_{jk}|\leqslant c_5 e^{-\varkappa_1 k}, \qquad |r_k|<c_6 e^{-\varkappa_1 k}, \tag{2.8}$$

$$|r_{jk}-r_k|\leqslant \min\left(c_7 e^{-(j-1)}, \quad 2c_6 e^{-\varkappa_1 k}\right).$$

Выразим (11.7) следующим образом:

$$\mathbf{D}_\mu S_n = n r_0 + 2n \sum_{k=1}^{\infty} r_k - 2n \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k - \sum_{k=1}^{n-1} k r_k + \Theta_n .$$

Из оценок (2.8) следует

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} k r_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{\infty} k r_k\right| = c_8;$$

$$\left|2n \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k\right| \leqslant c_9 e^{-\varkappa_1 n},$$

поэтому

$$\mathbf{D}_\mu S_n = n\left(r_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r_k\right) + \tilde{\Theta}_n, \qquad |\tilde{\Theta}_n| < c_4^*$$

Обозначив

$$\sigma^2 = r_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r_k,$$

вследствие неограниченности дисперсии $\mathbf{D}_\mu(S_n)$, получаем $\sigma>0$. Наконец из условия (2.4) следует, что

$$\mathbf{M}_\mu (S_n - M_\mu S_n)^2 = M_\mu (S_n - an)^2 + c_{10}.$$

Лемма полностью доказана.

Сейчас мы займемся оценкой разности между суммами величин $\eta_j^{(n)}$ и ξ_j. Нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{M}_\mu \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(s)} - M_\mu \xi_j^{(s)})\right)^2 = \sigma_s^2 n + c_{11}$$

Обозначив

$$r_k^{(s)} = \lim_{j\to\infty} \left(M_\mu \xi_j^{(s)} \xi_{j+k}^{(s)} - M \xi_j^{(s)} M \xi_{j+k}^{(s)}\right),$$

будем иметь

$$|r_k - r_k^{(s)}| \leqslant \min\left(c_{12} 2^{-s}, c_{13} e^{-\varkappa_2 k}\right).$$

Последнее неравенство дает

$$|\sigma - \sigma_s| \leqslant c_{14} e^{-\varkappa_3 s}. \tag{2.9}$$

Обозначив разность

$$\tilde{S}'_n = \tilde{S}_n - \tilde{S}^s_n,$$

где

$$\tilde{S}_n = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} (\xi_j - M_\mu \xi_j)}{\sqrt{n}}, \qquad \tilde{S}_n^s = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} (\xi_j^{(s)} - M_\mu \xi_j^{(s)})}{\sigma_s \sqrt{n}},$$

немедленно убедимся, что

$$\mathbf{M}_\mu |\tilde{S}_n'|^2 \leqslant c_{15} e^{-\varkappa_0 s},$$

а тем самым и

$$\mathbf{D}_m |\tilde{S}_n'|^2 \leqslant c_{15}^* e^{-\varkappa_0 s}. \tag{2.10}$$

Перейдем к оценке разности

$$\tilde{S}_n'' = \tilde{S}_n^n - \tilde{S}_n^s.$$

Так как по [7] $mE\left(\frac{n}{s}\right) < \frac{2}{s^2}$, то

$$m E\{\eta_j^{(n)} \neq \xi_j^{(s)}\} \leqslant m E\{a_j \geqslant n^p\} \leqslant 2 \sum_{j=n^{p-1}} \frac{1}{j^2} \leqslant \frac{c_{16}}{n^p}$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}_m |S_n''|^2 \leqslant \frac{c_{17}}{n^{p_1}}, \qquad p_1 \geqslant p-2$$

и

$$D_\mu |S_n''|^2 \leqslant \frac{c_{17}^*}{n^{p_1}}. \tag{2.11}$$

Кроме того,

$$\mathbf{D}_\mu S_n^n = \sigma^2 n + c_{14} e^{-\varkappa_s s} n + \tilde{\Theta}_n, \qquad |\tilde{\Theta}_n| < c_{18}^*.$$

Разность между распределениями $\tilde{S}_n^s$ по отношению к мерам m и μ целесообразно оценить сразу для характеристических функций. Пусть

$$\varphi_n^{(s)}(\tau) = \mathbf{M}_\mu \exp\{i\tau S_n^s\} = \int_0^1 \exp\{i\tau S_n^s(t)\}\, \mu(dt)$$

$$\psi_n^{(s)}(\tau) = \mathbf{M}_m \exp\{i\tau S_n^s\} = \int_0^1 \exp\{i\tau S_n^s(t)\}\, dt.$$

Выразим разность

$$|\varphi_n^{(s)}(\tau) - \psi_n^{(s)}(\tau)| \leqslant \int_0^1 \left| \exp\left\{ i\tau \sum_1^m \frac{\xi_j^{(s)} - \mathbf{M}_\mu \xi_j^{(s)}}{\sigma_s \sqrt{n}} \right\} - 1 \right| +$$

$$+ \int_0^1 \left| \exp\left\{ i\tau \sum_1^m \frac{\xi_j^{(s)} - M_\mu \xi_j^{(s)}}{\sigma_s \sqrt{n}} \right\} - 1 \right| \mu(dt) +$$

$$+ \left| \int_0^1 \exp\left\{ i\tau \sum_{m+1}^n \frac{\xi_j^{(s)} - M_\mu \xi_j^{(s)}}{\sigma_s \sqrt{n}} \right\} (dt - \mu(dt)) \right|$$

В последнем интеграле подынтегральная функция измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}_j^{\infty}$, $j>m-s$. Воспользовавшись неравенством (1.10), получим

$$\left|\int_0^1 \exp\left\{i\tau\sum_m^n \frac{\xi_j^{(s)}-\mathbf{M}_\mu\xi_j^{(s)}}{\sigma_s\sqrt{n}}\right\}\left(dt-\mu(dt)\right)\right|\leqslant\sqrt{n}\,K_2e^{-\lambda(m-s)}|\tau|.$$

Первые два члена оцениваем тривиальным образом, использовав лемму 4.7 из [2]. Таким образом,

$$|\varphi_n^{(s)}(\tau)-\psi_n^{(s)}(\tau)|\leqslant\left(c_{18}\sqrt{n}\,e^{-\lambda(m-s)}|\tau|+c_{19}\frac{m}{\sqrt{n}}|\tau|\right)\sigma_s^{-1}.$$

Обозначив характеристические функции сумм $\tilde{S}_n^n$ (по мере μ) и $\tilde{S}_n$ (по мере m) соответственно $\varphi_n^{(n)}$ и $\varphi_n(\tau)$, будем иметь

$$|\varphi_n^{(n)}(\tau)-\psi_n(\tau)|\leqslant|\varphi_n^{(n)}-\varphi_n^{(s)}|+|\varphi_n^{(s)}+\psi_n^{(s)}|+|\psi_n^{(s)}-\psi_n|. \tag{2.12}$$

Для оценки членов справа получим, используя лемму 4.7 в [2], а также (2.11) и (2.10):

$$|\varphi_n^{(s)}(\tau)-\psi_n(\tau)|=\left|\int_0^1\exp\{i\tau\,\tilde{S}_n^{(s)}\}\left(\exp\{i\tau(\tilde{S}_n-\tilde{S}_n^{(s)})\}-1\right)dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_{20}\exp\left\{-\frac{\varkappa_6}{2}s\right\}|\tau|$$

$$|\varphi_n^{(n)}(\tau)-\varphi_n^{(s)}(\tau)|=\left|\int_0^1\exp\{i\tau\,\tilde{S}_n^{(n)}\}\left(\exp\{i\tau(\tilde{S}_n^{(s)}-\tilde{S}_n^{(n)})\}-1\right)\mu(dt)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_{21}|\tau|}{n^{\frac{p_1}{2}}}$$

Взяв $s=\dfrac{2\ln n}{\varkappa_6}$, $\quad m=\left(\dfrac{2}{\varkappa_6}+\dfrac{2}{\lambda}\right)\ln n$, получим

$$|\varphi_n^{(n)}(\tau)-\psi_n(\tau)|\leqslant c_{22}|\tau|\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \tag{2.13}$$

Нам остается оценить разность между $\varphi_n^{(n)}$ и характеристической функцией нормального закона. Непосредственно воспользоваться леммой 2.1 мы не можем, поэтому будем пользоваться неравенством (2.3) и воспроизведем рассуждения теоремы 28 в [4] для нашего случая.

Вспоминая определение $\xi_j^{(n)}$, в неравенстве (2.3) положим $j_0=1$,

$$C_{1n}=C_n=p\log n,\qquad \alpha_n=\frac{1}{s}=\left(\frac{\varkappa}{2\ln n}\right),$$

$$\sigma(n)=\sigma\sqrt{n}+\Theta_n,\qquad |\Theta_n|<c_{23},$$

таким образом

$$\Delta_n=\frac{\sigma\sqrt{n}}{H\ln^2 n},$$

$$|\Gamma_k\{S_n^n\}|\leqslant\frac{k!\,\bar{H}_1H^{k-2}\ln^{(k-2)}n(\sigma\sqrt{n}+\Theta_n)^2}{\left(\dfrac{\varkappa}{2\ln n}\right)^{k-2}}=\frac{k!\,H_1(\sigma\sqrt{n})^k}{\Delta_n^{k-2}}$$

Последнее неравенство дает нам сходимость ряда

$$K_n(z)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\Gamma_{kn}}{k!}z^k=\frac{(\sigma\sqrt{n}z)^2}{2}\left(1+\frac{\Theta H_1\sigma\sqrt{n}\,|z|}{\Delta_n\left(1-\frac{\sigma\sqrt{n}\,|z|}{\Delta_n}\right)}\right)$$

при $|z|<\frac{\Delta_n}{\sigma\sqrt{n}}$. Отсюда получается аналитичность функции $\varphi(z)=\mathbf{M}\exp\{zS_n^n\}$ в круге $|z|\leqslant\frac{\delta\Delta_n}{\sigma\sqrt{n}}$ и равенство $\log\varphi_n(z)=K_n(z)$.

Разлагая $\log\varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности $|t|<\frac{\delta\Delta_n}{\sigma\sqrt{n}}$, будем иметь

$$\ln\varphi_u^1(\tau)=\ln\varphi_n(i\tau)=-\frac{t^2}{2}(\sigma\sqrt{n}+\tilde{\Theta}_n)^2+\frac{(it\sigma\sqrt{n})^3}{6}\Big(\ln\varphi(z)\Big)'''_{z=i\Theta t}=$$

$$=-\frac{t^2}{2}(\sigma\sqrt{n}+\tilde{\Theta}_n)^2+\frac{|t|^3H_1\Theta(\sigma\sqrt{n})^3}{\Delta_n(1-\delta)^4},$$

так как

$$\Big(\ln\varphi(z)\Big)'''=\frac{(\sigma\sqrt{n})^3\Theta H_1}{\Delta_n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)z^{k-3}(\sigma\sqrt{n})^{k-3}}{\Delta_n^{k-3}}=$$

$$=\frac{6(\sigma\sqrt{n})^3\Theta H_1}{\Delta_n\left(1-\frac{z\sigma\sqrt{n}}{\Delta_n}\right)^4}=\frac{6\Theta H_1(\sigma\sqrt{n})^3}{\Delta_n(1-\delta)^4}$$

Возвращаясь к характеристической функции нормированной суммы, получим

$$\ln\varphi_n^{(n)}(\tau)=\ln\varphi_n^1\left(\frac{\tau}{\sigma\sqrt{n}+\tilde{\Theta}_n}\right)=-\frac{\tau^2}{2}+\frac{|\tau|^3H_2\Theta}{\Delta_n(1-\delta)^4},$$

$$|\tau|\leqslant\delta_2\Delta_n.$$

Так как $K_n(z)$ аналитическая в круге $|z|\leqslant\frac{\delta\Delta_n}{\sigma\sqrt{n}}$, $|K_n(z)|<\bar{c}$, тем самым $\varphi_n(z)>e^{-\bar{c}}>0$, значит, $\psi_n^{(n)}(\tau)>e^{-\bar{c}}>0$ при $|\tau|<\delta\Delta_n$. Неравенство (2.13) дает

$$\left|\frac{\psi_n(\tau)}{\varphi_n^{(n)}(\tau)}-1\right|\leqslant c_{24}|\tau|\frac{\ln n}{\sqrt{n}},\quad |\ln\psi_n(\tau)-\ln\varphi_n^{(n)}(\tau)|\leqslant c_{25}|\tau|\frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Окончательно получим

$$\ln\psi_n(\tau)=-\frac{\tau^2}{2}+\frac{|\tau|^3H_3}{\Delta_n}+c_{26}|\tau|\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

при

$$|\tau|\leqslant\delta_2\Delta_n.$$

Следуют стандартные рассуждения

$$|\psi_n(\tau)-e^{-\frac{\tau^2}{2}}|\leqslant e^{-\frac{\tau^2}{2}}\left(e^{\frac{|\tau|^3H_4}{\Delta_n}+c_{24}|\tau|\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}-1\right)\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{\tau^2}{2}}\left(e^{\frac{|\tau|^3\ln^3 nH_4}{\sqrt{n}}+\frac{c_{24}|\tau|\ln n}{\sqrt{n}}}-1\right)\leqslant e^{-\frac{\tau^2}{4}}\left(\frac{|\tau|^3\ln^3 nH_4}{\sqrt{n}}+\frac{c_{24}|\tau|\ln n}{\sqrt{n}}\right)$$

при $|\tau| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{4\ln^2 n H_4 c_{24}}$

Для завершения доказательства остается применить лемму Эссеена ([8], стр. 299).

§ 3. Доказательство теоремы 2

Обозначим $\xi_j = f(T^j t)$ и аналогично теореме 1 введем вспомогательные величины

$$\xi_j^{(s)} = M\{\xi_j\} \mid a_j, \ldots, a_{j+s}\} = [f]_s^j(t)$$

и

$$\eta_j^{(n)} = \begin{cases} \xi_j^{(s)}, & |\xi_j^{(s)}| < p \log n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Величины $\eta_j^{(n)}$ удовлетворяют условиям леммы 1.1: они ограничены величиной $p \ln n$ и, будучи измеримыми относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}_j^{j+s}$ удовлетворяют условию сильного перемешивания с коэффициентом $\varphi_s(n) \leqslant B_0 e^{-\varkappa(n-s)}$. Поэтому займемся оценкой разности между суммами $\bar{S}_n$ и $\bar{S}_n^n$ нормированных и центрированных величин ξ_n и $\eta_j^{(n)}$.

Вычисляя аналогично [1] (теорема 18.61), получим

$$|\mathbf{M}_\mu (\xi_0 - \xi_0^{(s)}) (\xi_j - \xi_j^{(s)})| \leqslant A q^{\frac{j}{2}} + B_0 e^{-\varkappa \frac{j}{2}} \leqslant c_1^* e^{-c_1 j}. \tag{3.1}$$

Имея ввиду, что $\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi \mid \mathfrak{M}\}\} = M\xi$ и

$$\mathbf{M}_\mu |(\xi_0 - \xi_0^{(s)}) (\xi_j - \xi_j^{(s)})| \leqslant A q^s, \tag{3.2}$$

последнее получается из условия 6 теоремы и неравенства Гельдера; получим

$$\mathbf{M}_\mu (S_n - S_n^{(s)})^2 \leqslant \frac{1}{\sigma^2 n} \left(n \mathbf{M}_\mu |\xi - \xi_0^{(s)}|^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) M_\mu (\xi - \xi_0^{(s)}) (\xi_j - \xi_j^{(s)}) \leqslant \right.$$

$$\leqslant 2(N+1) q^s + C e^{-c_3 N}.$$

Положив $S = t \ln n$, $N = \frac{t}{c_8} \ln n$, будем иметь

$$\mathbf{M}_\mu |S_n - S_n^{(s)}|^2 \leqslant \frac{c_4}{n^t}, \text{ значит, } \mathbf{M}_m |S_n - S_n^{(s)}|^2 \leqslant \frac{c_4^*}{n^t}.$$

Далее следует неравенство

$$\mathbf{M} |(\xi_0 - \mathbf{M}_\mu \xi_0) (\xi_j - \mathbf{M}_\mu \xi_j) - (\xi_0^{(s)} - \mathbf{M}_\mu \xi_0^{(s)}) (\xi_j^{(s)} - \mathbf{M}_\mu \xi_j^{(s)})| =$$

$$= M |\xi_0 \xi_j - \xi_0^{(s)} \xi_j^{(s)}| \leqslant \min(A q^s, e^{-c_4 j}),$$

из которого получаем

$$|\sigma - \sigma_s| \leqslant \frac{c_6}{n^t},$$

где

$$\sigma_s = \mathbf{M}_\mu |\zeta_0^{(s)}|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M}_\mu (\zeta_0^{(s)} - a) (\zeta_j^{(s)} - a).$$

Из выражения для $\zeta_j^{(s)}$ ([1] стр. 485):

$$\zeta_j^{(s)}=[f]_s^j(t)=\frac{1}{\mu E\begin{pmatrix} j\ldots j+s \\ i_j\ldots i_{j+s}\end{pmatrix}}\int\limits_{E\begin{pmatrix} j\ldots j+s \\ i_j\ldots i_{j+s}\end{pmatrix}} f(t)\,\mu(dt),$$

неравенства $\mu E\left(\frac{j}{s}\right)<\frac{4}{s^2}$ и условия а теоремы убеждаемся, что

$$\mu E\{\eta_j^{(n)}\neq\xi_j^{(s)}\}\leqslant c_7\,\frac{1}{n^p}.$$

Последнее неравенство влечет

$$\mathbf{D}_\mu S_n^n=\sigma_s^2 n+\frac{c_6}{n^{p_1}}$$

Перечисленные оценки дают, как и в первой теореме, оценки для разности характеристических функций ψ_n^n и φ_n (сумм соответственно $\tilde{S}_n^n$ и $\tilde{S}_n$):

$$|\psi_n^{(n)}(\tau)-\varphi_n(\tau)|\leqslant c_8|\tau|\,\frac{\ln n}{n}$$

Теорема завершается дословным повторением рассуждений теоремы 1.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Й. Кубилюсу за указание настоящей задачи и постоянное внимание к работе и проф. В. Статулявичусу за ряд ценных советов.

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
6.VI.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, Москва, 1965.
2. Й. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
3. И. А. Ибрагимов, Одна теорема из метрической теории цепных дробей, Вестник Ленингр. унив., сер. матем., мех. и астр., № 1, 13 (1961).
4. В. А. Статулявичус, Докторская диссертация, Вильнюс, 1967.
5. V. A. Statulevičius, On large deviations, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Ceb., 6, 133–144 (1966).
6. P. Szusz, Über einen Kusminischen Satz, Acta math. Acad. sci. Hung., 12, fasc. 3–4, 1961.
7. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, 1961.
8. М. Лоэв, Теория вероятностей, 1962.
9. W. Doeblin, Remarques sur la théorie metrique des fractions continues, Composition Math., 3, 353, 1940.
10. М. И. Гордин, О случайных процессах, порожденных теоретико-числовыми эндоморфизмами, Докл. АН СССР, сер. матем, физ., 182, № 4, 5, 6 (1968).

LIEKAMOJO NARIO ĮVERTINIMAS RIBINĖSE TEOREMOSE APIE GRANDININIŲ TRUPMENŲ PARAMETRŲ PASISKIRSTYMO KONVERGENCIJĄ

G. MISEVIČIUS

(*Reziumė*)

Skaičiaus $t\in(0,1)$ skleidimą grandinine trupmena žymėsime

$$t=[a_1(t),\,a_2(t)\qquad].$$

T žymime atkarpos (0, 1) atvaizdavimą į save, nusakomą lygybe

$$\mathrm{T}(t)=T[a_1(t),\ a_2(t)\ \ldots\ ]=[a_2(t),\ a_3(t)\ \ldots\ ].$$

Simboliu $E\{\ \ \}$ žymime aibę tų $t\in(0, 1)$, kurie tenkina skliaustuose nurodytas sąlygas.

Darbe įrodyti du teiginiai.

1 **teorema.** *Sakykime, $f(t)$ išmatuojama Lebego prasme funkcija, tenkinanti sąlygas* (3), (4) *ir* (5). *Tuomet egzistuoja konstantos $\sigma>0$, a ir C_1, kurioms galioja* (6) *nelygybė.*

2 **teorema.** *Sakykime, išmatuojama funkcija $f(t)$, $t\in(0, 1)$ tenkina sąlygas* (9) *ir* (10). *Tuomet teisinga priklausomybė*

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C_2\ln^2 n}{\sqrt{n}}.$$

Čia $F_n(x)$ nusakoma (13), *kurioje konstanta a gaunama iš* (12) *lygybės, $\mu(A)$ — Gauso matas.*

THE EVALUATION OF THE REMAINED TERM IN THE LIMIT THEOREM FOR THE FUNCTIONS OF THE ELEMENTS OF THE CONTINUED FRACTION

G. MISEVIČIUS

(*Summary*)

Every number $t\in(0, 1)$ may be represented by a continued fraction

$$t=[0;\ a_1(t),\ \ldots\ ]=[a_1(t),\ a_2(t)\ \ \ ].$$

Let us define in (0, 1) measure-preserving transformation T

$$T\alpha=\left\{\frac{1}{\alpha}\right\}$$

where $\{\alpha\}$ denotes the fractional part of α, or else

$$T[a_1(t),\ a_2(t)]\ \ldots=[a_2(t),\ a_3(t)\ \ldots\ ].$$

The symbol $E\{\ \ \ \}$ signifies the set of numbers $t\in(0, 1)$, for which the brac ed conditions are satisfied.

We prove two statements.

Theorem 1. *Let for a measurable function $f(t)$ the conditions* (3), (4) *and* (5) *are satisfied. Then there are such constants a, $\sigma>0$ and C_1, that*

$$\sup_x\left|mE\left\{\frac{S_n-an}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}-\Phi(x)\right|\leqslant C_1\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}.$$

S_n is given by (2), *B in* (3) *denotes a bounded function, DS_n is a dispersion of the sum S_n* (5*).

Theorem 2. *Let $f(t)$ be a measurable function for which the conditions* (9) *and* (10) *are satisfied. Then*

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C_2\ln^2 n}{\sqrt{n}},$$

where

$$F_n(x)=mE\left\{\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(T^k t)-a}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\},$$

the constant a is given by (12), *$\mu(A)$ is the Gaussian measure.*