X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1970

УДК 519.21

КЛАСС ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ СУММ m-ЗНАЧНЫХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Ф. МИШЕЙКИС

Л. Кубик [1, 2] рассмотрел класс распределений, к которым сходятся суммы соответствующим образом нормированных независимых случайных величин, принимающих лишь два значения. Цель настоящей заметки – обобщить эти результаты на случайные величины, принимающие $m \geqslant 2$ значений.

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2,$ где случайная величина ξ_k $(k=1, 2, \ldots)$ принимает значения a_{ki} $(i=1, 2, \ldots, m)$ с вероятностями $p_{ki} \geqslant 0$, $p_{k1}+ \quad +p_{km}=1$. Для сокращения записи введем обозначения:

$$a_{kl}-a_{ki}=z_k^{(l,\,i)}, \quad (z_k^{(l,\,i)})^2 p_{kl} p_{ki}=M_k^{(l,i)}$$

$$(k=1,\ 2, \qquad 1 \leqslant l < i \leqslant m).$$

Тогда математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ_k можем записать в виде

$$M\xi_k=\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, p_{ki}, \quad D\xi_k=\sum_{1 \leqslant l < i \leqslant m} M_k^{(l,\,i)}.$$

Положим далее

$$M_n=\sum_{k=1}^{n} D\xi_k, \quad \zeta_{nk}=\frac{\xi_k-M\xi_k}{\sqrt{M_n}}, \quad Y_n=\sum_{k=1}^{n}\zeta_{nk}.$$

Обозначим через $\mathfrak{L}$ класс предельных распределений, к которым могут сходиться распределения последовательности случайных величин $Y_1, Y_2,$ при следующих предположениях:

а) $M_n \to \infty$ при $n \to \infty$;

б) $p_{kd} \to p_d$ $(d=1, 2, \qquad m)$ при $k \to \infty$;

в) ξ_k/M_n $(k=1, \qquad n)$ являются бесконечно малыми случайными величинами;

г) для любой положительной неубывающей целозначной функции $k(n) \leqslant n$ существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_{k(n)}^{(l,\,i)}}{\sqrt{M_n}} \qquad (1 \leqslant l < i \leqslant m).$$

Возьмем любые фиксированные числа

$$^{-}\gamma_d \geqslant 0\ (d=2,\ 3,\ \ldots,\ m),\ ^{+}\gamma_d \geqslant 0\ (d=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1),$$

$$A_d \leqslant 0\ (d=2,\ 3,\ \ldots,\ m),\ B_d \geqslant 0\ (d=1,\ 2,\qquad m-1),$$

причем

$$\sum_{d=1}^{m-1} (^{-}\gamma_{d+1} + {}^{+}\gamma_d) = 1,$$

и введем функцию

$$K(u) = \sum_{d=1}^{m-1} \left(^{-}K^{d+1}(u) + {}^{+}K^{d}(u)\right), \tag{1}$$

где

$$^{-}K^{d}(u) = \begin{cases} 0, \text{ если } u \leqslant A_d, \\ ^{-}\gamma_d\left(1 - \frac{u^2}{A_d^2}\right), \text{ если } A_d < u \leqslant 0, \\ ^{-}\gamma_d, \text{ если } u > 0, \end{cases}$$

$$^{+}K^{d}(u) = \begin{cases} 0, \text{ если } u \leqslant 0, \\ ^{+}\gamma_d \frac{u^2}{B_d^2}, \text{ если } 0 \leqslant u < B_d, \\ ^{+}\gamma_d, \text{ если } u \geqslant B_d. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ класс безгранично делимых законов, которые определяются функцией Колмогорова указанного выше типа.

Теперь можем сформулировать доказываемый в этой работе результат.

Теорема. *Классы законов распределения $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{N}$ совпадают.*

Доказательство. 1. Докажем сначала, что $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{N}$.

Положим

$$\frac{a_{kd} - M\xi_k}{\sqrt{M_n}} = (M_n p_{kd})^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=d+1}^{m} \sqrt{M_k^{(d,j)} p_{kj}} - \sum_{j=1}^{d} \sqrt{M_k^{(j,d)} p_{kj}} \right) = b_{nkd}. \tag{2}$$

Не теряя общности, можем считать, что

$$b_{n1d} \leqslant \qquad \leqslant b_{nsd} < 0 \leqslant b_{n,\,s+1,\,d} \leqslant \qquad \leqslant b_{nnd} \tag{3}$$

$$(n=1,\ 2,\qquad d=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

В дальнейшем все выражения, связанные с отрицательными b_{nkd}, будем отмечать символом $(^{-})$, а связанные с неотрицательными b_{nkd} — символом $(^{+})$. Полагая $n-s=t$, можем (3) записать в виде

$$^{-}b_{nsd} \leqslant \qquad \leqslant {}^{-}b_{n1d} < 0 \leqslant {}^{+}b_{n1d} \leqslant \qquad \leqslant {}^{+}b_{ntd}. \tag{4}$$

Пусть

$$b_{nkd}^2 p_{kd} = \omega_{nkd}.$$

Из наших предположений следует существование пределов

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{g=1}^{s} {}^{-}\omega_{ngd} = {}^{-}\gamma_d \geqslant 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{h=1}^{t} {}^{+}\omega_{nhd} = {}^{+}\gamma_d \geqslant 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} {}^{-}b_{nsd} = A_d \leqslant 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} {}^{-}b_{ngd} \quad (1 \leqslant g \leqslant s),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{-}b_{nsd}}{\left(\sum_{g=1}^{s} {}^{-}\omega_{ngd}\right)^{\frac{1}{2}}} = {}^{-}A_d.$$

Последний предел существует в случае ${}^{-}\gamma_d > 0$. В результате имеем

$$-\gamma_d^{1/2}\,{}^{-}A_d = A_d.$$

Аналогично, существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} {}^{+}b_{ntd} = B_d \geqslant 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} {}^{+}b_{nhd} \quad (1 \leqslant h \leqslant t),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{+}b_{ntd}}{\left(\sum_{h=1}^{t} {}^{+}\omega_{nhd}\right)^{\frac{1}{2}}} = {}^{+}B_d.$$

Последний предел существует в случае ${}^{+}\gamma_d > 0$. В результате

$${}^{+}\gamma_d^{1/2}\,{}^{+}B_d = B_d.$$

Сопоставляя (2) и (4), видим, что

$${}^{-}\gamma_1 = 0,\ {}^{+}\gamma_m = 0,\ A_1 = 0,\ B_m = 0.$$

Из равенства

$$\sum_{d=1}^{m-1} \left(\sum_{g=1}^{s} {}^{-}\omega_{n,g\,d+1} + \sum_{h=1}^{t} {}^{+}\omega_{nhd} \right) = 1$$

следует, что

$$\sum_{d=1}^{m-1} ({}^{-}\gamma_{d+1} + {}^{+}\gamma_d) = 1.$$

Используя теорему ([3], § 21), которую удовлетворяют независимые случайные величины $\zeta_{n1}, \ldots, \zeta_{nn}$ $(n=1, 2, \ldots)$, видим, что предельное распределение для последовательности случайных величин Y_1, Y_2, совпадает с предельным распределением безгранично делимых законов, логарифмы характеристических функций которых выражаются формулой

$$\psi_n(t) = \int (e^{itu} - 1) \frac{1}{u^2}\, dK_n(u),$$

где

$$K_n(u) = \sum_{k=1}^{n} K_{nk}(u),$$

$$K_{nk}(u) = \int_{-\infty}^{u} x^2\, dF_{nk}(x),$$

$$(n = 1,\ 2, \qquad k = 1,\ 2, \qquad m),$$

$$F_{nk}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant b_{nkm}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=d}^{m} p_{ki}, \text{ если } b_{nkd} < x \leqslant b_{nk,d-1}, \\ \dots\dots \\ 1, \text{ если } x > b_{nk1}. \end{cases}$$

Обозначив

$$^{-}\sum_{k=1}^{n} K_{nk}^{d}(u) = \begin{cases} 0, \text{ если } u \leqslant {}^{-}b_{nsd}, \\ \sum\limits_{\nu=g}^{s} {}^{-}\omega_{n\nu d}, \text{ если } {}^{-}b_{ngd} < u \leqslant {}^{-}b_{n,g-1,d}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{\nu=1}^{s} {}^{-}\omega_{n\nu d}, \text{ если } u > {}^{-}b_{n1d} \end{cases} \tag{5}$$

$$(d = 2,\ 3, \qquad m-1),$$

$$^{+}\sum_{k=1}^{n} K_{nk}^{d}(u) = \begin{cases} 0, \text{ если } u \leqslant {}^{+}b_{n1d}, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{k} {}^{+}\omega_{n\nu d}, \text{ если } {}^{+}b_{nkd} < u \leqslant {}^{+}b_{n,k+1\,d}, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{t} {}^{+}\omega_{n\nu d}, \text{ если } u > {}^{+}b_{ntd} \end{cases} \tag{6}$$

$$(d = 1,\ 2, \qquad m-1),$$

имеем

$$K_n(u)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{d=1}^{m}K_{nk}^{d}(u)=\sum_{d=1}^{m-1}\left({}^{-}\sum_{k=1}^{n}K_{nk}^{d+1}(u)+{}^{+}\sum_{k=1}^{n}K_{nk}^{d}(u)\right).$$

Перейдем к пределу в равенстве (4). Пусть $g\xrightarrow[n\to\infty]{}\to\infty$(в случае конечного предела из-за условия в получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}{}^{+}b_{ngd}=0).$$

Исследуем случай $A_d<0$. Обозначив

$$\left(\sum_{j=d+1}^{m}\sqrt{M_g^{(d,j)}-p_j}-\sum_{j=1}^{d-1}\sqrt{M_g^{(j,d)}p_j}\right)^2=c_{gd},$$

можем записать

$$p_{gd}=\frac{{}^{-}\alpha_{gd}{}^{-}c_{gd}}{\sum\limits_{\nu=1}^{g}{}^{-}\omega_{n\nu d}M_n}, \tag{7}$$

где

$${}^{-}\alpha_{gd}\xrightarrow[n\to\infty]{}\to\frac{1}{{}^{-}A_d^2}.$$

Из-за

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{{}^{-}A_d^2}\,\frac{{}^{-}p_{gj}}{{}^{-}\alpha_{gd}}=p_j$$

имеем

$$\frac{1}{{}^{-}A_d^2}\,\frac{{}^{-}p_{gj}}{{}^{-}\alpha_{gd}}=p_j+{}^{-}\beta_{gdj},$$

где

$$\lim_{n\to\infty}{}^{-}\beta_{gdj}=0,$$

тем самым

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m}{}^{-}\beta_{gdj}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Тогда

$$\frac{{}^{-}\omega_{ngd}M_n}{{}^{-}A_d^2\,{}^{-}\alpha_{gd}}=\frac{1}{{}^{-}A_d^2\,{}^{-}\alpha_{gd}}\left(\sum_{j=d+1}^{m}\sqrt{M_g^{(d,j)}p_{gj}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{d-1}\sqrt{M_g^{(j,d)}p_{gj}}\right)^2_{(-)}=\left(\sum_{j=d+1}^{m}\sqrt{M_g^{(d,j)}}\sqrt{p_j+\beta_{gdj}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{d-1}\sqrt{M_g^{(j,d)}}\sqrt{p_j+\beta_{gdj}}\right)^2_{(-)}=\left[\left(\sum_{j=d+1}^{m}\sqrt{M_g^{(j,d)}p_j}-\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{d-1}\sqrt{M_g^{(j,d)}p_j}\right)+\left(\sum_{j=d+1}^{m}\sqrt{M_g^{(d,j)}}\,o(\beta_{gdj}^{1/2})-\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j=1}^{d-1}\sqrt{M_g^{(j,d)}}\,o(\beta_{gdj}^{1/2})\right)\right]^2_{(-)}={}^{-}c_{gd}\left(1+o\left(\max_{1\leqslant j\leqslant m}{}^{-}\beta_{gdj}^{1/2}\right)\right). \tag{8}$$

Используя (7) и (8), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{r=1}^{g}{}^{-}\omega_{nrd}-\dfrac{{}^{-}\omega_{ngd}}{{}^{-}A_d^2\,{}^{-}p_{gd}}}{\sum\limits_{r=1}^{s}{}^{-}\omega_{nrd}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{r=1}^{g}{}^{-}\omega_{nrd}\left(1-\dfrac{{}^{-}\omega_{ngd}\,M_n}{{}^{-}A_d^2\,{}^{-}\alpha_{gd}\,{}^{-}c_{gd}}\right)}{\sum\limits_{r=1}^{s}{}^{-}\omega_{nrd}}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{r=1}^{g}{}^{-}\omega_{nrd}\,o\left(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\beta_{gdj}^{1/2}\right)}{\sum\limits_{r=1}^{s}{}^{-}\omega_{nrd}}=0. \tag{9}$$

При помощи (9) в пределе получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=g+1}^{s}{}^{-}\omega_{nrd}={}^{-}\gamma_d\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{r=1}^{g}{}^{-}\omega_{nrd}}{\sum\limits_{r=1}^{s}{}^{-}\omega_{nrd}}\right)=$$

$$={}^{-}\gamma_d\left(1-\frac{1}{{}^{-}A_d^2}\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{-}\omega_{ngd}}{{}^{-}p_{gd}\sum\limits_{r=1}^{s}{}^{-}\omega_{nrd}}\right)=$$

$$={}^{-}\gamma_d\left(1-\frac{1}{{}^{-}A_d^2}\lim_{n\to\infty}\frac{{}^{-}b_{ngd}^2}{\sum\limits_{r=1}^{s}{}^{-}\omega_{nrd}}\right)=$$

$$={}^{-}\gamma_d\left(1-\frac{{}^{-}u^2}{{}^{-}A_d^2}\right)={}^{-}\gamma_d\left(1-\frac{u^2}{A_d^2}\right).$$

Таким образом, в случае $A_d<0$ получаем

$$\lim_{n\to\infty}{}^{-}\sum_{k=1}^{n}K_{nk}^{d}(u)={}^{-}K^{d}(u)=$$

$$=\begin{cases}0, \text{ если } u\leqslant A_d,\\ {}^{-}\gamma_d\left(1-\dfrac{u^2}{A_d^2}\right), \text{ если } A_d<u\leqslant 0,\\ {}^{-}\gamma_d, \text{ если } u>0.\end{cases}$$

В случае $A_d=0$ сразу получаем

$$\bar{K}^d(u)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad u\leqslant 0,\\ \bar{\gamma}_d, & \text{если} \quad u>0.\end{cases}$$

Покажем, что в случае $A_d=-\infty$ предельного распределения из класса безгранично делимых законов не существует.

$$\lim_{n\to\infty}\bar{b}^2_{nsd}=\infty$$

может быть только в случаях

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{b}^2_{nsd}p_{sd}=a>0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{b}^2_{nsd}p_{sd}=0$.

В случае а может быть только сингулярное распределение. Если это не так, то должно быть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_{n+1}}{M_n}=1,$$

но тогда

$$\frac{M_{n+1}}{M_n}=1+\frac{\sum\limits_{d=1}^{m}\Big(\sum\limits_{j=d+1}^{m}\sqrt{M_{n+1}^{(d,j)}p_{n+1,j}}-\sum\limits_{j=1}^{d-1}\sqrt{M_{n+1}^{(j,d)}p_{n+1,j}}\Big)}{M_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1+0,$$

что противоречит а.

В случае б должно быть

$$p_{sd}=o\left(\frac{\Big(\sum\limits_{j=d+1}^{m}\sqrt{M_s^{(d,j)}p_{sj}}-\sum\limits_{j=1}^{d-1}\sqrt{M_s^{(j,d)}p_{sj}}\Big)^2}{M_n}\right).$$

Также должна существовать такая последовательность чисел $g\leqslant n$, $g\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, что

$$\lim_{n\to\infty}\bar{b}_{ngd}=a,$$

но тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{s}\bar{\omega}_{nrd}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\bar{p}_{gd}\sum\limits_{r=g+1}^{s}\Big(\sum\limits_{j=d+1}^{m}\sqrt{M_r^{(d,j)}p_{rj}}-\sum\limits_{j=1}^{d-1}\sqrt{M_r^{(j,d)}p_{rj}}\Big)^2_{(-)}}{\Big(\sum\limits_{j=d+1}^{m}\sqrt{M_g^{(d,j)}p_{gj}}-\sum\limits_{j=1}^{d-1}\sqrt{M_g^{(j,d)}p_{gj}}\Big)^2_{(-)}}\,\bar{b}^2_{ngd}=0\,a^2=0.$$

Из этого следует, что предельное распределение может характеризоваться только функцией

$$\bar{K}^d(u)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad u\leqslant a,\\ \bar{\gamma}_d, & \text{если} \quad u>a,\end{cases}$$

но это противоречит тому, что для всякого безгранично делимого закона функция Колмогорова $K(u)$ непрерывна для $u \neq 0$.

После аналогичных рассуждений для равенства (6), мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} {}^{+}\sum_{k=1}^{n} K_{nk}^{d}(u) = {}^{+}K^{d}(u).$$

Тем самым доказали $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}$.

2. Докажем, что $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{L}$.

Обозначим

$$s_1 = {}^{-}\gamma_2, \quad \ldots, \quad s_{m-1} = {}^{-}\gamma_m, \quad s_m = {}^{+}\gamma_1, \qquad s_{2m-2} = {}^{+}\gamma_{m-1}.$$

Разобьем множество $\mathfrak{D}(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ на непересекающиеся подмножества

$$\mathfrak{D}_1(n) = {}^{-}\mathfrak{D}_2(n), \qquad \mathfrak{D}_{m-1}(n) = {}^{-}\mathfrak{D}_m(n),$$
$$\mathfrak{D}_m(n) = {}^{+}\mathfrak{D}_1(n), \qquad \mathfrak{D}_{2m-2}(n) = {}^{+}\mathfrak{D}_{m-1}(n).$$

Пусть множества $\mathfrak{D}_1(n), \ldots, \mathfrak{D}_v(n)$ уже выделили. Обозначим множество

$$\mathfrak{D}^v(n) = \mathfrak{D}(n) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{v} \mathfrak{D}_i(n) \right),$$

которое проиндексируем в возрастающем порядке

$$l_{v1} < \qquad < l_{vj} < \qquad < l_{vv(n)},$$

где

$$v(n) = n - \sum_{i=1}^{v} \varphi_i(n)$$

и где $\varphi_i(n)$ — число элементов в множестве $\mathfrak{D}_i(n)$. Обозначим

$$s_i^v = \frac{s_i}{1 - \sum_{j=1}^{v} s_j}$$

Пусть s_r^v — первый не равен нулю из последовательности $s_{v+1}^v, \qquad s_{2m-2}^v$. Тогда множества $\mathfrak{D}_{v+1}(n), \ldots, \mathfrak{D}_{r-1}(n)$ берем пустыми. В случае $s_r^v = 1$ берем $\mathfrak{D}_r(n) = \mathfrak{D}^v(n)$, а остальные множества пустыми. Остался случай $0 < s_r^v < 1$. Будем считать, что элемент l_{vj} множества $\mathfrak{D}^v(n)$ есть также элемент k_{ri} множества $\mathfrak{D}_r(n)$, если

$$j = \min_{[j_1 s_r^v] = i} \{j_1\},$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа α, а $\varphi_r(n)$ вычисляется по формуле

$$\varphi_r(n) = [v(n) s_r^v].$$

Заметив, что

$$\sum_{i=1}^{2m-2} \varphi_i(n) = n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_i(n)}{n} = s_i, \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{r\varphi_r(n)}}{n} = 1,$$

получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_i(n)}{k_{r\varphi_r(n)}} = s_i.$$

Сконструируем последовательность m-значных независимых случайных величин с предельной функцией распределения, характеризуемой функцией Колмогорова (1).

Берем не пустое множество

$$^{+}\mathfrak{D}_d(n) = \{ {}^{+}k_{d1}, \qquad {}^{+}k_{di}, \qquad {}^{+}k_{d^{+}\varphi_d(n)} \}$$

и в случае $B_d > 0$ конструируем m-значные независимые случайные величины следующим образом.

Существует такое число i_0, что в случае $i \geqslant i_0$, $B_d^{2+} k_{di} > 1$. Берем

$$z^{(j,\,h)}_{+k_{di}} = \begin{cases} \dfrac{(B_d^2 + {}^{+}k_{di})^{\frac{3}{2}}}{B_d^2 + {}^{+}k_{di} - 1}, & \text{если } i > i_0, \\[2ex] \dfrac{(B_d^2 + {}^{+}k_{di_0})^{\frac{3}{2}}}{B_d^2 + {}^{+}k_{di_0} - 1}, & \text{если } i \leqslant i_0 \end{cases}$$

$$(j = 1,\ 2, \qquad d;\ h = d+1,\ \ldots,\ m),$$

$$p_{+k_{di}^{d}} = \begin{cases} 0, \text{ если } l = 1,\ 2,\ \ldots,\ d-1, \\ \dfrac{1}{B_d^2 + {}^{+}k_{di}}, \text{ если } l = d;\ i > i_0, \\ \dfrac{1}{B_d^2 + {}^{+}k_{di_0}}, \text{ если } l = d;\ i \leqslant i_0, \\ \dfrac{B_d^2 + {}^{+}k_{di} - 1}{(m-d)B_d^2 + {}^{+}k_{di}}, \text{ если } l = d+1, \qquad ,\ m;\ i > i_0, \\ \dfrac{B_d^2 + {}^{+}k_{di_0} - 1}{(m-d)\,B_d^2 + {}^{+}k_{di}}, \text{ если } l = d+1, \qquad m;\ i \leqslant i_0. \end{cases}$$

В случае $B_d = 0$

$$z^{(j,\,h)}_{+k_{di}} = \frac{m}{\sqrt{d\,(m-d)}} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ d;\ h = d+1, \qquad m),$$

$$p_{+k_{di}^{l}} = \frac{1}{m} \qquad (l = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Аналогично, в случае не пустого множества

$$^{-}\mathfrak{D}_d(n) = \{ {}^{-}k_{d1} \qquad {}^{-}k_{di}, \qquad {}^{-}k_{d^{-}\varphi_d(n)} \}, \text{ если } A_d < 0,$$

m-значные независимые случайные величины конструируем следующим образом.

Найдется i_0, такое что в случае $i \geqslant i_0$, $A_d^2 - k_{di} > 1$. Берем

$$z_{-k_{di}}^{(j,h)} = \begin{cases} \dfrac{(A_d^2 - k_{di})^{\frac{3}{2}}}{A_d^2 - k_{di} - 1}, & \text{если } i > i_0, \\[2ex] \dfrac{(A_d^2 - k_{di_0})^{\frac{3}{2}}}{A_d^2 - k_{di_0} - 1}, & \text{если } i \leqslant i_0 \end{cases}$$

$(j = 1, 2, \ldots, d-1;\ h = d, d+1, \ldots, m)$,

$$p_{-k_{di}l} = \begin{cases} \dfrac{A_d^2 - k_{di} - 1}{(d-1) A_d^2 - k_{di}}, & \text{если } l = 1, \ldots, d-1;\ i > i_0, \\[2ex] \dfrac{A_d^2 - k_{di_0} - 1}{(d-1) A_d^2 - k_{di_0}}, & \text{если } l = 1, \ldots, d-1;\ i \leqslant i_0, \\[2ex] \dfrac{1}{A_d^2 - k_{di}}, & \text{если } l = d;\ i > i_0, \\[2ex] \dfrac{1}{A_d^2 - k_{di_0}}, & \text{если } l = d;\ i \leqslant i_0, \\[2ex] 0, & \text{если } l = d+1, \ldots, m. \end{cases}$$

В случае $A_d = 0$

$$z_{-k_{di}}^{(j,h)} = \frac{m}{\sqrt{(d-1)(m-d+1)}}$$

$(j = 1, 2, \quad d-1;\ h = d, \ldots, m)$,

$$p_{-k_{di}l} = \frac{1}{m} \quad (l = 1, 2, \ldots, m).$$

Из того, что

$$\frac{i_0}{B_d^2 + k_{di_0} - 1} + \sum_{i=i_0+1}^{+\varphi_d(n)} \frac{1}{B_d^2 + k_{di} - 1} = O(\ln n)$$

и

$$\frac{i_0}{A_d^2 - k_{di_0} - 1} + \sum_{i=i_0+1}^{-\varphi_d(n)} \frac{1}{A_d^2 - k_{di} - 1} = O(\ln n),$$

получаем

$$M_n = n + O(\ln n).$$

В случае $B_d > 0$ получаем следующую функцию:

$$^{+}K_n^d(u) = \begin{cases} \dfrac{O(\ln n)}{M_n}, & \text{если } O < u \leqslant B_d \sqrt{\dfrac{^{+}k_{di_0}}{M_n}}, \\[2ex] \dfrac{O(\ln n) + i_0}{M_n}, & \text{если } B_d \sqrt{\dfrac{^{+}k_{di_0}}{M_n}} < u \leqslant B_d \sqrt{\dfrac{^{+}k_{d,i_0+1}}{M_n}} \\[2ex] \dfrac{O(\ln n) + h}{M_n}, & \text{если } B_d \sqrt{\dfrac{^{+}k_{dh}}{M_n}} < u \leqslant B_d \sqrt{\dfrac{^{+}k_{d,h+1}}{M_n}} \\[2ex] \dfrac{O(\ln n) + {}^{+}\varphi_d(n)}{M_n}, & \text{если } u > B_d \sqrt{\dfrac{^{+}k_{d + \varphi_d(n)}}{M_n}}, \end{cases}$$

а в случае $B_d=0$ — следующую:

$$
{}^{+}K_n^d(u)=\begin{cases} 0, \text{ если } u\leqslant -\sqrt{\dfrac{d}{(m-d)M_n}}, \\ \dfrac{{}^{+}\varphi_d(n)\,d}{m\,M_n}, \text{ если } -\sqrt{\dfrac{d}{(m-d)M_n}}<u\leqslant\sqrt{\dfrac{m-d}{dM_n}}, \\ \dfrac{{}^{+}\varphi_d(n)}{M_n}, \text{ если } u>\sqrt{\dfrac{m-d}{dM_n}} \end{cases}
$$

Аналогично, в случае $A_d<0$ получаем следующую функцию:

$$
{}^{-}K_n^d(u)=\begin{cases} 0, \text{ если } u\leqslant A_d\sqrt{\dfrac{{}^{-}k_{d,\,{}^{-}\varphi_d(n)}}{M_n}}, \\ \dfrac{{}^{-}\varphi_d(n)-g}{M_n}, \text{ если } A_d\sqrt{\dfrac{{}^{-}k_{d,\,{}^{-}\varphi_d(n)-g}}{M_n}}<u\leqslant A_d\sqrt{\dfrac{{}^{-}k_{d,\,{}^{-}\varphi_d(n)-g-1}}{M_n}} \\ \dfrac{{}^{-}\varphi_d(n)}{M_n}, \text{ если } A_d\sqrt{\dfrac{{}^{-}k_{di_0}}{M_n}}<u\leqslant 0, \\ \dfrac{{}^{-}\varphi_d(n)+O(\ln n)}{M_n}, \text{ если } u\to\infty, \end{cases}
$$

и в случае $A_d=0$ — следующую:

$$
{}^{-}K_n^d(u)=\begin{cases} 0, \text{ если } u\leqslant -\sqrt{\dfrac{d-1}{(m-d-1)M_n}}, \\ \dfrac{{}^{-}\varphi_d(n)(d-1)}{m\,M_n}, \text{ если } -\sqrt{\dfrac{d-1}{(m-d-1)M_n}}<u\leqslant\sqrt{\dfrac{m-d+1}{(d-1)M_n}}, \\ \dfrac{{}^{-}\varphi_d(n)}{M_n}, \text{ если } u>\sqrt{\dfrac{m-d+1}{(d-1)M_n}} \end{cases}
$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}{}^{+}K_n^d(u)={}^{+}K^d(u), \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{-}K_n^d(u)={}^{-}K^d(u). \tag{12}$$

В случае $B_d>0$ из формул (10) следует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{O(\ln n)}{M_n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{O(\ln n)+{}^{+}\varphi_d(n)}{M_n}={}^{+}\gamma_d,$$

$$\lim_{n\to\infty}B_d\sqrt{\frac{k_{d+\varphi_d(n)}}{M_n}}=B_d.$$

Обозначим

$$\lim_{n\to\infty}B_d\sqrt{\frac{{}^{+}k_{dh}}{M_n}}=u.$$

Если $h \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, из (10) следует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h}{{}^{+}k_{dh}} = {}^{+}\gamma_d$$

(в случае $\lim\limits_{n\to\infty} h < \infty$ будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h}{M_n} = 0\Bigg).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{h}{M_n} - \frac{{}^{+}\gamma_d\, {}^{+}k_{dh}}{M_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{h - {}^{+}\gamma_d \frac{{}^{+}k_{dh}}{h} \cdot h}{M_n} = 0.$$

Это значит, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h}{M_n} = {}^{+}\gamma_d \frac{u^2}{B_d^2}$$

Тем самым равенство (11) доказано.

В случае $B_d=0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\sqrt{\frac{d}{(m-d)M_n}}\right) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{m-d}{dM_n}} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{}^{+}\varphi_d(n)}{M_n} = {}^{+}\gamma_d.$$

И равенство (11) тоже следует.

В случаях $A_d<0$ и $A_d=0$ аналогично можем доказать равенство (12). Теорема доказана.

В заключение автор благодарит доктора физико-математических наук профессора Й. П. Кубилюса за полезные замечания и оказанную помощь.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
22.IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Kubik, The limiting distributions of cumulative sums of independent two valued random variables, Studia mathematica, 1958, 18, 295—301.
2. L. Kubik, Remarks to the paper of L. Kubik "The limiting distributions of cumulative sums of independent two valued random variables, Studia mathematica, 1958, 18", Studia mathematica, 1960, 19.
3. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., 1949.

NEPRIKLAUSOMŲ m-REIKŠMIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMŲ RIBINIŲ PASISKIRSTYMŲ KLASĖ

F. MIŠEIKIS

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje nagrinėjami nepriklausomi m-reikšmiai ($m \geqslant 2$) atsitiktiniai dydžiai, tenkiną sąlygas a, б, в, г. Parodoma, kad ribinių pasiskirstymų klasė yra apibūdinama Kolmogorovo (1) funkcija.

THE LIMITING CLASS OF DISTRIBUTIONS CUMULATIVE SUMS FOR INDEPENDENT m-VALUED RANDOM VARIABLES

F. MIŠEIKIS

(*Summary*)

In this paper are considered independent m-valued ($m \geqslant 2$) random variables which satisfy the conditions а, б, в, г. It is shown, that the limiting class of distributions is characterized by the function of Kolmogorov (1).