X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1970

УДК – 511

О ТЕОРЕМЕ МАЛЕРА – СПРИНДЖУКА

Р. СЛЕСОРАЙТЕНЕ

К. Малер в 1932 г. [1] высказал предположение, что при любом $n \geqslant 1$ и любом фиксированном $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0| < h^{-n-\varepsilon}, \tag{1}$$

$h = \max(|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_0|)$, $h \neq 0$, почти для всех вещественных x (в смысле лебеговской меры) имеет лишь конечное число решений в целых a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_0.

В случае $n=1$ это утверждение следует из результатов А. Хинчина [2]. Для полиномов второй степени его доказал И. Кубилюс [3]. Б. Фолькман [4] проверил справедливость предположения Малера для полиномов третьей степени. И, накоцец, В. Спринджук [5], обобщая предыдущие работы, доказал его для любого n. Существует предположение [5], что, разбирая не все полиномы степени n, а только те, у которых $n+1-m$, $(1 \leqslant m \leqslant n+1)$ произвольных коэффициентов отсутствуют, в теореме Малера – Спринджука неравенство (1) можно изменить так:

$$|a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0| < h^{-m+1-\varepsilon}.$$

В случае $m = n+1$ это неравенство совпадает с (1). Следовательно, задачу надо решить для m, удовлетворяющих условию $m \leqslant n$.

В этой заметке мы разберем полиномы не выше третьей степени и докажем следующую теорему*).

Теорема. *Пусть*

$$S(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

полином высоты h:

$$h = \max_{0 \leqslant i \leqslant 3} |a_i|$$

и среди его коэффициентов m $(1 \leqslant m \leqslant 4)$ *произвольных не равны нулю. Тогда для почти всех* x *неравенство*

$$|S(x)| < h^{-m+1-\varepsilon} \tag{2}$$

имеет лишь конечное число решений в полиномах $S(x)$.

Доказательство. Возьмем любое число ρ, $0 < \rho < 1$. Пусть $p > 0$ любое целое фиксированное число, $\rho' = \rho + p$. Обозначим через Ω часть прямой $\Omega = R$ $(\rho \leqslant |x| \leqslant \rho')$.

Множество Ω можем разбить на конечное число интервалов, длины которых равны единице. Доказав теорему для произвольного фиксированного

*) Автор недавно узнала, что доказываемый результат следует из [6]. Однако доказательство, приводимое ниже, отличается от [6].

интервала, мы тем самым докажем ее для всего множества Ω. Устремив $\rho\to 0$, $p\to\infty$, получим утверждение теоремы. Следовательно, достаточно ограничиться числами x из интервала $\Delta=(v, v+1)$, где v вещественное фиксированное число, $v(v+1)>0$.

Для $m=1$ утверждение теоремы тривиально.

Пусть $k\leqslant 3$ степень полинома $S(x)$. $\varkappa_1, \quad \varkappa_k$ — его корни. Если $\omega\in\Delta$,

$$\min|\omega-\varkappa_i|=|\omega-\varkappa_1|,\ 1\leqslant i\leqslant k,$$

то [5] имеет следующие две оценки:

$$|\omega-\varkappa_1|\ll\frac{|S(\omega)|}{|S'(\varkappa_1)|},\tag{3}$$

если $S'(\varkappa_1)\neq 0$;

$$|\omega-\varkappa_1|\leqslant\frac{h^{k-2}|S(\omega)|}{\sqrt{|D(S)|}},\tag{4}$$

если дискриминант $D(S)$ полинома $S(x)$ не равен нулю. Обозначим через σ_S — меру тех $\omega\in\Delta$, для которых справедливо (3). Из (3) и (4) следует, что

$$\sigma_S\ll\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{h^{-m+1-\varepsilon}}{|S'(\varkappa_i)|},\tag{5}$$

$$\sigma_S\ll\frac{h^{k-2}\,h^{-m+1-\varepsilon}}{\sqrt{|D(S)|}},\tag{6}$$

лишь только $S'(\varkappa_i)\neq 0$, $(1\leqslant i\leqslant k)$, $D(S)\neq 0$, соответственно.

Все полиномы $S(x)$ можно разбить на $\binom{4}{m}$ $(1\leqslant m\leqslant 4)$ классов так, чтобы одному классу принадлежали полиномы с m фиксированными неравными нулю коэффициентами.

1. Разберем случай полинома второй степени, т. е. $k=2$, $a_3=0$, $a_2\neq 0$. Как было указано выше, достаточно рассмотреть полиномы $S(x)$ для которых $1<m\leqslant n=2$. Возможны два случая:

а) $S(x)=a_2x^2+a_1x$,

б) $S(x)=a_2x^2+a_0$.

а) При $h>h_0$ почти для всех $x\in\Delta$

$$|S(x)|=|x|\cdot|a_2x+a_1|\geqslant\min(|v|,\ |v+1|)\cdot h^{-1-\varepsilon}\gg h^{-1-\varepsilon}.$$

Следовательно, почти для всех $x\in\Delta$ может существовать лишь конечное число полиномов $S(x)$, решений (2) неравенства.

б) Для $S(x)=a_2x^2+a_0$ дискриминант

$$D(s)=-4a_2a_0.$$

В силу (6)

$$\sum_{\substack{a_2,\,a_0\\ \max(|a_2|,\,|a_0|)=h}}\sigma_S\ll h^{-1-\varepsilon}\sum_{\substack{a_2,\,a_0\\ \max(|a_2|,\,|a_0|)=h}}\frac{1}{\sqrt{|a_2a_0|}}\ll h^{-1-\varepsilon}.$$

Из леммы Бореля—Кантелли следует утверждение теоремы в этом случае.

2. Пусть $S(x)$ — полином третьей степени, т. е. $k=3$, $a_3\neq 0$. Как было указано выше, можем ограничиться $m=2$, 3.

2.1. Если $m=2$, 3, $a_0=0$, то, взяв вместо полинома $S(x)$ полином $S^*(x)=x^3 S\left(\frac{1}{x}\right)$, получим полином не более второй степени. Из справедливости теоремы для $S^*(x)$ следует ее справедливость для $S(x)$.

2.2. Так как

$$D(S)=-27a_3^2a_0^2+18a_3a_2a_1a_0-4a_3a_1^3-4a_2^3a_0+7a_1^2a_2^2, \tag{7}$$

то в случае $k=3$, $m=2$, $a_1=a_2=0$ из (7) имеем:

$$D(S)=-27a_3^2a_0^2.$$

Ввиду (6)

$$\sum_{a_3,\ a_0} \sigma_S \ll h^{-1-\varepsilon}\cdot h\cdot \sum_{\substack{a_3,\ a_0\\ \max(|a_3|,\ |a_0|)=h}} \frac{1}{|a_3 a_0|} \ll h^{-1-\varepsilon}\ln h \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

и опять применима лемма Бореля – Кантелли.

2.3. Пусть $m=3$, $a_2=0$, т. е.

$$S(x)=a_3x^3+a_1x+a_0.$$

а) Обозначим через L – класс тех полиномов $S(x)$, корни которых различные действительные числа.

Ограничимся теми $\omega\in\Delta$, для которых

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 3} |\omega-\varkappa_i|=|\omega-\varkappa_1|, \tag{8}$$

и оценим меру σ'_S тех $\omega\in\Delta$, которые удовлетворяют (2) и (8).

Ввиду (3)

$$\sigma'_S \ll \frac{h^{-m+1-\varepsilon}}{|S'(\varkappa_1)|}\,. \tag{9}$$

Имеем

$$S(\varkappa_1)=a_3(\varkappa_1-\varkappa_2)(\varkappa_1-\varkappa_3).$$

Если существует такая константа $c_1>0$, независящая от h, что

$$|\varkappa_1-\varkappa_2|>c_1,\quad |\varkappa_1-\varkappa_3|>c_1, \tag{10}$$

то

$$|S'(\varkappa_1)|\gg|a_3|. \tag{11}$$

Если $M\subset L$ – класс полиномов, удовлетворяющих (11), то в силу (9)

$$\sum_{\substack{S\in M\\ \|S\|=h}} \sigma'_s \ll h^{-m+1-\varepsilon} \sum_{|a_3|<h} \frac{1}{|a_3|}\cdot h^{m-2}+h^{-m+1-\varepsilon}\cdot\frac{1}{h}\cdot h^{m-1} \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} \tag{12}$$

Остается разобрать полиномы из класса $N=L\setminus M$, т. е. те $S(x)$, для которых $\varkappa_2$ или $\varkappa_3$ как угодно близок к $\varkappa_1$ при достаточно большом h. Из (2) и (8) следует, что $\varkappa_1\in\Delta$ при $h>h_0$. В силу условия $a_2=0$

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3=0 \tag{13}$$

и корень близкий к $\varkappa_1$, может быть только один. Положим для определенности, что таким корнем является $\varkappa_2$ и $\varkappa_1 < \varkappa_2$. (Случай $\varkappa_1 > \varkappa_2$ аналогичен.) При достаточно большом h корень $\varkappa_2$ тоже будет принадлежать Δ, а отсюда ввиду (13)

$$|\varkappa_3| < 2(|v|+1) \ll 1. \tag{14}$$

Обозначим $\delta = \varkappa_2 - \varkappa_1$. Пусть $N_1 \subset N$ класс $S(x)$, удовлетворяющих условию $\delta|a_3| > 1$, $N_2 = N \setminus N_1$.

Пусть $0 < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ —фиксированное число. Разделим все полиномы $S(x) \in N_1$ на классы $N_l^* \left(l = 1, 2, \quad ., 2\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\right] + 2\right)$, где классу N_l^* принадлежат полиномы $S(x)$, удовлетворяющие условию:

$$h^{-l\varepsilon_1} \leqslant \delta < h^{(} \qquad l = 1, 2, \quad , 2\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\right] + 2.$$

В силу определения класса N_1:

$$\bigcup_{l=1}^{2\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\right]+2} N^* = N_1.$$

Исследуем полиномы, принадлежащие классу N_l^*

Пусть $|a_1| \neq \|S\|$. В силу формулы Вьета

$$a_1 = a_3[\varkappa_1\varkappa_2 - (\varkappa_1 + \varkappa_2)^2] = -a_3(\varkappa_1^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2).$$

Так как $\varkappa_2 = \varkappa_1 + \delta$, имеем

$$a_1 = -a_3(3\varkappa_1^2 + 3\varkappa_1\delta + \delta^2). \tag{16}$$

Отсюда следует, что при фиксированных a_3, a_0 коэффициент a_1 может приобрести $\ll h^{(-l+1)\varepsilon_1}|a_3|$ различных значений, если $\delta|a_3| \geqslant 1$, и $\ll 1$ – в противном случае.

Для класса N_l^*, ввиду (9) и того, что $|S'(\varkappa_1)| \asymp \delta|a_3|$, имеем:

$$\sum\nolimits^* \sigma'_S \ll \sum_{\substack{a_3,\ a_0 \\ \max(|a_3|,\ |a_0|)=h}} \frac{h^{-2-\varepsilon} \cdot h^{(-l+1)\varepsilon_1} \ |a_3}{h^{-l\varepsilon_1} \cdot \ a_3|} \ll h^{-1-\varepsilon+\varepsilon_1} \ll h^{-1-}$$

где первая сумма берется по всем полиномам $S(x)$, удовлетворяющим условиям: $S \in N_l^*$, $\|S\| = h \neq |a_1|$.

Отсюда, в силу того, что число классов N_l^*, конечно, не зависит от h:

$$\sum\nolimits^{**} \sigma'_S \ll h \tag{17}$$

где сумма берется по всем полиномам $S(x) \in N_1$, $\|S\| = h \neq |a_1|$.

Если $|a_1| = \|S\|$, то из равенства

$$a_0 = a_3\varkappa_1(\varkappa_1 + \delta)(2\varkappa_1 + \delta) \tag{18}$$

можно получить аналогичную, как и для a_1, оценку числа различных значений, преобрести которые может a_0 при фиксированных a_3, a_1. В случае $S(x) \in N_1$, аналогично (17), получаем:

$$\sum\nolimits' \sigma'_S \ll h$$

где суммирование производится по всем полиномам $S(x) \in N_1$, для которых $\| S \| = h = | a_1 |$.

Из (17) и последней оценки следует

$$\sum_{\| S \| = h,\ S \in N_1} \sigma'_S \ll h \tag{19}$$

Разберем класс N_2. $\varkappa_1 \in \Delta$ при $h > h_0$. Отсюда, ввиду (16), (18) и определения класса N_2:

$$3 | a_3 | v^2 \leqslant | a_1 | \leqslant 3 | a_3 | \cdot (v+1)^2 + 4 (v+1),$$

$$2 | a_3 | v^2 \leqslant | a_0 | \leqslant 2 | a_3 | \ (v+1)^2 + 4 (v+1),$$

если $v > 0$. (Если $v < 0$, нетрудно написать аналогичные неравенства.) Так как v — фиксированное число, независящее от h, то из последних неравенств следует, что:

$$| a_3 | \asymp | a_1 |, \quad | a_0 | \asymp | a_3 |.$$

Одно из чисел $| a_3 |$, $| a_1 |$, $| a_0 |$ равно h. Следовательно,

$$| a_1 | \asymp | a_3 | \asymp | a_0 | \asymp h. \tag{21}$$

В силу (16)

$$\sum_{\substack{S \in N_2 \\ \| S \| = h}} \sigma'_S \ll h^{-2-\varepsilon} \sum_{\substack{S \in N_2, \\ \| S \| = h}} \sqrt{| 27 a_3^2 a_0^2 + 4 a_3 a_1^3 |} \ll$$

$$\ll h^{-2-\varepsilon} \sum_{\substack{S \in N_2 \\ \| S \| = h}} \frac{\sqrt{| a_3 |}}{\sqrt{| D_1 (S) |}} \tag{22}$$

где $D_1(S) = 27 a_3 a_0^2 + 4 a_1^3$. Ввиду (16) и (18), a_1 или a_0 может приобрести $\ll 1$ различных значений при фиксированном одном коэффициенте полинома $S(x)$. Например, a_0 может приобрести $\ll 1$ различных значений, если $| a_1 | = h$, a_3 — фиксирован. Следовательно, существует $\ll h$ различных полиномов $S(x) \in N_2$ высоты h.

Если $O_1 \subset N_2$ множество тех $S(x)$, для которых $| D_1 (S) | \geqslant h$, то ввиду (22)

$$\sum_{\substack{S \in O_1 \\ \| S \| = h}} \sigma'_S \ll h^{-2-\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}} \ h \ll h^{-1-\varepsilon}. \tag{23}$$

Пусть $P_1 \subset N_2 \setminus O_1$ класс тех полиномов $S(x)$, для которых $| a_1 | = h$. Уравнение

$$27 a_3 a_0^2 + 4 a_1^3 = u, \tag{24}$$

где $| u | \leqslant h$ — целое число, может приобрести $\ll h^{\frac{\varepsilon}{8}}$ различных систем $\{a_3, a_0\}$ решений при фиксированном u. Отсюда в силу (22)

$$\sum_{\substack{S \in P_1 \\ \| S \| = h}} \sigma'_S \ll h^{-2-\varepsilon} \cdot \sum_{| u | \leqslant h} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{| u |}} \ h^{\frac{\varepsilon}{8}} \ll h \tag{25}$$

Если $L \setminus P_2 = M + N_1 + O_1 + P_1$, то ввиду (12), (19), (23), (25):

$$\sum_{\substack{S \in L \setminus P_2, \\ \|S\| = h}} \sigma'_S \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

Если

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant 3} |\omega - \varkappa_i| = |\omega - \varkappa_l|, \tag{26}$$

где $l = 2$ или 3, то для меры тех $\omega \in \Delta$, которые удовлетворяют (2) и (26), справедливы рассуждения, аналогичные рассуждениям для σ'_S. Отсюда

$$\sum_{\substack{S \in L / P_2^* \\ \|S\| = h}} \sigma_S \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

где $P_2^* \subset L$ — класс полиномов $S(x)$, удовлетворяющих условиям $\delta^* |a_3| < 1$, $|a_1| < \|S\|$,

$$|D_1(S)| < \|S\|, \text{ где } \delta^* = \min_{\substack{i \neq j, \\ 1 \leqslant i, j \leqslant 3}} |\varkappa_i - \varkappa_j|.$$

Из леммы Бореля—Кантелли следует, что для почти всех $x \in \Delta$ (2) имеет лишь конечное число решений в полиномах $S(x) \in L \setminus P_2^*$.

Разобьем множество P_2^* на классы R_α, где классу R_α принадлежат полиномы, удовлетворяющие условию $|a_1| = \alpha$. Одному классу R_α могут принадлежать полиномы $S(x)$ различной высоты. Из (21) следует, что

$$c_2\alpha \leqslant |a_3| \leqslant c_3\alpha, \quad c_2\alpha \leqslant |a_0| \leqslant c_3\alpha, \tag{27}$$

где константы $c_i > 0$ $(i = 2,\ 3)$ не зависят ни от α, ни от высоты полинома $\|S\|$. Ввиду (27) и определения класса P_2^*:

$$c_2\alpha \leqslant \|S\| \leqslant c_3\alpha, \quad |D_1(S)| \leqslant c_3\alpha. \tag{28}$$

А отсюда следует, что для каждых фиксированных α и u уравнение (24) имеет $\ll \alpha^{\frac{\varepsilon}{8}}$ различных решений в системах (a_3, a_0).

В силу (6) и (28)

$$\sum_{S \in R_\alpha} \sigma_S \ll \sum_{|u| < c_3\alpha} \frac{\sqrt{\|S\|}}{\sqrt{|u|}} \cdot \alpha^{\frac{\varepsilon}{8}} \cdot \|S\|^{-2-\varepsilon} \ll$$

$$\ll \sum_{|u| < c_3\alpha} \frac{\sqrt{c_3\alpha}}{\sqrt{|u|}} \cdot \alpha^{\frac{\varepsilon}{8}} \cdot (c_3\alpha)^{-2-\varepsilon} \ll \alpha$$

Так как

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} < \infty,$$

то, применив лемму Бореля—Кантелли, можно утверждать, что для почти всех $\omega \in \Delta$ решения неравенства (2) принадлежат только конечному числу множеств R_α. Если α конечно, то число полиномов $S(x) \in R_\alpha$ тоже конечно. Отсюда следует утверждение теоремы для класса P_2^*, а ввиду предыдущего и для всего класса L.

б) Пусть $S(x)$ имеет пару комплексных сопряженных корней. Разберем сначала те $\omega\in\Delta$, для которых справедливо (12) и (8). Если $\varkappa_1$ — действительный корень полинома, то $\varkappa_1\in\Delta$ при достаточно большом h, а в силу (13)

$$|\varkappa_1-\varkappa_2|>\min(|v|,\ |v+1|)\ |\varkappa_1-\varkappa_3|=|\varkappa_1-\bar{\varkappa}_2|>\min(|v|,\ (v+1|).$$

Отсюда следует, что справедливо (11), и оценка аналогична (12):

$$\sum_{\substack{D(S)<0\\ \|S\|=h,\ \varkappa_1>0}} \sigma'_S \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} \tag{29}$$

Пусть $\varkappa_1=\xi_1+i\eta_1$, $\varkappa_2=\bar{\varkappa}_1$, $\varkappa_3=\xi_3>0$, $\eta_1>0$, т. е. $\varkappa_1$ — комплексный корень полинома $S(x)$.

В силу (2), (8) и того, что

$$|\omega-\varkappa_1|=\sqrt{(\omega-\xi_1)^2+\eta_1^2}, \tag{30}$$

при достаточно большом h число $\xi_1\in\Delta$. Кроме того из (13) следует, что ξ_3 имеет противоположный знак и

$$2\min(|v|,\ |v+1|)\leqslant|\xi_3|<2(|v|+1)\ll 1.$$

В силу формул

$$a_1=a_3(\eta_1^2-3\xi_1^2),$$
$$a_0=2a_3\xi_1(\xi_1^2+\eta_1^2),$$
$$|S'(\varkappa_1)|\asymp|a_3|\eta_1\geqslant|a_3|\eta_1^2,\ \eta_1<1,$$

применимы рассуждения, аналогичные классу L, с η_1^2 вместо δ.

Следовательно, теорема справедлива и для этого случая.

Из (29) и последнего утверждения получаем, что (2) имеет лишь конечное число решений в полиномах $S(x)$, для которых $D(S)<0$.

в) В случае $D(S)=0$ все корни полинома $S(x)$ — рациональные числа, и полином $S(x)$ приводим в поле рациональных чисел, а, следовательно, и в кольце целых чисел

$$S(x)=(d_1x+b_1)(d_2x+b_2)(d_3x+b_3),$$

где все d_i, b_i $(1\leqslant i\leqslant 3)$ — целые числа, $h_1=\max(|d_1|,\ |b_1|)$, $h_2=\max(|d_2|,\ |b_2|)$, $h_3=\max(|d_3|,\ |b_3|)$.

В силу соотношения

$$h_1h_2h_3\ll h$$

[5] имеем:

$$|S(x)|\gg h_1^{-1-\varepsilon}\cdot h_2^{-1-\varepsilon}\cdot h_3^{-1-\varepsilon}\gg h^{-1-\varepsilon}$$

при $h>h_0$.

Отсюда следует, что (2) имеет лишь конечное число решений в $S(x)$, удовлетворяющих условию $D(S)=0$.

Утверждение теоремы доказано.

2.4. И, наконец, если

$$S(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_0,$$

взяв вместо $S(x)$ полином

$$S^*(x) = x^3 S\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 x^3 + a_2 x + a_3,$$

мы переходим к случаю 2.3.

Теорема доказана полностью.

Выражаю сердечную благодарность профессору И. Кубилюсу внимание и интерес к работе.

Каунасский Политехнический институт

Поступило в редакцию
25.VIII.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Mahler, Über das Maß der Menge aller S-Zahlen, Math. Ann., 106 (1932), 131–139.
2. A. Khintchine, Zur Metrischen Teorie der Diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr., 24 (1926), 704–714.
3. И. Кубилюс, О применении метода акад. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел, ДАН СССР, 67 (1949), 783–786.
4. B. Volkmann, Zum kubischen Fall der Mahlerschen Vermutung, Math. Ann., 139 (1959), 87–90.
5. В. Г Спринджук, Проблема Малера в метрической теории чисел, Изд. „Наука и техника'', Минск, 1967
6. W. Schmidt, Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Großen, Monatsh. für Math., **68**, № 2, 1964, 154–166.

APIE MALERIO–SPRINDŽIUKO TEOREMĄ

R. SLIESORAITIENĖ

(*Reziumė*)

Malerio–Sprindžiuko teoremą galime suformuluoti šitaip. Sakykime, $n \geqslant 1$ – bet koks sveikas skaičius ir $\varepsilon > 0$ – bet koks fiksuotas skaičius. Beveik visiems realiems x nelygybė

$$|a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0| < h^{-n-\varepsilon}, \tag{1}$$

kur $h = \max(|a_n|, |a_{n-1}| \ldots |a_0|)$, $h \neq 0$, turi tik baigtinį sprendinių skaičių sveikais $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$.

Spėjama, kad, imant tik tuos n-tojo laipsnio polinomus, kurie turi m $(1 \leqslant m \leqslant n+1)$ nenulinių koeficientų, vietoj (1) nelygybės galime rašyti šitokią:

$$|a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0| < h^{-m+1-\varepsilon}$$

Straipsnelyje šis spėjimas įrodomas ne aukštesnio kaip trečio laipsnio polinomams.

ON MAHLER–SPRINDZUK'S THEOREM

R. SLIESORAITIENĖ

(*Summary*)

The main part of the note takes the proof of the following theorem.

Let $\varepsilon > 0$ be any fixed number. For almost all the real x the inequality

$$|a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0| < h^{-m+1-\varepsilon}$$

has only the finite number of solutions in integers a_i $(0 \leqslant i \leqslant 3)$. Here $h = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 4} |a_i|$, m is the number of non-zero coefficients among a_i $(0 \leqslant i \leqslant 3)$.