X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК–511

# О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОБРАЗУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ В СВОБОДНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОЛУГРУППАХ. I

Д. ЦИБУЛЬСКИТЕ

## Введение

Первое элементарное доказательство теоремы о простых числах в натуральном ряду получили П. Эрдеш, и А. Сельберг в 1949 г. Теперь известны более общие теоремы, доказанные этим методом:

теорема о простых числах для арифметических прогрессий [1], [2];

теорема о числе простых элементов абелевой группы $W$, принадлежащих подгруппе $W'$ такой, что факторгруппа $W/W'$ является конечной абелевой группой [3], [4], [5];

теорема о простых идеалах фиксированного алгебраического числового поля [6], [7];

теорема о распределении образующих элементов в свободных числовых полугруппах со степенными $\Theta$-плотностями [8].

В этой работе будет рассмотрена задача уточнения асимптотического соотношения, полученного Б. Бредихиным [8]. Следуя Бредихину, примем следующие определения и обозначения.

Пусть $G$ – мультипликативно записанная свободная коммутативная полугруппа со счетной системой $P$ образующих элементов. Наличие образующих элементов в полугруппе $G$ означает, что каждый элемент $\alpha\in G$ однозначно записывается в форме $\alpha=\omega_1^{x_1}\omega_2^{x_2}$ где $\omega_i\in P$ и $x_i$ – целые неотрицательные числа, причем только конечное число $x_i\neq 0$. Пусть, далее, $N$ – гомоморфизм $G$ на мультипликативную числовую полугруппу $\overline{G}$; образ $N\alpha$ – норма элемента $\alpha\in G$. Если $\alpha\beta\in G$, то $N\alpha\beta=N\alpha N\beta$. Кроме того, будем считать, что гомоморфизм $N$ обладает еще следующим свойством: в полугруппе $G$ имеется конечное число элементов $\alpha$ с $N\alpha\leqslant x$. Элементы полугруппы $G$ упорядочиваются по их возрастающим нормам. Суммирования, с которыми мы будем встречаться в дальнейшем, будут вестись по всем элементам $\alpha\in G$ (или по всем образующим элементам $\omega\in P$), нормы которых принадлежат заданному интервалу.

Если в свободной полугруппе $G$ каждый элемент $\alpha$ заменить его образом $N\alpha$, то мы получим мультипликативную полугруппу вещественных чисел, элементы которой могут повторяться. Полученную таким образом полугруппу назовем свободной числовой полугруппой.

Пусть

$$B(x)=\sum_{\substack{N\alpha\leqslant x\\ \alpha\in G}}1,\qquad \pi(x)=\sum_{\substack{N\omega\leqslant x\\ \omega\in P}}1.$$

Если существует

$$\lim_{x\to\infty} \frac{B(x)}{x^{\Theta}} = C,$$

где $\Theta > 0$, $C > 0$, то $C$ будем называть степенной $\Theta$-плотностью полугруппы $G$.

Пусть, далее, степенная $\Theta$-плотность свободной полугруппы $G$ существует и равна константе $C > 0$ и

$$B(x) = Cx^{\Theta} + O(x^{\Theta_1}) \tag{1.1}$$

для $\Theta_1 < \Theta$.

На полугруппе $G$ определяются:
функция Мёбиуса

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha = (1), \\ (-1)^k, \text{ если } \alpha = \omega_1 \omega_2 \qquad \omega_k, \\ 0, \text{ если } \omega_i^2 \backslash \alpha, \end{cases} \tag{1.2}$$

где (1) означает элемент, норма которого равна 1; функция Мангольдта

$$\Lambda(\alpha) = \begin{cases} \ln N\alpha, \text{ если } \alpha = \omega^x (x > 0), \\ 0, \text{ если } \alpha \neq \omega^x, \end{cases} \tag{1.3}$$

функции Чебышева

$$\psi(x) = \sum_{N\alpha \leqslant x} \Lambda(\alpha) \quad \text{и} \quad \vartheta(x) = \sum_{N\omega \leqslant x} \ln N\omega. \tag{1.4}$$

Пусть

$$R(x) = \psi(x) - \frac{1}{\Theta} x^{\Theta}. \tag{1.5}$$

Рассматриваемая задача эквивалентна задаче об элементарной оценке остатка $R(x)$ в (1.5). Следуя работе П. Куна [9] элементарным методом, недавно получена теорема о простых идеалах с остаточным членом $O((\ln x)^{-c})$ для некоторых $c > 0$ [7]. В этой работе элементарным методом доказывается теорема.

**Теорема*)**.

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{u^{\Theta-1}\,du}{\ln u} + O\left(\frac{x^{\Theta}}{\ln^m x}\right) \tag{1.6}$$

*для любого фиксированного* $m > 0$.

При доказательстве этой теоремы широко используется интегральное исчисление (интегралы относятся только к конечным интервалам). В конце вводятся некоторые упрощения по методу Райта [13]. Формально усложняя доказательства, возможно свести интегралы к конечным суммам арифметических функций. Это не полностью элементарный метод, но допускающий переход к нему. В доказательстве интересен используемый метод, и большая часть работы, следуя идеям Амитсура [10], [11] и Бомбьери [12], посвящается его изучению.

---

*) Замечание при корректуре: настоящая статья уже печаталась, когда автору стало известно, что методом Э. Вирзинга для полугрупп с $\delta$-регулярными функциями X. Вегманом доказана аналогичная теорема. См. „H. Wegmann, Beiträge zur Zahlentheorie auf freien Halbgruppen, I, II, J. reine und angew Math., 1966, 221, 20—43, 150—159".

## Изучение классов арифметических функций

**2.1. Преобразования $S_h$ и $I_h$.**

Пусть $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, — элементы полугруппы $G$, определенной в прошлом параграфе. Арифметической функцией будем называть функцию, определенную для любого элемента полугруппы. Значения функции могут быть как вещественные, так и комплексные.

Функция $h(\alpha)$, определенная для всех элементов $\alpha\in G$, называется вполне мультипликативной, если $h(\alpha\beta)=h(\alpha)h(\beta)$ для любых двух элементов $\alpha$, $\beta\in G$.

Функция $h(\alpha)$, определенная для всех элементов $\alpha\in G$, называется вполне аддитивной, если $h(\alpha\beta)=h(\alpha)+h(\beta)$ для любых двух элементов $\alpha$, $\beta\in G$.

Через $\mathfrak{A}$ обозначим множество всех арифметических функций, принимающих неотрицательные значения. Пусть в $\mathfrak{A}$ определены две операции:

1) сумма $f+g$;

2) произведение Дирихле $f*g=\sum\limits_{\alpha\beta=\gamma} f(\alpha)\,g(\beta)$.

Определим еще функцию

$$e=e(\alpha)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad \alpha=(1), \\ 0, & \text{если} \quad \alpha\neq(1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Функцию $g$ будем называть обратной к функции $f$, если $f*g=e$. Нетрудно видеть, что обратимы те и только те функции, для которых $f((1))\neq 0$.

К двум указанным выше операциям можно добавить третью — произведение функций в обычном смысле.

Пусть $\mathfrak{M}$ — линейное пространство всех комплексных (или вещественных) функций, определенных для всех $x\geqslant 1$ и ограниченных на каждом конечном интервале.

Следуя Амитсуру [10], [11], каждой функции $h\in\mathfrak{A}$ поставим в соответствие линейные преобразования:

$$S_h\Phi(x)=\sum_{N\alpha\leqslant x} h(\alpha)\,\Phi\left(\frac{x}{N\alpha}\right) \tag{2.2}$$

$$I_h\Phi(x)=\sum_{N\alpha\leqslant x} \frac{h(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}\,\Phi\left(\frac{x}{N\alpha}\right),\quad \Phi\in\mathfrak{M}. \tag{2.3}$$

**Теорема 2.1.** *Пусть $g$, $h$, $k\in\mathfrak{A}$, $\Phi\in\mathfrak{M}$. Тогда:*

1) $S_{g+h}=S_g+S_h$;

2) $S_g=S_h$

*тогда и только тогда, если $g(\alpha)\equiv h(\alpha)$ для всех $\alpha\in G$;*

3) $S_{cg}=cS_g$, *$c$ — любая постоянная;*

4) $S_k=S_{g*h}=S_gS_h$;

5) $S_e\Phi=\Phi$,

*если $g*h=e$, то $S_h=S_g^{-1}$;*

6) *если $g\in\mathfrak{A}$ — вполне мультипликативна, то*

$$S_{(h*k)g}=S_{hg*kg}=S_{hg}S_{kg};$$

7) *пусть* $x \geqslant 1$, $N\alpha \geqslant 1$, $x/N\alpha \geqslant 1$; *если* $g \in \mathfrak{A}$ *— вполне аддитивна* ($g(x/N\alpha) = g(x) - g(\alpha)$), *то*

$$S_{hg} = gS_h - S_h g \quad \text{и} \quad S_{(h*k)g} = S_{hg*k} + S_{h*kg}.$$

Доказательство следует из определений преобразований $S_h$, произведения Дирихле, функции $e = e(\alpha)$ и равенств, которыми характеризуются вполне мультипликативные и вполне аддитивные функции.

**Замечание 2.1.** Из 1–5 следует, что множество $\mathfrak{A}$ по отношению к вышевведенным операциям образует кольцо, изоморфное кольцу всех преобразований $S_g$, $g \in \mathfrak{A}$.

**Замечание 2.2.** Из 6 следует, что преобразование $h \to hg$, где $h$, $g \in \mathfrak{A}$ и $g$ — вполне мультипликативна, есть изоморфизм кольца $\mathfrak{A}$ на себя.

**Замечание 2.3.** Преобразование $h \to hg$, где $h$, $g \in \mathfrak{A}$ и $g$ — вполне аддитивна, обладает формальными свойствами производной на кольце $\mathfrak{A}$.

В тех случаях, которые нас интересуют, аддитивная функция есть логарифм. Свойство 7 из теоремы 2.1 запишем в другом виде:

$$S_{hL}\Phi(x) = LS_h\Phi(x) - S_h L\Phi(x), \tag{2.4}$$

где $L$ имеет три различных значения:

1) в $S_{hL}$ — арифметической функции $\ln N\alpha$;
2) в $LS_h$ — функции $\ln x$;
3) в $S_h L$ — функции $\ln x$, являющейся коэффициентом $\Phi$.

В формальном исчислении во всех случаях будем использовать один и тот же символ $L$.

Соответствие $S_h \to S_{hL}$ есть дифференцирование. Будем обозначать его через $(S_h)_L$. По теореме 2.1, 7 имеем, что

$$(S_h S_g)_L = S_{hL} S_g + S_h S_{gL}. \tag{2.5}$$

**Теорема 2.2.** *Пусть* $h \in \mathfrak{A}$, $L$ *— определено выше. Справедливы следующие соотношения:*

$$\text{I. } L^n S_h = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} S_{hL^m} L^{n-m};$$

$$\text{II. } S_h L^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} L^{n-m} S_{hL^m};$$

$$\text{III. } S_{hL^n} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} L^{n-m} S_h L^m.$$

Доказательство следует по индукции из (2.4).

**Теорема 2.3.** *Пусть* $f \in \mathfrak{A}$ *— обратимая функция,* $g$ *— ее обратная и* $fL*g = h$. *Тогда существует такой многочлен* $P_n$ *от* $n$ *переменных, что*

1) $S_{fL^n*g} = P_n(S_h, S_{hL}, \quad S_{hL^{n-1}})$;
2) $S_{f*gL^n} = P_n(-S_h, -S_{hL}, \quad -S_{hL^{n-1}})$;
3) *все коэффициенты* $P_n$ *положительны.*

Доказательство. Очевидно, что

$$(S_f S_g)_L = 0,$$

$$S_{gL} S_f = -S_h, \tag{2.6}$$

$$S_{gL} = -S_h S_g. \tag{2.7}$$

Из соотношения

$$S_{fL*g} = S_h$$

и (2.6) следует справедливость теоремы для $n=1$. По индукции получаем, что

$$S_{fL^n*g} = S_{fL^{n-1}*g} S_h + (S_{fL^{n-1}*g})_L,$$

где

$$(S_{fL^{n-1}*g})_L \text{ --}$$

многочлен с положительными коэффициентами от переменных $S_{hL}$, $S_{hL^{n-1}}$. 1 доказано полностью.

Для доказательства 2 достаточно заменить в предыдущем вычислении $f$ на $g$ и вместо $S_h$, в силу (2.6), поставить $(-S_h)$. Из доказательства теоремы следует, что многочлен $P_n$ определяется индуктивно по формулам:

$$S_{fL^n*g} = P_n(S_h, \qquad S_{hL^{n-1}}) = S_h P_{n-1} + (P_{n-1})_L \tag{2.8}$$

$$S_{f*gL^m} = P_m(-S_h, \qquad -S_{hL^{m-1}}) = -S_h P_{m-1} + (P_{m-1})_L. \tag{2.8'}$$

**Замечание 2.4.** Преобразование $h(\alpha) \to h(\alpha)(N\alpha)^{-\Theta}$ есть изоморфизм кольца $\mathfrak{A}$ в себя (функция $(N\alpha)^{-\Theta}$ – вполне мультипликативна). Значит, установленные свойства для $S_h$ справедливы и для сумм $I_h$, определенных в (2.3).

### 2.2. Приближение с помощью операторов

Преобразования $S_h$, $h \in \mathfrak{A}$ можно приближать операторами более простого типа, когда $\Phi = \Phi(x)$ есть многочлен от функции $L = \ln x$. С этой целью мы введем, следуя Амитсуру, множество $\mathfrak{R}$ всех многочленов $P(L)$ от функции $\ln x$, т. е.

$$P(L) = \sum_{m=0}^{n} c_m L^m.$$

Пусть $D = d/dL$ – оператор дифференцирования, определяемый соотношением:

$$D\left(\sum_{m=0}^{n} c_m L^m\right) = \sum_{m=1}^{n} m c_m L^{m-1}.$$

Пусть, далее, $D^{-1}$ – такой оператор, что

$$D^{-1}\left(\sum_{m=0}^{n} c_m L^m\right) = \sum_{m=0}^{n} \frac{c_m}{m+1} L^{m+1}.$$

Заметим, что $(DD^{-1})\,\Phi=\Phi$ для каждой функции $\Phi\in\mathfrak{N}$, однако $(D^{-1}D)\,\Phi=\Phi$ в том и только в том случае, если $\Phi\in\mathfrak{N}$ не содержит члена с $L^0$.

И, наконец, пусть $H(D)$ – оператор, представимый рядом Лорана по $D$, содержащим лишь конечное число членов с отрицательным показателем:

$$H(D)=\sum_{m=-p}^{\infty} a_m D^m. \tag{2.9}$$

Применяя $H(D)$ к элементу из $\mathfrak{N}$, получим опять элемент из $\mathfrak{N}$, хотя $H(D)$ и определяется бесконечным рядом.

Формальная производная по отношению к $D$ в пространстве всех операторов $H(D)$ определяется следующим образом:

$$(D^m)'=mD^{m-1}$$

и

$$H'(D)=[H(D)]'=\sum_{m=-p}^{\infty} m a_m D^{m-1}.$$

Для операторов $H(D)$ верно равенство

$$LH(D)-H(D)L=-H'(D). \tag{2.10}$$

Применяя левую сторону (2.10) к $L^m$ при $m-n\geqslant 0$, $n>0$, получаем:

$$(LD^n-D^nL)L^m=LD^nL^m-D^nL^{m+1}=-nD^{n-1}L^m=-(D^n)'L^m.$$

Если $n<0$, имеем такое же самое соотношение. Тем справедливость (2.10) доказана, имея в виду, что члены (2.10) применяются к общему элементу множества $\mathfrak{N}$.

Сравнивая соотношения (2.10) и (2.4) , замечаем аналогию преобразований $S_h$ с операторами $H(D)$.

Заметим, еще, что произведение операторов не всегда совпадает с формальным произведением рядов, представляющих эти операторы. Однако, позже будет доказано, что этот факт неважен для тех случаев, которые будут встречаться в дальнейшем.

**Определение.** *Оператор $H(D)$, представленный в виде* (2.9), *приближает $I_h$ с точностью до функции $\mu_n=\mu_n(x)$, если для $\Phi\in\mathfrak{N}$ и степени $n$ верно равенство*:

$$I_h\Phi=H(D)\,\Phi+O(\mu_n). \tag{2.11}$$

*Константа в $O(\ldots)$ зависит и от многочлена $\Phi$.*

### 2.3. Основная теорема о приближении сумм $I_h$

Пусть

$$F(D)=\sum_{m=-p}^{\infty} a_m D^m,\quad H(D)=\sum_{m=-q}^{\infty} b_m D^m,$$

$$R_n^f(x)=I_fL^n-F(D)L^n=\sum_{N\alpha\leqslant x}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}\ln^n\frac{x}{(N\alpha)}-\sum_{i=-p}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}a_i\ln^{n-i}x, \quad (а)$$

$$R_n^h(x)=I_hL^n-H(D)L^n=\sum_{N\alpha\leqslant x}\frac{h(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}\ln^n\frac{x}{N\alpha}-\sum_{i=-q}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}b_i\ln^{n-i}x, \quad (б)$$

$$R_n^{fh}(x)=I_f I_h L^n-[F(D)\,H(D)]\,L^n=R_n(x,f*h,\ FH),\tag{в}$$

$$I_f\Phi=F(D)\,\Phi+O(\lambda_n),\quad I_h\Phi=H(D)\,\Phi+O(\mu_n),\quad \Phi\in\mathfrak{N}.$$

**Теорема 2.4.** *Для вышеопределенных преобразований $I_f$ и $I_h$ справедливы следующие утверждения:*

1) $I_{cf}\Phi=cF(D)\,\Phi+O(\lambda_n)$, *c — любая константа*; (2.12)

2) $I_{f+h}\Phi=[F(D)+H(D)]\,\Phi+O(\lambda_n+\mu_n)$; (2.13)

3) $I_{fL}\Phi=-F'(D)\,\Phi+O(\lambda_n L+\lambda_{n+1})$; (2.14)

4) *если* $1\leqslant y\leqslant x$, *то*

$$R_n^{fh}(x)=\sum_{N\alpha\leqslant y}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}R_n^h\left(\frac{x}{N\alpha}\right)+\sum_{N\alpha\leqslant\frac{x}{y}}\frac{h(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}R_n^f\left(\frac{x}{N\alpha}\right)-$$

$$-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}R_{n-j}^h\left(\frac{x}{y}\right)R_j^f(y)+$$

$$+\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{i}\frac{n!}{(i-j)!\,(n+j)!}\,b_{-i}\,R_{n+j}^f(y)\ln^{i-j}\frac{x}{y}+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{i}\frac{n!}{(i-j)!\,(n+j)}\,a_{-i}\,R_{n+j}^h\left(\frac{x}{y}\right)\ln^{i-j}y;\tag{2.15}$$

5) *из симметрии $R_n^{fh}(x)$ следует, что*

$$R_n(x,f*h,\ FH)=R_n(x,f*h,\ HF),\tag{2.16}$$

*т. е. операторы F и H коммутативны*;

6) *если f-обратимая функция с обратной функцией h, то*

$$I_h\Phi=F^{-1}(D)\,\Phi+O\left(I_{|h|}\lambda_{n-p}\right)+O\left(|\,I_hP(L)\,|\right),\tag{2.17}$$

*где $P(L)$ — некоторый многочлен от L степени $\leqslant p-1$.*

Доказательство. Справедливость 1 и 2 очевидна.

3 следует из (2.4), замечания 2.4 и равенства (2.10).

4) Пусть

$$G(D)=F(D)\,H(D)=\sum_{t=-(p+q)}^{\infty}f_t\,D^t,\quad f_t=\sum_{i+k=t}a_i\,b_k,\tag{г}$$

$$I_fI_h\,L^n=\sum_{N\alpha\leqslant y}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}\sum_{N\beta\leqslant\frac{x}{N\alpha}}\frac{h(\beta)}{(N\beta)^{\Theta}}\ln^n\frac{x}{N\alpha\beta}+$$

$$+\sum_{N\beta\leqslant\frac{x}{y}}\frac{h(\beta)}{(N\beta)^{\Theta}}\sum_{N\alpha\leqslant\frac{x}{N\beta}}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}\ln^n\frac{x}{N\alpha\beta}-$$

$$-\sum_{N\alpha\leqslant y}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}\sum_{N\beta\leqslant\frac{x}{y}}\frac{h(\beta)}{(N\beta)^{\Theta}}\ln^n\frac{x}{N\alpha\beta}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2-\sum\nolimits_3.$$

Имея в виду (а) и (б), получаем, что

$$\sum\nolimits_1=S_{11}+S_{12}+S_{13},$$

где

$$S_{11}=\sum_{N\alpha\leqslant y}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}R_n^h\left(\frac{x}{N\alpha}\right),$$

$$S_{12}=\sum_{i=-q}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=-p}^{j}\frac{n!\,j!}{(n-i)!\,(j-k)!}\binom{n-i}{j}a_k\,b_i\ln^{n-i-j}\frac{x}{y}\ln^{j-k}y,$$

$$S_{13}=\sum_{i=-q}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{n!}{(n-i)!}\binom{n-i}{j}b_i\ln^{n-i-j}\frac{x}{y}R_j^f(y),$$

$$\sum\nolimits_2=S_{21}+S_{22}+S_{23},$$

где

$$S_{21}=\sum_{N\beta\leqslant\frac{x}{y}}\frac{h(\beta)}{(N\beta)^{\Theta}}R_n^f\left(\frac{x}{N\beta}\right),$$

$$S_{22}=\sum_{i=-p}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=-q}^{j}\frac{n!}{(j-k)!(n-i-j)!}a_i\,b_k\ln^{n-i-j}y\ln^{j-k}\frac{x}{y},$$

$$S_{23}=\sum_{i=-p}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{n!}{(n-i)!}\binom{n-i}{j}a_i\,R_j^h\left(\frac{x}{y}\right)\ln^{n-i-j}y,$$

$$\sum\nolimits_3=T_1+T_2+T_3+T_4,$$

где

$$T_1=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=-q}^{n-j}\sum_{k=-p}^{j}\binom{n}{j}\frac{j!\,(n-j)!}{(j-k)!\,(n-j-i)!}a_k\,b_i\ln^{j-k}y\ln^{n-j-i}\frac{x}{y},$$

$$T_2=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=-q}^{n-j}\binom{n}{j}\frac{(n-j)!}{(n-i-j)!}b_i\,R_j^f(y)\ln^{n-j-i}\frac{x}{y},$$

$$T_3=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=-p}^{j}\binom{n}{j}\frac{j!}{(j-k)!}a_k\,R_{n-j}^h\left(\frac{x}{y}\right)\ln^{j-k}y,$$

$$T_4=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}R_j^f(y)\,R_{n-j}^h\left(\frac{x}{y}\right).$$

Переменяя порядок суммирования в $S_{12}$, имеем:

$$S_{12}=\sum_{j=0}^{n+q}\sum_{i=-q}^{n-j}\sum_{k=-p}^{j}\frac{n!}{(n-i-j)!\,(j-k)!}a_k\,b_i\ln^{n-i-j}\frac{x}{y}\ln^{j-k}y.$$

Тоже самое сделаем в $S_{22}$ и затем $j$ заменим на $(n-j)$. Тогда

$$S_{22}=\sum_{j=-p}^{n}\sum_{i=-p}^{j}\sum_{k=-q}^{n-j}\frac{n!}{(j-i)!\,(n-j-k)!}a_i\,b_k\ln^{j-i}y\ln^{n-j-k}\frac{x}{y}.$$

Заметим, что

$$I_f I_h L^n = (S_{12}+S_{22}-T_1)+[S_{11}+S_{21}-T_4+(S_{23}-T_3)+(S_{13}-T_2)],$$

где

$$S_{12}+S_{22}-T_1=F(D)\,H(D)\,L^n.$$

Выражение $R_n^{fh}(x)$ получим, подставляя вместо указанных сумм их значения.

5 следует из симметрии сумм, входящих в $R_n^{fh}(x)$.

6) Разберем два случая:

а) $l\geqslant 0$ и

$$F(D)=\sum_{m=l}^{\infty} a_m D^m = D^l \sum_{m=l}^{\infty} a_m D^{m-l}.$$

Тогда

$$F^{-1}(D)=D^{-l}\left(\sum_{m=l}^{\infty} a_m D^{m-l}\right)^{-1}=D^{-l}\sum_{j=0}^{\infty} d_{l+j} D^j,$$

где

$$d_l=a_l^{-1}\neq 0.$$

Для любого $\Phi\in\mathfrak{N}$ и $l\geqslant 0$

$$F(D)\,F^{-1}(D)\,\Phi=\Phi.$$

Степень многочлена $\Psi=F^{-1}(D)\,\Phi$ равна $(n+l)$. Значит,

$$F^{-1}(D)\,\Phi=\Psi=I_h I_f \Psi=I_h\,[F(D)\Psi+O(\lambda_{n+l})]=I_h\Phi+O(I_{|h|}\lambda_{n+l}); \qquad \text{(I)}$$

б) $l=-p<0$ и

$$F(D)=\sum_{m=-p}^{\infty} a_m D^m=D^{-p}\sum_{i=0}^{\infty} a_{-p+i} D^i.$$

Заметим, что

$$D^{-p}(D^p\Phi)=\Phi$$

лишь для многочленов вида

$$\Phi(x)=c_0\ln^p x+c_1\ln^{p+1}x+\ldots+c_{n-p}\ln^n x, \quad \Phi\in\mathfrak{N}.$$

Пусть $\Psi\in\Phi$ есть многочлен от $\ln x$ степени $t\leqslant n$. Тогда

$$I_f\Psi=F(D)\,\Psi+O(\lambda_t).$$

Применяя $I_h$ к этому соотношению, получаем:

$$\Psi=I_h I_f\Psi=I_h F(D)\,\Psi+O(I_{|h|}\ \lambda_t). \qquad \text{(II)}$$

Пусть, далее

$$\Psi=F^{-1}(D)\ln^n x=D^p\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{-p+i} D^i\right)^{-1}\ln^n x. \qquad \text{(III)}$$

Степень этого многочлена равна $(n-p)$. Пусть

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{-p+i} D^i\right)^{-1}\ln^n x=f_1+f_0, \quad n\geqslant p,$$

где $f_0$ — многочлен степени $\leqslant p-1$, а $f_1$ — многочлен степени $\geqslant p$. Из вышесделанного замечания следует, что

$$D^{-p}(D^p f_1)=f_1, \quad D^p f_0=0.$$

Тогда

$$F(D)(D^p f_1)=\sum_{i=0}^{\infty} a_{-p+i} D^i f_1 = \ln^n x - \sum_{i=0}^{\infty} a_{-p+i} D^i f_0.$$

В силу (II) и (III) имеем:

$$F^{-1}(D)\ln^n x + O(I_h, \lambda_{n-p}) = I_h[F(D) D^p (f_1+f_0)] =$$

$$= I_h\Big(F(D) D^p f_1\Big) = I_h\Big(\ln^n x - \sum_{i=0}^{\infty} a_{-p+i} D^i f_0\Big),$$

что и доказывает 6, так как такое же самое соотношение верно для любого $\Phi\in\mathfrak{N}$, а случай $n<p$ получается тривиально.

**Лемма 2.1.** *Пусть*

$$I_f\Phi = F(D)\Phi + O(\lambda_n), \qquad F(D)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m D^m, \quad a_0\neq 0, \quad \Phi\in\mathfrak{N}.$$

*Тогда*

$$F^{-1}(D)\Phi = a_0^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(-a_0^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} a_m D^m\Big)^{\nu}\Phi. \tag{2.18}$$

Доказательство. Для простоты можно принять $a_0=1$. Вычислим произведение:

$$\Big(1+\sum_{m=1}^{\infty} a_m D^m\Big)\Bigg(\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(-\sum_{m=1}^{\infty} a_m D^m\Big)^{\nu}\Phi\Bigg)=$$

$$=\Big(1+\sum_{m=1}^{\infty} a_m D^m\Big)\Bigg(\sum_{\nu=0}^{n}\Big(-\sum_{m=1}^{\infty} a_m D^m\Big)^{\nu}\Phi\Bigg)=$$

$$=\Bigg(1+(-1)^n\Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_m D^m\Big)^{n+1}\Bigg)\Phi=\Phi,$$

так как $\Phi$ — многочлен от $\ln x$ степени $\leqslant n$.

**Теорема 2.5.** *Пусть $f$ и $h$ неотрицательные арифметические функции, удовлетворяющие условиям:*

$$I_f\Phi = F(D)\Phi + O(x^{-\frac{1}{A}+\varepsilon}), \qquad I_h\Phi = H(D)\Phi + O(x^{-\frac{1}{B}+\varepsilon}), \quad \Phi\in\mathfrak{N},$$

*$\varepsilon>0$ — любое фиксированное число, $A$ и $B$ — некоторые положительные константы. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon>0$*

$$I_f I_h\Phi = F(D)\,H(D)\,\Phi + O(x^{-\frac{1}{A+B}+\varepsilon}). \tag{2.19}$$

Доказательство. Для таких функций $f$ и $h$ верны оценки:

$$\sum_{N\alpha\leqslant x}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^a} = O(x^{\theta-a+\varepsilon}), \qquad \sum_{N\alpha\leqslant x}\frac{h(\alpha)}{(N\alpha)^a} = O(x^{\theta-a+\varepsilon}),$$

где $0<a\leqslant\Theta$, $\varepsilon>0$ – любое фиксированное число. Это следует из условий теоремы и определения $I_h$ и $I_f$.

Из теоремы 2.4, 4 имеем, что

$$I_f I_h \Phi - F(D)\,H(D)\,\Phi = O\left(\sum_{N\alpha\leqslant y}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}\left(\frac{x}{N\alpha}\right)^{-\frac{1}{B}+\varepsilon}\right)+$$

$$+O\left(\sum_{N\alpha\leqslant\frac{x}{y}}\frac{h(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}\left(\frac{x}{N\alpha}\right)^{-\frac{1}{A}+\varepsilon}\right)+O\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{B}+\varepsilon}y^{-\frac{1}{A}+\varepsilon}\right)+$$

$$+O\left(y^{-\frac{1}{A}+\varepsilon}\right)+O\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{B}+\varepsilon}\right)=O\left(x^{-\frac{1}{A+B}+\varepsilon}\right),$$

если выбрать

$$y=x^{\frac{A}{A+B}},\qquad \frac{x}{y}=x^{\frac{B}{A+B}}$$

### 2.4. Приближение сумм $S_f$ посредством сумм $I_f$

**Теорема 2.6.** *Пусть*

$$I_f 1 = F(D)\,1 + O(\lambda_0)\quad \textit{и}\quad \int_1^x t^{\Theta-1}\lambda_0(t)\,dt = O\left(x^{\Theta}\lambda_0(x)\right).$$

*Тогда для* $\Phi\in\mathfrak{N}$ *и любого фиксированного* $\varepsilon>0$

$$S_f\Phi=\int_1^x t^{\Theta-1}\{DF(D)\,1\}(t)\,\Phi\left(\frac{x}{t}\right)dt+O\left(x^{\Theta}\lambda_0(x)\right)+O\left(x^{\Theta-1+\varepsilon}\right). \quad (2.20)$$

Доказательство. Пусть

$$I_f 1 = P(L)+O\left(\lambda_0(x)\right).$$

Вычислим

$$S_f 1=\sum_{N\alpha\leqslant x}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}(N\alpha)^{\Theta}=\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)\,[B(n)-B(n-1)]}{n^{\Theta}}n^{\Theta}=$$

$$=\sum_{n\leqslant x}\left(\sum_{N\alpha\leqslant n}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}\right)\left(n^{\Theta}-(n+1)^{\Theta}\right)+x^{\Theta}\sum_{N\alpha\leqslant x}\frac{f(\alpha)}{(N\alpha)^{\Theta}}=$$

$$=x^{\Theta}P(L)-\Theta\sum_{n\leqslant x}n^{\Theta-1}P(L)+O\left(x^{\Theta}\lambda_0(x)\right)+O\left(\sum_{n\leqslant x}n^{\Theta-2}P(L)\right)=$$

$$=x^{\Theta}P(L)-\Theta\int_1^x t^{\Theta-1}P(L)\,dt+O\left(x^{\Theta}\lambda_0(x)\right)+O\left(x^{\Theta-1+\varepsilon}\right)=$$

$$=\int_1^x t^{\Theta-1}\{DF(D)\,1\}(t)\,dt+O\left(x^{\Theta}\lambda_0(x)\right)+O\left(x^{\Theta-1+\varepsilon}\right),$$

так как

$$\Theta\int_1^x t^{\Theta-1}P(L)\,dt=\Theta\left[\frac{1}{\Theta}t^{\Theta}P(L)\Big|_1^x-\frac{1}{\Theta}\int_1^x t^{\Theta}\,d\left(P(L)\right)\right]=$$

$$=x^{\Theta}P(L)-\int_1^x t^{\Theta}\,d\left(P(L)\right)=x^{\Theta}P(L)-\int_1^x t^{\Theta-1}\{DF(D)\,1\}(t)\,dt.$$

Из соотношения

$$\frac{d}{dx}\left(S_f L^k(x)\right)=k\sum_{N\alpha\leqslant x} f(\alpha)\ln^{k-1}\frac{x}{N\alpha}\,\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x}{N\alpha}\right)$$

путем интегрирования получаем, что

$$S_f L^k(x)=k\int_1^x S_f L^{k-1}(t)\frac{dt}{t}.$$

Использовав последнюю формулу и выражение для $S_f 1$, имеем, что

$$S_f L(x)=\int_1^x S_f 1(t)\frac{dt}{t}=$$

$$=\int_1^x y^{\Theta-1}\{DF(D)1\}(y)\,dy\int_y^x\frac{dt}{t}+O\left(x^{\Theta}\lambda_0(x)\right)+O\left(\int_1^x t^{\Theta-2+\varepsilon}dt\right)=$$

$$=\int_1^x y^{\Theta-1}\{DF(D)1\}(y)\,L\left(\frac{x}{y}\right)dy+O\left(x^{\Theta}\lambda_0(x)\right)+O\left(x^{\Theta-1+\varepsilon}\right).$$

По индукции следует, что

$$S_f L^k=\int_1^x y^{\Theta-1}\{DF(D)1\}(y)\,L^{k-1}\left(\frac{x}{y}\right)dy+O\left(x^{\Theta}\lambda_0(x)\right)+O\left(x^{\Theta-1+\varepsilon}\right).$$

Из определения класса $\mathfrak{N}$, свойств операторов $S_f$ и только что полученных выражений следует утверждение теоремы.

### 2.5. Приложения к оценке некоторых сумм арифметических функций

**Лемма 2.2.** *Если*

$$B(x)=\sum_{N\alpha\leqslant x}1=Cx^{\Theta}+O(x^{\Theta_1}),$$

*где* $C>0$, $\Theta>0$ *и* $\Theta_1<\Theta$, *то*

$$\sum_{N\alpha\leqslant x}\frac{1}{(N\alpha)^{\Theta}}=C\Theta\ln x+\gamma_0+O\left(x^{\Theta_1-\Theta}\right),$$

$\gamma_0$ — *постоянная*; (2.21)

$$\sum_{N\alpha\leqslant x}\frac{\ln^k N\alpha}{(N\alpha)^{\Theta}}=\frac{C\Theta}{k+1}\ln^{k+1}x+(-1)^k\gamma_k+O\left(x^{\Theta_1-\Theta}\ln^k x\right), \qquad (2.22)$$

$k=1, 2, 3,$ — *фиксированное число*, $\gamma_k$ — *постоянное*;

$$\sum_{N\alpha\leqslant x}\ln^k\frac{x}{N\alpha}=\frac{C}{\Theta}x^{\Theta}+O\left(x^{\Theta-1}\right)+O\left(x^{\Theta_1}\right), \qquad (2.23')$$

$k=1, 2,$ — *фиксированное число*;

$$\sum_{N\alpha\leqslant x}\frac{1}{(N\alpha)^{\Theta_1}}\ln^k\frac{x}{N\alpha}=\frac{C\Theta}{(\Theta-\Theta_1)^{k+1}}x^{\Theta-\Theta_1}+O\left(x^{\Theta-\Theta_1-1}\right)+O\left(\ln^{k+1}x\right), \qquad (2.23)$$

$k=0, 1, 2,$ — *фиксированное число*.

Доказательство. Все эти оценки выводим из $B(x)$, применяя формулу суммирования Абеля.

**Лемма 2.3.**

$$I_\mu(x^{-\Theta}\ln^k x)=O(1), \tag{2.24'}$$

$$I_\mu(x^{\Theta_1-\Theta}\ln^k x)=O(1). \tag{2.24}$$

Доказательство следует из (2.23'), (2.23) и того факта, что

$$I_\mu\Phi=O(I_{|\mu|}\,|\,\Phi\,|)=O(I_1\,|\,\Phi\,|).$$

**Теорема 2.7.** *Пусть* $\Phi\in\mathfrak{R}$. *Тогда*

$$1)\ I_1\Phi=\zeta(D)\,\Phi+O(x^{\Theta_1-\Theta+\varepsilon}); \tag{2.25}$$

$$2)\ I_L\Phi=-\zeta'(D)\,\Phi+O(x^{\Theta_1-\Theta+\varepsilon}); \tag{2.26}$$

$$3)\ I_{L^m}\Phi=(-1)^m\zeta^{(m)}(D)\,\Phi+O(x^{\Theta_1-\Theta+\varepsilon}), \tag{2.27}$$

$\varepsilon>0$ — *любое фиксированное число, а*

$$\zeta(D)=C\Theta D^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k!}D^k.$$

Доказательство. 1) В силу (2.21) и (2.22) имеем, что

$$I_1\ln^n x=\sum_{N\alpha\le x}\frac{1}{(N\alpha)^\Theta}\ln^n\frac{x}{N\alpha}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\ln^{n-k}x\sum_{N\alpha\le x}\frac{\ln^k N\alpha}{(N\alpha)^\Theta}=$$

$$=C\Theta\ln^{n+1}x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\gamma_k\ln^{n-k}x+O(x^{\Theta_1-\Theta}\ln^k x).$$

Известно, что

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{n+1}$$

Из этого и определения оператора дифференцирования получаем (2.25) для $\Phi=L^n$ и, тем самым, для любого $\Phi\in\mathfrak{R}$.

2) Из теоремы 2.4, формулы (2.14) следует, что

$$I_L\Phi=-\zeta'(D)\,\Phi+O(x^{\Theta_1-\Theta}\ln^{n+1}x).$$

Оператор

$$\zeta'(D)=-C\Theta D^{-2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{(k-1)!}D^{k-1}.$$

3) Следует по индукции из 2, где

$$(-1)^m\zeta^{(m)}(D)=C\Theta m!\,D^{-m-1}+(-1)^m\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\gamma_k}{(k-m)!}D^{k-m}.$$

Из определения функций Мебиуса и Мангольдта легко выводятся формулы:

$$\sum_{\beta\backslash\alpha}\mu(\beta)=\begin{cases}1, & \text{если } \alpha=(1),\\ 0, & \text{если } \alpha\ne(1),\end{cases} \tag{2.28}$$

$$\Lambda(\alpha)=\mu*L(\alpha)=\sum_{\beta\backslash\alpha}\mu(\beta)\ln N\frac{\alpha}{\beta}, \tag{2.29}$$

$$\Lambda(\alpha)=-\sum_{\beta\backslash\alpha}\mu(\beta)\ln N\beta. \tag{2.30}$$

В дальнейшем будет полезна функция $\Lambda_k$, которую определим как произведение Дирихле функций $\mu$ и $L^k$:

$$\Lambda_k(\alpha)=\mu * L^k(\alpha)=\sum_{\beta\backslash\alpha}\mu(\beta)\ln^k N\frac{\alpha}{\beta}, \tag{2.31}$$

$k=1, 2,$ — фиксированное число. Заметим, что $\Lambda_1=\Lambda$.

**Теорема 2.8.** *Пусть* $\Phi\in\mathfrak{N}$. *Тогда*

$$1)\ I_\mu\Phi=\zeta^{-1}(D)\,\Phi+O\,(1); \tag{2.32}$$

$$2)\ I_\Lambda\,\Phi=-\zeta^{-1}(D)\,\zeta'(D)\,\Phi+O\,(1); \tag{2.33}$$

$$3)\ I_{\Lambda_k}\Phi=(-1)^k\zeta^{-1}(D)\,\zeta^{(k)}(D)\,\Phi+O\,(1). \tag{2.34}$$

Доказательство. 1) Из определения функции $\mu$ следует, что $\mu*1=e$. Значит,

$$I_\mu=I_1^{-1}.$$

Вследствие теоремы 2.4, 6, получаем (2.32), так как из равенства

$$I_1(x^{-\Theta})=C+O\,(x^{\Theta_1-\Theta})$$

следует, что $I_\mu 1=O\,(1)$.

Оператор

$$\zeta^{-1}(D)=\left[C\Theta+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k!}D^{k+1}\right]^{-1}D$$

записывается в виде ряда по степеням $D$ по лемме 2.1. После вычислений получаем, что

$$\zeta^{-1}(D)=(C\Theta)^{-1}D-(C\Theta)^{-2}\gamma_0D^2-[(C\Theta)^{-2}\gamma^1-(C\Theta)^{-3}\gamma_0^2]\,D^3+\dots$$

2) По теореме 2.5 получаем, что

$$I_\Lambda\,\Phi=I_\mu\,I_L\,\Phi=-\zeta^{-1}(D)\,\zeta'(D)\,\Phi+O\,(x^{\Theta_1-\Theta}\ln^{n+1}x),$$

где

$$-\zeta^{-1}(D)\,\zeta'(D)=D^{-1}-(C\Theta)^{-1}\gamma_0-[2\gamma_1(C\Theta)^{-1}-\gamma_0^2(C\Theta)^{-2}]\,D+\dots$$

Тем 2 доказано.

3) Также следует из теоремы 2.5, (2.32) и (2.34). Оператор

$$(-1)^k\zeta^{-1}(D)\,\zeta^{(k)}(D)=$$

$$=k!\,D^{-k}-(C\Theta)^{-1}\gamma_0k!\,D^{-k+1}+[(C\Theta)^{-1}\gamma_1-(C\Theta)^{-2}\gamma_0^2]\,k!\,D^{-k+2}+\dots$$

Из теоремы 2.5 и 2.7 следует теорема.

**Теорема 2.9** *Пусть* $\Phi\in\mathfrak{N}$, $\varepsilon>0$ — *любое фиксированное число и* $h_0\geqslant 0$,

$$n_1=\sum^{k}h_j,\qquad n_2=\sum_{j=0}^{k}j\,h_j.$$

*Тогда*

$$\prod_{j=0}^{k}I_{L^j}^{h_j}\Phi=(-1)^{n_2}\prod_{j=0}^{k}[\zeta^{(j)}(D)]^{h_j}\,\Phi+O\,(x^{\frac{\Theta_1-\Theta}{n_1}+\varepsilon}). \tag{2.35}$$

Доказательство. Из (2.27) по теореме 2.5 для любого фиксированного $\varepsilon>0$ имеем:

$$I^2_{L^j}\Phi=I_{L^j}I_{L^j}\Phi=(-1)^{2j}[\zeta^{(j)}(D)]^2\Phi+O(x^{\frac{\Theta_1-\Theta}{2}+\varepsilon}).$$

По индукции получаем, что

$$I^{h_j}_{L^j}\Phi=(-1)^{jh_j}[\zeta^{(j)}(D)]^{h_j}\Phi+O(x^{\frac{\Theta_1-\Theta}{h_j}+\varepsilon}).$$

Пусть

$$I^{h_j}_{L^j}=I_{g_j},\qquad g_j=\underbrace{L^j*L^j*\quad*L^j}_{h_j\text{ раз}}.$$

Тогда

$$I_{g_0}\Phi=I^{h_0}_{L^0}\Phi=(-1)^0[\zeta(D)]^{h_0}\Phi+O(x^{\frac{\Theta_1-\Theta}{h_0}+\varepsilon}),$$

$$I_{g_1}\Phi=I^{h_1}_{L}\Phi=(-1)^{h_1}[\zeta^{(1)}(D)]^{h_1}\Phi+O(x^{\frac{\Theta_1-\Theta}{h_1}+\varepsilon}).$$

По теореме 2.5

$$I_{g_0}I_{g_1}\Phi=(-1)^{h_1}[\zeta(D)]^{h_0}[\zeta^{(1)}(D)]^{h}\Phi+O(x^{\frac{\Theta_1-\Theta}{h_0+h_1}+\varepsilon}).$$

Далее, по индукции следует (2.35).

**Теорема 2.10.** *Пусть $\Phi\in\mathfrak{N}$, $h$ — целое фиксированное число. Тогда*

$$I^h_\mu\Phi=\zeta^{-h}(D)\Phi+O(L^{h-1}).\tag{2.36}$$

Доказательство. Использовав (2.32) и (2.21), получаем, что

$$I^2_\mu\Phi=I_\mu I_\mu\Phi=I_\mu\zeta^{-1}(D)\Phi+O(I_{|\mu|}1)=\zeta^{-2}(D)\Phi+O(L).$$

Соотношение (2.36) следует по индукции.

В случае $h_0=0$ из двух последних теорем вытекает следующая теорема.

**Теорема 2.11.** *Для любого целого $h$*

$$I^h_\mu\prod_{j=1}^{k}I^{h_j}_{L^j}\Phi=(-1)^{n_2}\zeta^{-h}(D)\prod_{j=1}^{k}[\zeta^{(j)}(D)]^{h_j}\Phi+O(L^{h-1}),\tag{2.37}$$

*где $\Phi\in\mathfrak{N}$ и*

$$n_2=\sum_{j=1}^{k}jh_j.$$

Доказательство.

$$I^h_\mu\prod_{j=1}^{k}I^{h_j}_{L^j}\Phi=I^h_\mu\left\{(-1)^{n_2}\prod_{j=1}^{k}[\zeta^{(j)}(D)]^{h_j}\Phi\right\}+O(I_1x^{\frac{\Theta_1-\Theta}{n_1}+\varepsilon}).$$

Тем (2.37) доказано, так как в силу леммы 2.3

$$I_1x^{\frac{\Theta_1-\Theta}{n_1}+\varepsilon}=O(1)$$

при $n_1>0$.

**Замечание.** Для отрицательных $h$ теорема 2.11 содержится в теореме 2.9, вследствие равенства $I_\mu^h = I_1^{-h}$. Из теоремы 2.11 и теоремы 2.6 вытекает важная теорема.

**Теорема 2.12.** *Пусть $S_f$ задается выражением:*

$$S_f = S_\mu^h \prod_{j=1}^{k} S_{L^j}^{h_j}.$$

*Положим*

$$n = \sum_{j=1}^{k} (j+1)\, h_j - h.$$

*Тогда для $\Phi \in \mathfrak{N}$*

$$S_f \Phi = \frac{1}{\Theta}\, x^\Theta P(L) + O(x^\Theta L^{h-1}), \tag{2.38}$$

*где $P(L)$ — некоторый многочлен от $L$ степени $(n-1)$.*

Доказательство. Пусть

$$I_f \Phi = I_\mu^h \prod_{j=1}^{k} I_{L^j}^{h_j}\, \Phi = F(D)\, \Phi + O(L^{h-1}),$$

то

$$I_f 1 = F(D)\, 1 + O(L^{h-1})$$

по теореме 2.11. Применим теорему 2.6 к преобразованию $S_f$

$$S_f \Phi = \int_1^x t^{\Theta-1} \{D F(D)\, 1\}(t)\, \Phi\left(\frac{x}{t}\right) dt + O(x^\Theta L^{h-1}) + O(x^{\Theta-1+\varepsilon}),$$

$\varepsilon > 0$ — фиксированное число,

$D\, F(D)\, 1$ — многочлен $(n-1)$ степени от $\ln x$. Пусть

$$Q(\ln t) = DF(D) 1\, (t).$$

Тогда

$$\int_1^x t^{\Theta-1} Q(\ln t)\, dt = \frac{1}{\Theta}\, x^\Theta [Q(\ln x) - \frac{1}{\Theta}\, Q'(\ln x)] +$$

$$+ \frac{1}{\Theta^2} \int_1^x t^{\Theta-1}\, Q''(\ln t)\, dt = \frac{1}{\Theta}\, x^\Theta P_1(\ln x),$$

так как $Q'(\ln x)$ — многочлен $(n-2)$ степени, $Q''(\ln x)$ — $(n-3)$ степени. Таким же самым путем получаем, что

$$\int_1^x t^{\Theta-1}\, Q(\ln t) \ln^k \frac{x}{t}\, dt = \frac{1}{\Theta^k}\, x^\Theta P_k(\ln x),$$

$k = 1, 2, 3,$ — фиксированные числа, $P_k(\ln x)$ — многочлены $(n-1)$ степени. Значит, (2.38) выполняется и для $\Phi \in \mathfrak{N}$.

Степень многочлена $P(L)$ не зависит от функции $\Phi$. Очень важно, что остаток в этой теореме зависит только от $h$ и не зависит от $n$.

**Теорема 2.13.**

$$S_{\Lambda_k}1=\int_1^x t^{\Theta-1}(k\ln^{k-1}t-b_k\ln^{k-2}t+\ldots)\,dt+O(x^{\Theta}),$$

где $b_k>0$ для $k\geqslant 2$.

Доказательство следует из теоремы 2.8 и 2.6.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность своему научному руководителю д-ру физ.-мат. н. проф. Й. П. Кубилюсу.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 27.VIII.1969

ЛИТЕРАТУРА


1. A. Selberg, An elementary proof of the prime number theorem for arithmetic progression Ann. of Math., 50 (1949), 297–304.
2. H. N. Shapiro, On primes in arithmetic progressions, I, II, Ann. of Math., 52 (1950), 217–230, 231–243.
3. K. Yamamoto, Theory of aritmetic linear transformations and its applications to an elemen tary proof of Dirichlet's theorem, J. Math. Soc. Japan, 7 (1955), 424–434.
4. S. A. Amitsur, Arithmetic linear transformations and abstract prime number theorems, Canad. J. Math., 13 (1961), 83–109.
5. W. Forman, H. N. Shapiro, Abstract prime number theorems, Comm. Pure App Math., 7 (1954), 587–619.
6. H. N. Shapiro, An elementary proof of the prime ideal theorem, Comm. Pure Appl. Math., 2 (1949), 309–323.
7. Y. Eda, N. Nakagoshi An elementary proof of the prime ideal theorem with remaninder term, Sci. Rep. Kanazawa Univ., 12 (1–12) (1967).
8. Б. М. Бредихин, Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями, Математический сборник, 46 (88): 2 (1958), 143–158.
9. P. Kuhn, Eine Verbesserung des Restgliedes beim elementaren Beweis des Primzahlsatzes Math. Scand., 3 (1955), 75–89.
10. S. A. Amitsur, On arithmetic functions, J. Analyse Math., 5 (1956–1957), 273–317.
11. S. A. Amitsur, Some results on arithmetic functions, J. Math. Soc. Japan (1959), 275–290.
12. E. Bombieri, Sulle formule di A. Selberg generalizzate per classi di funzioni aritmetiche e le applicazioni al problema del resto nel „Primzahlsatz", Rivista di Matematica della Università di Parma, Serie II, 3 (1962), 393–440.
13. E. M. Wright, Functional inequalities in the elementary theory of primes, Duke Math. J. 19 (1952), 695–704.


## LAISVOS SKAITINĖS PUSGRUPĖS GENERUOJANČIŲ ELEMENTŲ PASISKIRSTYMO KLAUSIMU. I

D. CIBULSKYTĖ

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama multiplikatyvinė laisva pusgrupė $G$ su suskaičiuojama sistema $P$ ją generuojančių elementų. $N$ – pusgrupės $G$ homomorfizmas į multiplikatyvinę skaitinę pusgrupę $\overline{G}$, turįs savybę: pusgrupėje $G$ yra baigtinis skaičius elementų $\alpha$, kuriems $N\alpha\leqslant x$. Nagrinėjamos laisvos pusgrupės su laipsniniu $\Theta$-tankiu.

Darbo tikslas – įrodyti pagrindinę teoremą:

$$\pi(x)=\int_2^x \frac{u^{\Theta-1}\,du}{\ln u}+O\left(\frac{x^{\Theta}}{\ln^m x}\right)$$

bet kokiam fiksuotam $m>0$, kur

$$\pi(x)=\sum_{\substack{N\omega\leq x\\ \omega\in P}} 1 .$$

Šioje dalyje įrodoma teorema.

*Sakykime, $f(\alpha)$ – aritmetinė funkcija, apibrėžta kiekvienam $\alpha\in G$; $\Phi(x)$ – reali ar kompleksinė funkcija, apibrėžta kiekvienam $x\geqslant 1$ ir aprėžta baigtiniame intervale:*

$$S_f\Phi(x)=\sum_{\substack{N\alpha\leq x\\ \alpha\in G}} f(\alpha)\Phi\left(\frac{x}{N\alpha}\right);$$

*$\mu(\alpha)$ – Mėbiuso funkcija, apibrėžta kiekvienam $\alpha\in G$ ir lygi 1, kai $\alpha\in G$ yra bet kuris elementas, kuriam $N\alpha=1$; lygi 0, kai $\omega_i^2\backslash\alpha$, $\omega_i\in P$, ir lygi $(-1)^k$, kai $\alpha=\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$, kur visi $\omega_1, \ldots, \omega_k$ skirtingi. Funkciją $\ln N\alpha$ žymėsime simboliu $L$:*

$$S_f=S_\mu^h\prod_{j=1}^{k} S_{L^j}^{h_j}, \qquad n=\sum_{j=1}^{k}(j+1)h_j-h,$$

*$h$ – bet koks sveikas skaičius. Jei $\Phi$ – daugianaris $\ln x$ atžvilgiu, tai*

$$S_f\Phi(x)=\frac{1}{\Theta}x^{\Theta}P(\ln x)+O(x^{\Theta}\ln^{h-1}x),$$

*kur $P(\ln x)$ – $(n-1)$ laipsnio daugianaris $\ln x$ atžvilgiu.*

Pagrindinė teorema bus įrodyta sekančiose darbo dalyse.

## ÜBER VERTEILUNG DER BASISELEMENTEN IN DEN FREIEN ZAHLENHALBGRUPPEN. I

D. CIBULSKYTĖ

(*Zusammenfassung*)

Es sei $G$ freie Abelsche Halbgruppe bei Komposition durch Multiplikation mit einer unendlichen Basis $P$. $N$ ist der Homomorfismus der Halbgruppe $G$ auf die Zahlenhalbgruppe $G$ bei Multiplikation mit der Eigenschaft: in der Halbgruppe $G$ ist endliche Zahl von Elementen $\alpha$ mit $N\alpha\leqslant x$. Es wird die freien Halbgruppen mit der potenzen $\Theta$-Dichte betrachtet.

Das Ziel dieser Arbeit ist das Hauptheorem zu beweisen:

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{u^{\Theta-1}du}{\ln u}+O_\alpha\left(\frac{x^{\Theta}}{\ln^m x}\right)$$

wo $m>0$ – beliebige Konstante und

$$\pi(x)=\sum_{\substack{N\omega\leqslant x\\ \omega\in P}} 1$$

Im vorliegenden Artikel wird folgender Satz bewiesen:

Es sei für jedes $\alpha\in G$ die zahlentheoretische Funktion $f(\alpha)$ definiert; $\Phi(x)$ ist eine reelwertige oder komplexwertige Funktion im Interval $1\leqslant x<\infty$ erklärt und auf jedem endlichen Interval beschränkt:

$$S_f\Phi(x)=\sum_{\substack{N\alpha\leqslant x\\ \alpha\in G}} f(\alpha)\Phi\left(\frac{x}{N\alpha}\right);$$

$\mu(\alpha)$ ist Möbiusfunktion, die für jedes $\alpha$ mit $N\alpha=1$ den Wert 1, für $\omega_i \in P$, $\omega_i^2 \backslash \alpha$ den Wert 0 und $(-1)^k$ für $\alpha=\omega_1, \ldots, \omega_k$, $\omega_i \in P$ $(i=1, \ldots, k)$, wo $\omega_i$ verschieden sind, annimmt; die Funktion $\ln N\alpha$ ist durch $L$ bezeichnet,

$$S_f = S_\mu^h \prod_{j=1}^{k} S_{L^j}^{h_j}, \qquad n = \prod_{j=1}^{k} (j+1) h_j - h,$$

wo $h$ beliebige ganze Zahl ist. Es sei $\Phi$ ein Polynom in $\ln x$. Dann

$$S_f \Phi(x) = \frac{1}{\Theta} x^\Theta P(\ln x) + O(x^\Theta \ln^{h-1} x),$$

wo $P(\ln x)$ das Polynom $(n-1)$*ten* Grades in $\ln x$ ist.

Das Haupttheorem wird in den nächsten Artikeln bewiesen sein.