1970

УДК – 519.21

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ДЛЯ n-КРАТНЫХ СВЕРТОК k-МЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

А. Бикялис, И. Модеруди

Рассмотрим асимптотическое разложение

$$P^{*n}(A\sqrt{n})=\sum_{\nu=0}^{s}\binom{n}{\nu}\Phi^{*(n-\nu)}*(P-\Phi)^{*\nu}(A\sqrt{n})+r_{n,s+1}(A\sqrt{n}) \tag{1}$$

для n-кратной свертки $P^{*n}(A\sqrt{n})=\underbrace{P*\quad *P}_{n}(A\sqrt{n})$ k-мерных распределений $P(A)$ случайного вектора $\xi-M\xi=(\xi_1-M\xi_1, \ldots, \xi_k-M\xi_k)$ евклидового пространства R^k. Здесь A принадлежит классу $\mathfrak{N}$ борелевских множеств из R^k; $A\sqrt{n}=\{\mathbf{x}\sqrt{n}:\mathbf{x}\in A\}$; $\Phi(A)$ – k-мерное нормальное распределение с параметрами $(\mathbf{0}, V)$; $M\xi=(M\xi_1, M\xi_2, \ldots, M\xi_k)$ – вектор математических ожиданий; V – матрица ковариаций случайного вектора ξ; $\mathbf{0}$ – нулевой вектор в R^k; s – некоторое целое число.

Разложения типа (1) впервые исследовал Г Бергстрем [1] и, в частности, показал, что

$$r_{n,s+1}(A\sqrt{n})=\sum_{\mu=s+1}^{n}\times$$

$$\times\binom{\mu-1}{s}P^{*(n-\mu)}*(P-\Phi)^{*(s+1)}*\Phi^{*(\mu-s-1)}(A\sqrt{n}). \tag{2}$$

Кроме того, если ξ имеет конечные моменты порядка $2+\delta$ $(0<\delta\leqslant 1)$ и ковариационная матрица V положительно определенная, то

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}\binom{n}{\nu}|\Phi^{*(n-\ )}*(P-\Phi)^{*\nu}(A\sqrt{n})\ =O\left((n^{-\frac{\delta}{2}}\ln^{\frac{}{2}}n)^{\nu}\right). \tag{3}$$

Здесь мы продолжим исследование разложения (1): во-первых, разность

$$\Delta_{n,\nu}(A)=\binom{n}{\nu}\Phi^{*(n-\nu)}*(P-\Phi)^{*\nu}(A\sqrt{n}) \tag{4}$$

оценим сверху относительно моментов случайного вектора ξ и относительно n; во-вторых, оценим остаточный член $r_{n,s+1}(A\sqrt{n})$ равномерно по всем A из класса $\mathfrak{A}$ выпуклых борелевских множеств.

Введем следующие обозначения: $\mathbf{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – векторы в R^k; $(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ – их скалярное произведение, $|\mathbf{x}|$ – длина вектора $\mathbf{x}$; $\mathbf{t}'$ –

вектор столбец; V^{-1} – обратная матрица к матрице V; $\mathbf{t}V\mathbf{t}'$ – квадратичная форма; C_1, C_2, – постоянные, зависящие только от k и δ.

Положим $Q(|\mathbf{x}|)$ – ограниченная на R^k плотность распределения $H(A)$ с характеристической функцией $h(|\mathbf{t}|)$ удовлетворяющей условие $h(|\mathbf{t}|)=0$ при $|\mathbf{t}|\geqslant 1$. Кроме того, пусть $Q(|\mathbf{x}|)=Q(e^{-\sqrt{|\mathbf{x}|}})$ при $|\mathbf{x}|\to\infty$.

Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть случайный вектор ξ имеет положительно определенную ковариационную матрицу V и конечные моменты порядка $2+\delta$ $(0<\delta\leqslant 1)$; тогда существует зависящая только от k и δ постоянная C_1, такая, что*

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}|\Delta_{n,\nu}(A)|\leqslant\left(\frac{C_1 M\left[\left((\xi-M\xi)\,V^{-1}(\xi-M\xi)'\right)^{\frac{2+\delta}{2}}\right]}{\quad}\right)^{\nu}. \tag{5}$$

Здесь ν – некоторое целое число.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и*

$$(V)\qquad \lim_{n\to\infty}\sup_{A\in\mathfrak{N}}\left|P^{*n}(A\sqrt{n})*H\left(A\left(\lambda(n)\sqrt{n}\right)^{s}\right)*\left(P(A\sqrt{n})-\Phi(A\sqrt{n})\right)\right|=0,$$

где $\lambda(n)$ – медленно возрастающая функция и $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(n)=\infty$; тогда

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}\Bigg|P^{*n}(A\sqrt{n})-\Phi(A)-\sum_{\nu=1}^{s}\times$$
$$\times\binom{n}{\nu}\Phi\left(A\sqrt{\frac{n}{n-\nu}}\right)*\left(P(A\sqrt{n})-\Phi(A\sqrt{n})\right)^{*\nu}\Bigg|=o\left(n^{-\frac{s}{2}}\right).$$

Следует отметить, что для функций распределений $P^{*n}(A\sqrt{n})=F^{*n}\times\times(\mathbf{x}\sqrt{n})$ теорема 2 доказана Г. Бергстремом в [1]. Правда, в его работе вместо $H\left(A\left(\lambda(n)\sqrt{n}\right)^{s}\right)$ стоит нормальное распределение $\Phi\left(A\,(a\sqrt{n})^{\frac{\delta s}{2}}\right)$, где $a>1$.

Замечание 1. *Очевидно, что условие (V) выполнено, когда распределение $P(A)$ абсолютно непрерывное, более того, оно выполнено, если характеристическая функция $g(\mathbf{t})$ случайного вектора ξ удовлетворяет условию Крамера*

$$(C)\qquad \overline{\lim_{|\mathbf{t}|\to\infty}}|g(\mathbf{t})|<1.$$

Замечание 2. *Условие (V) с $s=1$ выполнено, если модуль характеристической функции $g(\mathbf{t})$ равен единице только при $\mathbf{t}=\mathbf{0}$.*

Доказательство теоремы 1. Класс $\mathfrak{N}$ инвариантный относительно линейного невырожденного преобразования $\mathbf{x}=\mathbf{y}M^{-1}$, где матрица M удовлетворяет равенство $V=M'M$. Здесь M' – транспонированная матрица к M. Следовательно,

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}|\Delta_{n,s+1}(A)|=\sup_{A\in\mathfrak{N}}\left|\binom{n}{\nu}\bar{\Phi}^{*(n-\nu)}*(\bar{P}-\bar{\Phi})^{*\nu}(A\sqrt{n})\right|. \tag{6}$$

Здесь распределения $\bar{P}(A)$ и $\bar{\Phi}(A)$ имеют равные нулю математические ожидания и единичные матрицы ковариации.

Пусть $\gamma=(\xi-M\xi)M^{-1}$;

$$\eta=\begin{cases}\gamma & \text{при } |\gamma|\leqslant\sqrt{n},\\ 0 & \text{при } |\gamma|>\sqrt{n};\end{cases}$$

$\bar{\bar{P}}(A)$ — распределение случайного вектора η.

Поскольку

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}|\bar{P}(A)-\bar{\bar{P}}(A)|\leqslant P\{|\gamma|>\sqrt{n}\}\leqslant\frac{M[|\gamma|^{2+\delta}]}{n^{\frac{2+\delta}{2}}},$$

то

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}|(\bar{P}-\bar{\Phi})^{*\nu}*\bar{\Phi}^{*(n-\nu)}(A\sqrt{n})|=\sup_{A\in\mathfrak{N}}|(\bar{P}-\bar{\bar{P}}+\bar{\bar{P}}-\bar{\Phi})^{*\nu}*\bar{\Phi}^{*(n-\nu)}(A\sqrt{n})|=$$

$$=\sup_{A\in\mathfrak{N}}\left|\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\nu}{j}(\bar{P}-\bar{\bar{P}})^{*j}*(\bar{\bar{P}}-\bar{\Phi})^{*(\nu-j)}*\bar{\Phi}^{*(n-\nu)}(A\sqrt{n})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{\nu}\binom{\nu}{j}2^{j}\left(\frac{M[|\gamma|^{2+\delta}]}{n^{\frac{2+\delta}{2}}}\right)^{j}\sup_{A\in\mathfrak{N}}|(\bar{\bar{P}}-\Phi)^{*(\nu-j)}*\bar{\Phi}^{*(n-\nu)}(A\sqrt{n})|. \qquad (7)$$

С помощью этого соотношения мы переходим к доказательству неравенства (5) для распределения $\bar{\bar{P}}(A)$ усеченного случайного вектора η.

Сперва заметим, что для всех $n\geqslant\left(4M[|\gamma|^{2+\delta}]\right)^{\frac{2}{\delta}}$ ковариационная матрица Λ случайного вектора η положительно определенная. Действительно, для всех $\mathbf{t}\in R^k$ имеем

$$\left||\mathbf{t}|-\mathbf{t}\Lambda\mathbf{t}'\right|=\left|M\left[(\gamma,\mathbf{t})^2\right]-M\left[(\eta-M\eta,\mathbf{t})^2\right]\right|=$$

$$=\int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}}(\mathbf{x},\mathbf{t})^2\,d\bar{P}(\mathbf{x})+\Bigl(\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant\sqrt{n}}(\mathbf{x},\mathbf{t})\,d\bar{P}(\mathbf{x})\Bigr)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2|\mathbf{t}|^2}{n^{\frac{\delta}{2}}}M[|\gamma|^{2+\delta}].$$

Напомним, что

$$\int\limits_{R^k}(\mathbf{x},\mathbf{t})\,d\bar{P}(\mathbf{x})=0. \qquad (8)$$

Во всем дальнейшем будем считать, что $n\geqslant 2s$ и $n>\left(4M[|\gamma|^{2+\delta}]\right)^{\frac{2}{\delta}}$. В противоположном случае утверждение теоремы 1 тривиально.

Переходим к оценке

$$I_r=\sup_{A\in\mathfrak{N}}|(\bar{\bar{P}}-\bar{\Phi})^{*r}*\bar{\Phi}^{*(n-\nu)}(A\sqrt{n})| \qquad (9)$$

для $r=1,2,$

Для всех $n>\nu$ распределение $\bar{\bar{P}}^{*r}*\bar{\Phi}^{*(n-\nu)}(A\sqrt{n})$ и функция

$$\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\bar{\bar{P}}^{*j}*\Phi^{*(n+r-\nu-j)}(A\sqrt{n})$$

абсолютно непрерывные. Их плотности обозначим через $p(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$. Если $f(\mathbf{t})$ — характеристическая функция случайного вектора η, то

$$f^r\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{n-\nu}{2n}|\mathbf{t}|^2}=\int_{R^k}e^{i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})}p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

$$\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}f^j\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)e^{-\frac{n+r-\nu-j}{2n}|\mathbf{t}|^2}=\int_{R^k}e^{i(\mathbf{t},\,\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Очевидно

$$I_r=\frac{1}{2}\int_{R^k}|p(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\leqslant\frac{1}{2}\times$$
$$\times\left(\int_{R^k}\left(1+\sum_{m=1}^{k}|x_m|^{2(k+1)}\right)|p(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left(\int_{R^k}\frac{d\mathbf{x}}{1+\sum_{m=1}^{k}|x_m|^{2(k+1)}}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_2\sqrt{Y_0+\sum_{m=1}^{k}Y_m}. \tag{10}$$

Здесь

$$Y_0=\int_{R^k}|p(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x} \tag{11}$$

$$Y_m=\int_{R^k}|x_m|^{2(k+1)}|p(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x}. \tag{12}$$

По равенству Парсеваля получаем

$$Y_0=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R_k}\left|f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2n}}\right|^{2r}e^{-\frac{n-\nu}{n}|\mathbf{t}|^2}d\mathbf{t} \tag{13}$$

$$Y_m=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R^k}\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial t_m^{k+1}}\left[\left(f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2n}}\right)^r e^{-\frac{n-\nu}{2n}|\mathbf{t}|^2}\right]\right|^2d\mathbf{t}. \tag{14}$$

Нужные нам оценки

$$Y_0\leqslant C_3\left(\frac{M[|\gamma|^{2+\delta}]}{n^{\frac{2+\delta}{2}}}\right)^r \tag{15}$$

$$Y_m \leqslant C_4 \left(\frac{M[|\gamma|^{2+\delta}]}{n^{\frac{2+\delta}{2}}}\right)^r \qquad m=1,\ 2,\ \ldots,\ k, \tag{16}$$

очевидным образом следуют из следующей леммы.

Лемма 1. *Для всех* $\mathbf{t} \in R^k$ *имеем*

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial t_m^l}\left(f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2n}}\right)\right| \leqslant \frac{C_5(1+|\mathbf{t}|+|\mathbf{t}|^2+|\mathbf{t}|^3)M[|\gamma|^{2+\delta}]}{n^{\frac{2+\delta}{2}}}.$$

Здесь $l=0,1,\ldots,k+1$ и $m=1,2,\ldots,k$.

Доказательство леммы 1. Сперва докажем лемму 1 для $l=0$. По определению случайного вектора η имеем

$$f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)=\int\limits_{|\leqslant\sqrt{n}} e^{i\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\,\mathbf{x}\right)}d\bar{P}(\mathbf{x})+P\{|\gamma|>\sqrt{n}\}.$$

Следовательно,

$$f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2n}}=$$

$$=\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant\sqrt{n}} e^{i\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\,\mathbf{x}\right)}d\left(P(\mathbf{x})-\bar{\Phi}(\mathbf{x})\right)+P\{|\gamma|>\sqrt{n}\}-$$

$$-\int e^{i\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\,\mathbf{x}\right)}d\bar{\Phi}(\mathbf{x}).$$

Распределения $\bar{P}(A)$ и $\bar{\Phi}(A)$ имеют равные нулю математические ожидания и единичные матрицы корреляций, поэтому

$$f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2n}}=$$

$$=\int\limits_{|>\sqrt{n}}\left(\left(\frac{i\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\ \mathbf{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\ \mathbf{x}\right)^2\right)d\left(\bar{P}(\mathbf{x})-\bar{\Phi}(\mathbf{x})\right)-$$

$$-\frac{i}{6}\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant\sqrt{n}}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\ \mathbf{x}\right)^3 e^{-i\left(\frac{\varepsilon t}{\sqrt{n}},\,\mathbf{x}\right)}d\left(\bar{P}(\mathbf{x})-\bar{\Phi}(\mathbf{x})\right)+$$

$$+\int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}}\left(1-e^{i\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\,\mathbf{x}\right)}\right)d\bar{\Phi}(\mathbf{x}),$$

где $0<\varepsilon\leqslant 1$. Нетрудно проверить, что $M[|\gamma|^{2+\delta}]\geqslant k^{\frac{2+\delta}{2}}$ и

$$\int\limits_{R^k}|\mathbf{x}|^{2+\delta}d\bar{\Phi}(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\int\limits_{R^k}|\mathbf{x}|^{2+\delta}e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}}d\mathbf{x}\leqslant C_4.$$

Следовательно, для всех $\mathbf{t}\in R^k$

$$\left| f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2n}}\right| \leqslant \frac{C_6(1+|\mathbf{t}|+|\mathbf{t}|^2+|\mathbf{t}|^3)\,M[|\gamma|^{2+\delta}]}{n^{\frac{2+\delta}{2}}}.$$

При $l=0$ лемма 1 доказана.

В случае $l=1$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t_m}\left(f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2n}}\right)=$$

$$=\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant\sqrt{n}} \frac{ix_m}{\sqrt{n}}\, e^{i\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\,\mathbf{x}\right)}\, d\left(\bar{P}(\mathbf{x})-\bar{\Phi}(\mathbf{x})\right)-$$

$$-\int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}} \frac{ix_m}{\sqrt{n}}\, e^{i\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\,\mathbf{x}\right)}\, d\bar{\Phi}(\mathbf{x})=$$

$$=\int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}} \frac{ix_m}{\sqrt{n}}\left(1+\left(\frac{i\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\,\mathbf{x}\right)\right)d\left(\bar{P}(\mathbf{x})-\bar{\Phi}(\mathbf{x})\right)+$$

$$+\int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}} \frac{ix_m}{\sqrt{n}}\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\,\mathbf{x}\right)^2 e^{i\left(\frac{\varepsilon\mathbf{t}}{\sqrt{n}},\,\mathbf{x}\right)}\, d\bar{\Phi}(\mathbf{x}).$$

Отсюда вытекает, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial t_m}\left(f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2n}}\right)\right| \leqslant \frac{C_7(1+|\mathbf{t}|+|\mathbf{t}|^2)\,M[|\gamma|^{2+\delta}]}{n^{\frac{2+\delta}{2}}}$$

для $\mathbf{t}\in R^k$ и $m=1, 2, \ldots, k$.

Аналогично легко проверить, что

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial t_m^l}\left(f\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{|\mathbf{t}|^2}{2n}}\right)\right| \leqslant \frac{C_8(1+|\mathbf{t}|+|\mathbf{t}|^2)\,M[|\gamma|^{2+\delta}]}{n^{\frac{2+\delta}{2}}}$$

при $l=2, 3, \ldots, k+1$, и $\mathbf{t}\in R^k$. Лемма 1 доказана.

Так как $M[|\gamma|^{2+\delta}]=M\left[\left((\xi-M\xi)\,V^{-1}(\xi-M\xi)'\right)^{\frac{2+\delta}{2}}\right]$, то из (6, 7, 9—16) вытекает утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Следуя Г Бергстрему (см. доказательство теоремы 5 в [1]) методом математической индукции получаем

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}\left|r_{n,s+1}(A\sqrt{n})*H\left(A\left(\lambda(n)\sqrt{n}\right)^s\right)\right|=o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right). \qquad (17)$$

Подробный вывод этого соотношения не будем приводить, поскольку он очень громоздкий.

Пусть $(\mathring{A})_\varepsilon$ — ε — окрестность контура $\mathring{A}$ выпуклого измеримого множества A.

Далее используем следующую лемму Б. вон Бара [2].

Лемма. *Пусть* $Q_1(A)$ — *функция распределения и* $Q_2(A)$ — *функция ограниченной вариации в* R^k, *тогда равномерно по* $A \in \mathfrak{A}$

$$|Q_1(A)-Q_2(A)| \leqslant 2\sup_{B\in\mathfrak{N}}\left|[Q_1(B)-Q_2(B)] * H\left(\frac{B}{\varepsilon}\right)\right| +$$

$$+ C_9 \sup_{\mathbf{x}\in R^k} \left|\int_{(\mathring{A})_\varepsilon} dQ_2(\mathbf{y}+\mathbf{x})\right| \tag{18}$$

при $\varepsilon>0$.

Здесь предположим, что $r_{n,s+1}(A\sqrt{n}) = Q_1(A)-Q_2(A)$, где

$$Q_1(A) = P^{*n}(A\sqrt{n})$$

$$Q_2(A) = \sum_{\nu=0}^{s}\binom{n}{\nu}\Phi^{*(n-\nu)} * (P-\Phi)^{*\nu}(A\sqrt{n}).$$

Оценим интеграл

$$Y(A) = \sup_{\mathbf{x}\in R^k}\int_{(\mathring{A})_\varepsilon}|dQ_2(\mathbf{y}+\mathbf{x})|, \qquad A\in\mathfrak{A}.$$

Известно [2], что

$$\sup_{\mathbf{x}\in R^k}\Phi\left((\mathring{A})_\varepsilon+\mathbf{x}\right) \leqslant C_{10}\varepsilon \tag{19}$$

для всех $A\in\mathfrak{A}$. Здесь c_i, $i=10, 11$, зависят от k и от моментов распределения $P(A)$.

В силу теоремы 1

$$\left|\sum_{\nu=0}^{s}\binom{n}{\nu}\Phi^{*(n-\nu)} * (P-\Phi)^{*\nu}\left((\mathring{A})_\varepsilon\sqrt{n}\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=0}^{s}\binom{n}{\nu}\int_{R^k}\Phi^{*\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\nu\right)}\left((\mathring{A})_\varepsilon\sqrt{n}-\mathbf{x}\right)d\Phi^{*\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]-\nu\right)} * (P-\Phi)^{*\nu}(\mathbf{x})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\mathbf{x}\in R^k}\Phi\left((\mathring{A})_\varepsilon\sqrt{\frac{}{n-\left[\frac{n}{2}\right]-\nu}}+\mathbf{x}\right)\sum_{\nu=0}^{s}\binom{n}{\nu}2\sup_{B\in\mathfrak{N}}\times$$

$$\times\left|\Phi^{*\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]-\nu\right)} * (P-\Phi)^{*\nu}(B)\right| \leqslant C_{11}\sum_{\nu=0}^{s}n^{-\frac{\delta\nu}{2}}\varepsilon \leqslant C_{12}\varepsilon. \tag{20}$$

Из (19) и (20) вытекает, что равномерно по $A\in\mathfrak{A}$

$$Y(A) \leqslant C_{13}\varepsilon. \tag{21}$$

Пусть теперь $\varepsilon = \left(\lambda(n)\sqrt{n}\right)^{-1}$ тогда из (17), (18) и (21) немедленно получаем утверждение теоремы 2.

Доказательства замечаний 1 и 2. Очевидно

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{A\in\mathfrak{N}}\left|P^{*n}(A\sqrt{n}) * H\left(A\left(\lambda(n)\sqrt{n}\right)^s\right) * \left(P(A\sqrt{n})-\Phi(A\sqrt{n})\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\lim_{n\to\infty}\sup_{A\in\mathfrak{N}}\left|\left(P^{*n}(A\sqrt{n})-\Phi(A)\right) * H\left(A\left(\lambda(n)\sqrt{n}\right)^s\right)\right| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{R^k}|p_n(\mathbf{x})-\varphi_n(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x},$$

где $p_n(\mathbf{x})$ и $\varphi_n(\mathbf{x})$ — плотности, соответственно, распределений

$$P^{*n}(A\sqrt{n}) * H\left(A\left(\lambda(n)\sqrt{n}\right)^s\right)$$

$$\Phi(A) * H\left(A\left(\lambda(n)\sqrt{n}\right)^s\right)$$

Пусть $g(\mathbf{t})$ — характеристическая функция случайного вектора ξ. Тогда

$$p_n(\mathbf{x})-\varphi_n(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant(\lambda(n)\sqrt{n})^s} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x})}\left(g^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}\right)\times$$

$$\times h\left(\frac{\mathbf{t}}{(\lambda(n)\sqrt{n})^s}\right)d\mathbf{t}.$$

Случайный вектор ξ имеет конечные моменты порядка $2+\delta$ $(0<\delta\leqslant 1)$ и положительно определенную матрицу V ковариаций, поэтому

$$\left|g^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{2}}\right| \leqslant \frac{C_{14}|\mathbf{t}|^{2+\delta}M[|\xi|^{2+\delta}]}{n^{\frac{\delta}{2}}}e^{-\frac{\mathbf{t}V\mathbf{t}'}{16}}$$

при $|\mathbf{t}|\leqslant C_{15}\sqrt{n}$.

Теперь получаем

$$\sup_{\mathbf{x}\in R^k}|p_n(\mathbf{x})-\varphi_n(\mathbf{x})|\leqslant\frac{C_{16}}{\sqrt{n}}+\left(\frac{n}{(2\pi)^2}\right)^{\frac{k}{2}}\int\limits_{C_{14}\leqslant|\mathbf{t}|\leqslant\frac{(\lambda(n)\sqrt{n})^s}{\sqrt{n}}}|g(\mathbf{t})|^n\,d\mathbf{t}.$$

Если $g(\mathbf{t})$ удовлетворяет условию (C), то при $|\mathbf{t}|\geqslant C_{16}>0$ существует положительная постоянная c такая, что

$$|g(\mathbf{t})|\leqslant e^{-c}.$$

Следовательно,

$$n^{\frac{k}{2}}\int\limits_{C_{14}\leqslant|\mathbf{t}|\leqslant\frac{(\lambda(n)\sqrt{n})^s}{\sqrt{n}}}|g(\mathbf{t})|^n\,d\mathbf{t}=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad (22)$$

Получаем

$$\sup_{\mathbf{x}\in R^k} |p_n(\mathbf{x})-\varphi_n(\mathbf{x})| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{23}$$

Поскольку

$$\int\limits_{|x_1|\leqslant \ln n} \cdots \int\limits_{|x_k|\leqslant \ln n} |p_n(\mathbf{x})-\varphi_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = o(1), \qquad n\to\infty,$$

то из (23) вытекает

$$\int\limits_{R^k} |p_n(\mathbf{x})-\varphi_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}\to 0, \qquad n\to\infty.$$

Замечание 1 доказано.

Утверждение замечания 2 немедленно следует из (23) и из следующей леммы.

Лемма 2. *Если модуль характеристической функции $g(\mathbf{t})$ равен единице только при $\mathbf{t}=0$, то*

$$n^{\frac{k}{2}} \int\limits_{C_{16}\leqslant |\mathbf{t}|\leqslant \lambda(n)} |g(\mathbf{t})|^n d\mathbf{t} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Доказательство леммы 2. В случае

$$\overline{\lim_{|\mathbf{t}|\to\infty}} |g(\mathbf{t})| < 1$$

утверждение леммы 2 следует из соотношения (22).

Пусть

$$\overline{\lim_{|\mathbf{t}|\to\infty}} |g(\mathbf{t})| = 1.$$

Поскольку $|g(\mathbf{t})|<1$ для всех $|\mathbf{t}|\geqslant C_{16}>0$, то

$$a(|\mathbf{t}|) = \frac{1}{1-\max\limits_{C_{16}\leqslant|\tau|\leqslant|\mathbf{t}|} |g(\tau)|}.$$

Функция $a(|\mathbf{t}|)$ непрерывна и не убывает, кроме того, $\lim\limits_{|\mathbf{t}|\to\infty} a(|\mathbf{t}|)=\infty$, и

$$I_n = n^{\frac{k}{2}} \int\limits_{C_{16}\leqslant |\mathbf{t}|\leqslant \lambda(n)} |g(\mathbf{t})|^n d\mathbf{t} \leqslant n^{\frac{k}{2}} \int\limits_{C_{16}\leqslant |\mathbf{t}|\leqslant \lambda(n)} \left(1-\frac{1}{a(|\mathbf{t}|)}\right)^n d\mathbf{t}.$$

В случае $a(n)<\sqrt{n}$, полагая $\lambda(n)=n$, получаем

$$I_n \leqslant n^{\frac{k}{2}} \left(1-\frac{1}{a(n)}\right)^n \int\limits_{|\mathbf{t}|\leqslant n} d\mathbf{t} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Если $a(n)\geqslant\sqrt{n}$, то

$$I_n \leqslant C_{17} n^{\frac{k}{2}} \left(1-\frac{1}{a(\lambda(n))}\right)^n (\lambda(n))^k$$

Монотонная и непрерывная функция $a(|\mathbf{t}|)$ принимает все значения больше

$a(C_{18})$. Поэтому для достаточно больших n можно определить $\lambda(n)$ с помощью равенства

$$a\left(\lambda(n)\right)=\sqrt{n}$$

Имеем $\lambda(n)<n$ и

$$I_n \leqslant n^2 C_{18}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n n^k = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Лемма 2 доказана.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса
Будапештский Государственный
университет им. Л. Этвеша

Поступило в редакцию
6.I.1970

Литература

1. H. Bergström, On asymptotic expansions of probability functions, Skand. Aktuartiedskr. H. 1–2, (1951), 1–34.
2. B. von Bahr, Multi-dimensional integral limit theorems, Arkiv för Math., Bd. 7, N 6 (1967), 71–88.

n KARTŲ KARTOTINĖS *k*-MAČIO PASISKIRSTYMO KOMPOZICIJOS ASIMPTOTINIS IŠDĖSTYMAS

A. Bikelis, J. Moderudi

(Reziumė)

Tarkime, kad k-matis atsitiktinis vektorius ξ turi teigiamai apibrėžtą kovariacijų marticą V ir jo $2+\delta$ $(0<\delta\leqslant 1)$ eilės momentai yra baigtiniai. Jeigu galioja sąlyga

$$(V)\ \lim_{n\to\infty}\sup_{A\in\mathfrak{N}}\left|P^{*n}(A\sqrt{n}) * H\left(A\left(\lambda(n)\sqrt{n}\right)^s\right) * \right.$$
$$\left. * \left(P(A\sqrt{n})-\Phi(A\sqrt{n})\right)\right|=0,$$

kur $\lambda(n)$ – lėtai didėjanti funkcija ir $\lim_{n\to\infty}\lambda(n)=\infty$, tuomet

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}\left|P^{*n}(A\sqrt{n})-\sum_{\nu=0}^{s}\binom{n}{\nu}\Phi^{*(n-\nu)}(A\sqrt{n}) * \right.$$
$$\left. * \left(P(A\sqrt{n})-\Phi(A\sqrt{n})\right)^{*\nu}\right|=o\left(n^{-\frac{s}{2}}\right).$$

Čia $\mathfrak{N}$ – Borelio aibių klasė erdvėje R^k; $\mathfrak{A}$ – iškilių aibių klasė; $P(A)$ – atsitiktinio vektoriaus $\xi-M\xi$ pasiskirstymas; $\Phi(A)$ – k-matis normalinis pasiskirstymas su parametrais $M\xi$, V; $*$ – kompozicijos ženklas; s – sveikas skaičius.

Taip pat darbe įvertinta asimptotikos eilė, t. y.

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}\left|\binom{n}{\nu}\Phi^{*(n-\nu)}(A\sqrt{n})*(P-\Phi)^{*\nu}(A\sqrt{n})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{C_1M\left[\left((\xi-M\xi)V^{-1}(\xi-M\xi)'\right)^{\frac{2+\delta}{2}}\right]}{n^{\frac{\delta}{2}}}\right)^{\nu}$$

Konstanta C_1 priklauso tik nuo δ ir k; $\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'$ — kvadratinė forma.

ON ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE CONVOLUTION OF n-MULTI-DIMENSIONAL DISTRIBUTION FUNCTIONS

A. Bikelis, J. Mogyoródi

(*Summary*)

Let ξ be a k-dimensional random vector with positive covariance matrix V. We suppose that the moments of order $2+\delta$ $(0<\delta\leqslant 1)$ are finite. If

$$(V)\lim_{n\to\infty}\sup_{A\in\mathfrak{N}}\left|P^{*n}(A\sqrt{n})*H\left(A\left(\lambda(n)\sqrt{n}\right)^{s}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(P(A\sqrt{n})-\Phi(A\sqrt{n})\right)\right|=0,$$

holds, then

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}\left|P^{*n}(A\sqrt{n})-\sum_{\nu=0}^{s}\binom{n}{\nu}\Phi^{*(n-\nu)}(A\sqrt{n})\times\right.$$

$$\left.\times\left(P(A\sqrt{n})-\Phi(A\sqrt{n})\right)^{*\nu}\right|=o\left(n^{-\frac{s}{2}}\right),$$

where $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(n)=\infty$; $\mathfrak{N}$ a class of sets in R^k; $\mathfrak{A}$ a class of convex sets; $P(A)$ the distribution function of random vector $\xi-M\xi$; $\Phi(A)$ the multi-dimensional normal distribution function with parameters $M\xi$, V; $*$ the sign of convolution; s an integer.

Also in this paper it is given the estimation

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}\left|\binom{n}{\nu}\Phi^{*(n-\nu)}(A\sqrt{n})*(P-\Phi)^{*\nu}(A\sqrt{n})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{C_1M\left[\left((\xi-M\xi)V^{-1}(\xi-M\xi)'\right)^{\frac{2+\delta}{2}}\right]}{n^{\frac{\delta}{2}}}\right)^{\nu}$$

With constant C_1, depending only of δ and k; $\mathbf{x}V^{-1}\mathbf{x}'$ a quadratic form.