1970

УДК – 512.25+519.3 30.115

БЕСКОНЕЧНОШАГОВЫЙ ДИХОТОМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Бистрицкас

Более общая задача о „золотодобыче" приводит к рассмотрению функционального уравнения

$$f(x, y)=\max\begin{bmatrix} A: ax+by+p_1 f(r_1 x, r_2 y), \\ B: cx+dy+p_2 f(t_1 x, t_2 y) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где параметры a, b, c, d, p_i, r_i; $i=1, 2$ удовлетворяют неравенствам $0\leqslant p_1 r_i$, $p_2 t_i<1$; $0\leqslant p_i$, $|a|$, $|b|$, $|c|$, $|d|$, $x, y<\infty$. Р. Беллманом (см. [1] стр. 91) найдено решение уравнения (1), когда $b=c=0$, $r_2=t_1=1$, $0\leqslant r_1$, $t_2\leqslant 1$. Ранее автором [2–3] изучались дихотомические процессы решения имеющие вид

$$f(x, y)=\max\begin{bmatrix} A: A(x)+p_1 f(r_1 x, y), \\ B: B(y)+p_2 f(x, r_2 y) \end{bmatrix}, \qquad 0\leqslant p_i, r_i<1,$$

когда функции $A(x)$ и $B(y)$ являются, либо монотонными, либо выпуклыми. Здесь доказывается теорема существования и единственности для уравнения (1) и дается его решение в пространстве политик.

Теорема 1. *Существует единственное решение уравнения* (1) *ограниченное в любом прямоугольнике* $0\leqslant x\leqslant \bar{X}$, $0\leqslant y\leqslant \bar{Y}$.

Это решение непрерывно и может быть получено как предел последовательности $f_N(x, y)$, *определенной следующим образом*:

$$f_{N+1}(x, y)=\max\begin{bmatrix} A: ax+by+p_1 f_N(r_1 x, r_2 y), \\ B: cx+dy+p_2 f_N(t_1 x, t_2 y) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $N\geqslant 0$, $f_0(x, y)$ – *ограниченная функция в любой конечной части области* $x, y\geqslant 0$.

Доказательство. Сначала докажем теорему в случае, когда функция $f_0(x, y)=\text{const}$. Обозначим

$$T_1(f_N)=ax+by+p_1 f_N(r_1 x, r_2 y),$$

$$T_2(f_N)=cx+dy+p_2 f_N(t_1 x, t_2 y),$$

$N\geqslant 1$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$f_{N+1}(x, y)=\max[T_1(f_N), T_2(f_N)].$$

Пусть $i=i(N)=i(N, x, y)$ – индекс, при котором достигается максимум в выражении $\max\limits_i T_i\Big(f_N(x, y)\Big)$. Тогда

$$f_{N+1}(x, y)=T_{i(N+1)}(f_N)\geqslant T_{i(N+2)}(f_N)$$

$$f_{N+2}(x,\ y)=T_{i\,(N+2)}(f_{N+1})\geqslant T_{i\,(N+1)}(f_{N+1}).$$

Поэтому

$$|f_{N+2}(x,\ y)-f_{N+1}(x,\ y)|\leqslant\max|T_i(f_N)-T_i(f_{N+1})|\leqslant$$

$$\leqslant\max\begin{bmatrix}p_1|f_N(r_1x,\ r_2y)-f_{N+1}(r_1x,\ r_2y)|,\\ p_2|f_N(t_1x,\ t_2y)-f_{N+1}(t_1x,\ t_2y)|\end{bmatrix},\qquad N\geqslant 0.$$

В силу однородности функций $f_N(x, y)$ получаем, что

$$|f_{N+2}-f_{N+1}|\leqslant$$

$$\leqslant\max\begin{bmatrix}p_1r\left|f_N\left(\frac{r_1}{r}x,\ \frac{r_2}{r}y\right)-f_{N+1}\left(\frac{r_1}{r}x,\ \frac{r_2}{r}y\right)\right|,\\ p_2t\left|f_N\left(\frac{t_1}{t}x,\ \frac{t_2}{t}y\right)-f_{N+1}\left(\frac{t_1}{t}x,\ \frac{t_2}{t}y\right)\right|\end{bmatrix}(t,r>0),$$

где $r=\max(r_1, r_2)$, $t=\max(t_1, t_2)$. Обозначим

$$u_{N+1}(x,\ y)=\max_{\substack{0\leqslant u\leqslant x\\ 0\leqslant v\leqslant y}}|f_{N+2}(u,\ v)-f_{N+1}(u,\ v)|.$$

Тогда из последнего неравенства следует, что

$$u_{N+1}(x,\ y)\leqslant qu_N(x,\ y),$$

где $q=\max(p_1r,\ p_2t)$. Далее теорема доказывается аналогично теореме Р. Беллмана (см. [1], стр. 87).

Остается рассмотреть случай, когда функция $f_0(x, y)\neq\text{const}$, но является ограниченной в любой конечной части области $x, y\geqslant 0$. Тогда существуют такие две константы K_1 и K_2, что функции $f_N^1(x, y)$ и $f_N^2(x, y)$, полученные из рекуррентного соотношения (2) при соответствующих начальных функциях K_1 и K_2, удовлетворяют неравенствам

$$f_N^1(x,\ y)\leqslant f_N(x,\ y)\leqslant f_N^2(x,\ y),\quad N\geqslant 1.$$

При помощи доказанной части получаем доказательство теоремы.

Обозначим

$f_{A^lB^m}(x,\ y)$ — доход бесконечношагового процесса решения с фиксированной политикой A^lB^m на первых $m+l$ шагах и оптимальной на следующих.

Теорема 2. *Пусть $p,\ q>0$, где*

$$p=a(1-p_2t_1)-c(1-p_1r_1),$$

$$q=d(1-p_1r_2)-b(1-p_2t_2).\tag{3}$$

Тогда:

а) *если* $r_1\leqslant r_2$ и $t_1\geqslant t_2$, *то*

$$f(x,\ y)=\begin{bmatrix}f_A(x,\ y)\ \textit{для}\ qy\leqslant px,\\ f_B(x,\ y)\ \textit{для}\ qy\geqslant px;\end{bmatrix}\tag{4}$$

б) *если* $r_1\geqslant r_2$ и $t_1\leqslant t_2$, *то*

$$f(x,\ y)=\begin{bmatrix}f_{A^\infty}(x,\ y)\ \textit{для}\ 0\leqslant y\leqslant Mx,\\ f_{B^\infty}(x,\ y)\ \textit{для}\ y\geqslant Mx,\end{bmatrix}\tag{5}$$

где

$$M=\frac{p(1-p_2t_2)(1-p_1r_2)}{q(1-p_2t_1)(1-p_1r_1)};$$

в) *если* $r_1 \geqslant r_2$ *и* $t_1 \geqslant t_2$, *то*

$$f(x,\ y)=\begin{cases} f_{A^\infty}(x,\ y) \text{ для } 0 \leqslant y \leqslant Lx, \\ f_B(x,\ y) \text{ для } y \geqslant Lx, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$L=\frac{p(1-p_1r_2)}{q(1-p_2r_1)};$$

г) *если* $r_1 \leqslant r_2$ и $t_1 \leqslant t_2$, *то*

$$f(x,\ y)=\begin{cases} f_A(x,\ y) \text{ для } 0 \leqslant y \leqslant \bar{L}x, \\ f_{B^\infty}(x,\ y) \text{ для } y \geqslant \bar{L}x, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\bar{L}=\frac{p(1-p_2t_2)}{q(1-p_2t_1)}.$$

Если $p,\ q<0$, *то выборы* A и B, *параметры* p_1 *и* p_2, a и c, b и d, r_i *и* t_i *меняются местами в соотношениях* (4—7).

Если $p \geqslant 0$, $q \leqslant 0$, *то*

$$f(x,\ y)=f_{A^\infty}(x,\ y) \text{ для всех } x,\ y \geqslant 0. \tag{8}$$

Если $p \leqslant 0$, $q \geqslant 0$, *то*

$$f(x,\ y)=f_{B^\infty}(x,\ y) \text{ для всех } x,\ y \geqslant 0. \tag{9}$$

Теорему докажем при помощи следующих лемм.

Лемма 1. *Если* p *и* $q>0$, *то*

$$f_{AB}(x,\ y)>f_{BA}(x,\ y) \Leftrightarrow qy<px, \tag{10}$$

$$f_{AB}(x,\ y)<f_{BA}(x,\ y) \Leftrightarrow qy>px \tag{11}$$

$$f_{AB}(x,\ y)=f_{BA}(x,\ y) \Leftrightarrow qy=px. \tag{12}$$

Доказательство. Из определения f_{AB} и f_{BA} имеем, что

$$f_{AB}(x,\ y)=ax+by+p_1r_1cx+p_1r_2dy+p_1p_2f(r_1t_1x,\ r_2t_2y)$$

$$f_{BA}(x,\ y)=cx+dy+p_2t_1ax+p_2t_2by+p_1p_2f(r_1t_1x,\ r_2t_2y).$$

Согласно (3) на прямой $qy=px$ имеет место равенство

$$f_{AB}(x,\ y)=f_{BA}(x,\ y).$$

Так как $p,\ q>0$, то $0<\frac{p}{q}<\infty$ и для $x>0$

$$f_{AB}(x,\ 0)>f_{BA}(x,\ 0).$$

Таким образом, ввиду линейности функции $f_{AB}(x,y)-f_{BA}(x,\ y)$ по x и y получаем соотношения (10—12).

Обозначим

$A^lB^m(x,y)$ — доход $l+m$ шагового процесса решения при фиксированной политике A^lB^m в точке $(x,\ y)$.

Аналогично лемме 1 доказывается следующая.

Лемма 2. *Если* $p>0$ и $q>0$, *то*

$$\left.\begin{aligned} B^k A^\infty(x, y) \leqslant B^{k+1} A^\infty(x, y) \Leftrightarrow y \geqslant \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^k Lx, \\ B^k A^\infty(x, y) \geqslant B^{k+1} A^\infty(x, y) \Leftrightarrow y \leqslant \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^k Lx \end{aligned}\right] (t_2>0) \tag{13}$$

$$A^\infty(x, y) \geqslant B^\infty(x, y) \Leftrightarrow y \leqslant Mx. \tag{14}$$

Лемма 3. *Пусть* $p>0$ *и* $q>0$. *Тогда при достаточно большом* N *удовлетворяются следующие соотношения:*

$$A^N(x, y) \geqslant B^N(x, y) \Leftrightarrow 0 \leqslant y \leqslant M_N x \tag{15}$$

$$A^N(x, y) \leqslant B^N(x, y) \Leftrightarrow y \geqslant M_N x, \tag{16}$$

где M_N — *коэффициент прямой*

$$A^N(x, y) = B^N(x, y).$$

Доказательство. По определению

$$A^N(1, 0) = \frac{a(1-p_1^N r_1^N)}{1-p_1 r_1}$$

$$B^N(1, 0) = \frac{c(1-p_2^N t_1^N)}{1-p_2 t_1}$$

Используя предположение $p>0$, имеем, что

$$A^N(1, 0) > B^N(1, 0)$$

при достаточно большом N. Аналогично из предположения $q>0$ следует, что

$$A^N(0, 1) < B^N(0, 1).$$

Так как на прямой $y = M_N x$,

$$A^N(x, y) = B^N(x, y),$$

то в силу линейности функций $A^N(x, y)$ и $B^N(x, y)$ по x и y получаем соотношения (15) и (16).

Лемма 4. *Пусть функция* $f_n(x, y)$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$f_{n+1}(x, y) = \max \begin{bmatrix} A: ax+by+p_1 f_n(r_1 x, r_2 y), \\ B: cx+dy+p_2 f_n(t_1 x, t_2 y) \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где

$$n \geqslant 0;\ f_0(x, y) = \max[A^N(x, y), B^N(x, y)].$$

Тогда при достаточно большом N *имеют место равенства*

$$\begin{aligned} f_n(x, 0) &= A^{N+n}(x, 0) \text{ при } p>0, \\ f_n(x, 0) &= B^{N+n}(x, 0) \text{ при } p<0 \qquad (x \geqslant 0) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} f_n(0, y) &= B^{N+n}(0, y) \text{ при } q>0, \\ f_n(0, y) &= A^{N+n}(0, y) \text{ при } q<0. \end{aligned} \tag{19}$$

Доказательство. Докажем соотношение (18). Согласно лемме 3

$$f_0(x, 0) = \max[A^N(x, 0), B^N(x, 0)] = A^N(x, 0).$$

Таким образом, в силу (17) имеем, что

$$f_1(x,\ 0)=\max\left[A^{N+1}(x,\ 0),\ BA^N(x,\ 0)\right]=$$

$$=\max\left[\frac{a(1-p_1^{N+1}r_1^{N+1})}{1-p_1r_1}\ x,\ cx+\frac{p_2at_1(1-p_1^Nr_1^N)}{1-p_1r_1}\ x\right].$$

Так как

$$A^{N+1}(x,\ 0)-BA^N(x,\ 0)\geqslant\frac{x}{1-p_1r_1}\ [a(1-p_1t_1)(1-p_1^Nr_1^N)-c(1-p_1r_1)],$$

то по предположению $p>0$

$$f_1(x,\ 0)=A^{N+1}(x,\ 0)$$

при достаточно большом N. Отсюда, итерируя, получаем равенство (18).

Остальные соотношения леммы доказываются аналогично.

Доказательство теоремы. Предположим, что $x\neq 0$ и $y\neq 0$, ибо в случае $x=0$ или $y=0$ утверждение теоремы тривиально следует из леммы 4. Покажем, что

$$f(x,\ y)=f_A(x,\ y)\ \text{для}\ qy\leqslant px \tag{20}$$

в случае, когда $t_1>t_2$ и $p,\ q>0$. Допустим противное, что найдется такая точка $(x^\circ,\ y^\circ)$, что $qy^\circ\leqslant px^\circ$ и

$$f(x^0,\ y^0)=f_B(x^0,\ y^0)>f_A(x^0,\ y^0). \tag{21}$$

В силу неравенства (10) леммы 1 имеем, что

$$f(x^0,\ y^0)=f_{B'}(x^0,\ y^0).$$

Так как

$$f_{B'}(x^0,\ y^0)=cx^0+dy^0+p_2f_B(t_1x^0,\ t_2y^0)$$

и $qt_2y^\circ<pt_1x^\circ$, то по той же самой лемме следует, что

$$f_B(t_1x^0,\ t_2y^0)=f_{B'}(t_1x^0,\ t_2y^0).$$

Итерируя, находим, что

$$f(x^0,\ y^0)=f_{B^\infty}(x^0,\ y^0)=ax^0+by^0+\qquad+p_2^nf_{B^\infty}(t_1^nx^0,\ t_2^ny^0).$$

Следовательно, для всех точек $(x',\ y')$ типа $(t_1^nx^0,\ t_2^ny^0)$

$$f(x',\ y')=f_{B^\infty}(x',\ y')>f_{A^\infty}(x',\ y').$$

Подставляя выражения f_{A^∞} и f_{B^∞}, получаем, что

$$\frac{cx'}{1-p_2t_1}+\frac{dy'}{1-p_2t_2}>\frac{ax'}{1-p_1r_1}+\frac{by'}{1-p_1r_2}\ .$$

Полученное неравенство при достаточно большом n противоречит предположению $p>0$. Поэтому верно соотношение (20).

Аналогично доказывается, что

$$f(x,\ y)=f_B(x,\ y)\ \text{для}\ qy\geqslant px \tag{22}$$

при $r_1<r_2$ и $p,\ q>0$. Итак, получаем утверждение теоремы в случае, когда $r_1<r_2,\ t_1>t_2$ и $p,\ q>0$.

Рассмотрим случай, когда $r_1 > r_2 > 0$, $t_1 < t_2$ и $p, q > 0$. Методом приближения в пространстве функций дохода (см. [1], стр. 111) докажем, что

$$f(x, y) = f_{A^\infty}(x, y), \text{ когда } 0 \leqslant y \leqslant Mx. \tag{23}$$

Согласно теореме 1 функция $f(x, y)$ является пределом последовательности функций $f_N(x, y)$, удовлетворяющих уравнению (2), при начальной функции

$$f_0(x, y) = \max[A^N(x, y), B^N(x, y)].$$

Следовательно,

$$f_1(x, y) = [A^{N+1}, B^{N+1}, AB^N, BA^N]. \tag{24}$$

Сравнивая

$$B^{N+1}(x, y) = cx + dy + p_2 B^N(t_1 x, t_2 y)$$

$$BA^N(x, y) = cx + dy + p_2 A^N(t_1 x, t_2 y),$$

ввиду леммы 3 получаем, что

$$B^{N+1}(x, y) \geqslant BA^N(x, y) \Leftrightarrow y \geqslant \frac{t_1}{t_2} M_N x \tag{25}$$

при достаточно большом N. По той же самой лемме следует, что

$$A^{N+1}(x, y) \geqslant AB^N(x, y) \Leftrightarrow y \leqslant \frac{r_1}{r_2} M_N x$$

$$A^{N+1}(x, y) \geqslant B^{N+1}(x, y) \Leftrightarrow y \leqslant M_{N+1} x. \tag{26}$$

Так как при достаточно большом N

$$\frac{r_1}{r_2} M_N \geqslant M_{N+1},$$

то из последних двух неравенств следует, что

$$A^{N+1}(x, y) \geqslant \max[AB^N(x, y), B^{N+1}(x, y)], \tag{27}$$

когда $y \leqslant M_{N+1} x$. Кроме того, при достаточно большом N

$$\frac{t_1}{t_2} M_N \leqslant M_{N+1}.$$

Поэтому из неравенств (26) и (25) имеем, что

$$A^{N+1}(x, y) \geqslant B^{N+1}(x, y) \geqslant BA^N(x, y),$$

когда $\frac{t_1}{t_2} M_N x \leqslant y \leqslant M_{N+1} x$. Отсюда и из (27) и (24) получаем

$$f_1(x, y) = A^{N+1}(x, y) \text{ для } \frac{t_1}{t_2} M_N x \leqslant y \leqslant M_{N+1} x.$$

Так как функция $f_1(x, y)$ линейна по x и y, то, используя (18), из последнего соотношения получаем, что

$$f_1(x, y) = A^{N+1}(x, y) \text{ для } 0 \leqslant y \leqslant M_{N+1} x.$$

Итерируя, имеем

$$f_n(x, y) = A^{N+n}(x, y) \text{ для } y \leqslant M_{N+n} x.$$

Аналогично доказывается, что

$$f_n(x, y)=B^{N+n}(x, y) \text{ для } y \geqslant M_{N+n}x.$$

Переходя к пределу, когда $n \to \infty$, в последних двух равенствах на основании теоремы 1 получаем (5) в случае $r_1 > r_2$, $t_1 < t_2$ и p, $q > 0$.

Пусть $r_1 > r_2$, $t_1 > t_2$ и p, $q > 0$. Тогда в силу (20)

$$f(x, y)=f_A(x, y)=ax+by+p_1 f(r_1x, r_2y),$$

когда $qy=px$. Так как $r_1 > r_2$, то $qr_2y \leqslant pr_1x$ и

$$f(r_1x, r_2y)=f_A(r_1x, r_2y).$$

Итерируя, находим, что

$$f(x, y)=f_{A^\infty}(x, y) \text{ для } qy \leqslant px. \tag{28}$$

Кроме того, согласно лемме 1 при $qy > px$

$$f(x, y) \neq f_{AB}(x, y).$$

Таким образом, ввиду (28) следует, что, если $qy > px$ и $f(x, y)=f_A(x, y)$, то

$$f(x, y)=f_A(x, y). \tag{29}$$

Следовательно,

$$f(x, y)=\max[f_{A^\infty}, f_{B^\infty}, f_{BA^\infty}, f_{B^2A^\infty}, \quad .] \tag{30}$$

для всех x, $y \geqslant 0$. Так как $t_2 < t_1$, то

$$L < L\,\frac{1-p_2t_2}{1-p_2t_1}=M$$

и при помощи леммы 2 имеем, что

$$f_{A^\infty}(x, y) \geqslant \max[f_{B^\infty}, f_{BA^\infty}, f_{B^2A^\infty}, \ldots]$$

при $y \leqslant Lx$. Используя (15), получаем, что

$$f_{A^\infty}(x, y) \leqslant f_{BA^\infty}(x, y) \text{ для } y \geqslant Lx.$$

Последние два неравенства и равенство (30) дают соотношение (6) для $r_1 > r_2$ и $t_1 > t_2$.

Случай, когда $r_1 < r_2$, $t_1 < t_2$ и p, $q > 0$ аналогичен предыдущему.

Пусть $p > 0$ и $q < 0$. Тогда согласно лемме 4

$$f_n(x, 0)=A^{N+n}(x, 0)$$

$$f_n(0, y)=A^{N+n}(0, y)$$

для $n \geqslant 1$ и при достаточно большом N. Так как функция $f_n(x, y)$ линейна по x и y, то имеем

$$f_n(x, y)=A^{N+n}(x, y) \text{ для всех } x, y \geqslant 0.$$

Переходя к пределу, когда $n \to \infty$, получаем (8).

Случаи, когда, либо $p < 0$ и $q < 0$, либо $p < 0$ и $q > 0$ аналогичны соответствующим случаям p, $q > 0$ и $p > 0$, $q < 0$.

Если хотя бы один из параметров $r_1 - r_2$, $t_1 - t_2$ равен нулю, то рассматриваем новое функциональное уравнение с параметрами $\bar{r}_i = r_i \pm \varepsilon$, $\bar{t}_i = t_i \pm \varepsilon$, где ε – положительное достаточно малое число, при котором удовлетворяются ограничения $p_1 \bar{r}_i < 1$, $p_2 \bar{t}_i < 1$ и новые $\bar{p}$, $\bar{q} > 0$. Так как функции $f_N(x, y)$ являются непрерывными по t_i, r_i и равномерно сходятся к функции $f(x, y)$, когда $N \to \infty$, то функция $f(x, y)$ является непрерывной по t_i и r_i. Таким образом, переходя к пределу, когда $\varepsilon \to 0$, в соответствующих соотношениях (4–7) получаем доказательство теоремы в случае, когда, либо $r_1 = r_2$, либо $t_1 = t_2$, либо $r_1 = r_2$, $t_1 = t_2$.

Если хотя бы один из p, q равен нулю, то рассматриваем процесс решения с такими параметрами $\bar{r}_i = r_i + \varepsilon$, $\bar{t}_i = t_i + \varepsilon$, чтобы было $\bar{p} \neq 0$ и $\bar{q} \neq 0$. Для нового процесса применяем доказаную часть теоремы и переходим к пределу, когда $\varepsilon \to 0$.

Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
20.VIII.1969

Литература

1. Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, М., 1960.
2. В. Б. Бистрицкас, Политомическая задача динамического программирования для монотонных функций, Лит. матем. сб., **VIII**, 2 (1968), 225–232.
3. В. Б. Бистрицкас, Дихотомическая задача динамического программирования для строго выпуклых функций, **I**, **II**, **III**, Лит. матем. сб., **VIII**, 3 (1968), 423–435; Лит. матем. сб., **VIII**, 4 (1968), 685–697; Лит. матем. сб., **IX**, 1 (1969), 15–26.

DICHOTOMINIS DINAMINIO PROGRAMAVIMO SPRENDIMO PROCESAS SU BEGALINIU ŽINGSNIŲ SKAIČIUMI

V. Bistrickas

(*Reziumė*)

Darbe įrodoma (1) funkcionalinės lygties sprendinio egzistencijos ir vienatinumo teorema. Surandamas politikos funkcijų erdvėje minėtos lygties sprendinys.

TWO-CHOICE PROBLEM OF DYNAMIC PROGRAMMING FOR INFINITE STAGE PROCESS

V. Bistrickas

(*Summary*)

Existance and unique theorem is proved for the (1) functional equation. A solution is given in the political space for this equation.