X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

УДК – 518.9

КООПЕРАТИВНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКАЯ ИГРА ДВУХ ЛИЦ

С. Вакринене

Рассматривается следующая динамическая игра. В начальный момент времени игроки находятся в позиции (p_0, r_0). В k-ый момент времени первый игрок выбирает $i_k \in \{1, \quad m\}$, а второй одновременно выбирает $j_k \in \{1, \dots, n\}$. Тогда позиция (p, r) изменяется согласно формулам

$$p_{k+1} = p_k + a_{i_k j_k},$$

$$r_{k+1} = r_k + b_{i_k j_k},$$

где $A = \| a_{ij} \|$, $B = \| b_{ij} \|$ – заданные матрицы. Пусть игра останавливается, когда точка (p, r) выходит из некоторого круга L с центром в начале координат, а матрицы A и B такие, что $a_{ij} \geqslant 0$, $b_{ij} \geqslant 0$, $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (0, 0)$. Эти условия гарантируют блуждание точки (p, r) в первом квадранте и окончание игры за конечное число шагов.

На контуре круга L зададим две функции $M(p, r)$ и $N(p, r)$ – выигрыши игроков – следующим образом. Разобьем контур на три части. В каждой из частей выигрыши постоянные и такие, что выигрыши $\bar{M}$ и $\bar{N}$, где $\bar{M} = \max\limits_{(p, r)} M(p, r)$ $\bar{N} = \max\limits_{(p, r)} N(p, r)$, достигаются на различных частях контура, а выигрыши, $\underline{M}$ и $\underline{N}$, где $\underline{M} = \min\limits_{(p, r)} M(p, r)$ $\underline{N} = \min\limits_{(p, r)} N(p, r)$ – на той же самой части контура. Для того, чтобы деление области L на части имело смысл, т. е. чтобы игра не закончилась за один шаг, предположим, что радиус области L значительно больше величины $\max \sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2}$. Описанную игру обозначим через Г.

Пусть игра Г является кооперативной, т. е., игрокам разрешено сообщаться и применять совместные смешанные стратегии.

Через точки деления контура области L на части проведем прямые, параллельные координатным осям. Они разобьют область L на три треугольника с другой окружности в качестве гипотенузы и три прямоугольника. Очевидно, что в треугольниках конечные выигрыши не зависят от поведения обоих игроков. Обозначим их через $L(M, N)$, где (M, N) – единственная возможная в них пара выигрышей.

Так как игра кооперативная, в прямоугольниках, где интересы игроков совпадают, максимальные возможные в них выигрыши всегда достигаются. Обозначим их также через $L(M, N)$, где (M, N) – максимальные возможные выигрыши (для обоих игроков) по всем точкам этой области. Если в одном из прямоугольников интересы игроков строго противоположны, оптимальными стратегиями поведения там будут стратегии аналогичные рассмотренным в статье [3], и каждой точке этого прямоугольника будет соответствовать некоторая пара средних выигрышей $\bar{V}_1(p, r)$, $\bar{V}_2(p, r)$. Такую частичную область обозначим через $L(\bar{V}_1(p, r), \bar{V}_2(p, r)$.

Рассмотрим кооперативную динамическую игру в оставшейся части области L, которую обозначим L^+, а когда точка (p, r) выйдет из области L^+, будем считать, что игра остановится, а окончательными будут выигрыши, соответствующие другим частичным областям.

Так как возможны коррелированные смешанные стратегии поведения, игроки могут достигнуть любую точку области выигрышей R, которая является выпуклой оболочкой точек $\big(M(p, r), N(p, r)\big)$.

Прежде чем переходить к рассмотрению кооперативных вариантов игры Г, приведем одну теорему, доказательство которой аналогично доказательству теоремы, приведенной в [3]:

Теорема 1. *Стратегию поведения, следуя которой первый игрок, начав с точки (p_0, r_0), на k-ом шаге применяет стратегию максимина матричной игры $\| U_1(p_k+a_{ij}, r_k+b_{ij}) \|$, где $U_1(p, r)$ есть ограниченное решение функционального уравнения*

$$\varphi_1(p, r)=\begin{cases} \operatorname{val}\|\varphi_1(p+a_{ij}, r+b_{ij})\|, & \text{если} \quad (p, r)\in L^+, \\ M(p, r), & \text{если} \quad (p, r)\in L(M, N), \\ \bar{V}_1(p, r), & \text{если} \quad (p, r)\in L\left(\bar{V}_1(p, r), V_2(p, r)\right), \end{cases} \tag{1}$$

гарантирует ему средний выигрыш $U_1(p_0, r_0)$ независимо от поведения второго игрока.

Аналогичная стратегия второго игрока гарантирует ему средний выигрыш $U_2(p_0, r_0)$, где $U_2(p, r)$ есть ограниченное решение функционального уравнения

$$\varphi_2(p, r)=\begin{cases} \operatorname{val}\|\varphi_2(p+a_{ij}, r+b_{ij})\|, & \text{если} \quad (p, r)\in L^+, \\ N(p, r), & \text{если} \quad (p, r)\in L(M, N), \\ \bar{V}_2(p, r), & \text{если} \quad (p, r)\in L\left(\bar{V}_1(p, r), \bar{V}_2(p, r)\right). \end{cases}$$

Рассмотрим сначала случай, когда игрокам разрешено принимать соглашения только до начала игры, а во время игры они сообщаются лишь столько, сколько необходимо для применения (коррелирования) совместной стратегии поведения, которую они приняли до начала игры. Прежде всего найдем коррелированную смешанную стратегию поведения, которая дает решение Шэпли игры Г, когда за исходную точку торга (за точку status quo) берется точка $[U_1(p_0, r_0), U_2(p_0, r_0)]=(U_1^0, U_2^0)$, описанная в теореме 1.

Так как в этом случае выигрыши игроков на множестве переговоров являются линейно зависимыми, то решением Шэпли будет (см. [4], стр. 146) точка (U_1^*, U_2^*), где

$$U_1^*=\frac{U_1^0-U_2^0+C}{2}, \quad U_2^*=\frac{U_2^0-U_1^0+C}{2}$$

$$C = \max \left(M(p, r) + N(p, r) \right)$$

Через $Z(A', B') = \| z_{ij}(A', B') \|$ обозначим коррелированную смешанную стратегию, которая дает решение Шэпли для кооперативной биматричной игры (A', B').

Теорема 2. *Коррелированная стратегия поведения, следуя которой, начав с точки (p_0, r_0) на k-ом шаге игроки применяют совместную стратегию $Z\left(\| U_1(p_k + a_{ij}, r_k + b_{ij}) \|, \| U_2(p_k + a_{ij}, r_k + b_{ij}) \|\right)$, где $U_1(p, r)$, $U_2(p, r)$ есть решение системы функциональных уравнений*

$$\varphi_1(p, r) = \sum z_{ij} \left(\| \varphi_1(p + a_{ij}, r + b_{ij}) \|, \| \varphi_2(p + a_{ij}, r + b_{ij}) \| \right) \times$$

$$\times \varphi_1(p + a_{ij}, r + b_{ij}),$$

$$\varphi_2(p, r) = \sum_{i, j} z_{ij} \left(\| \varphi_1(p + a_{ij}, r + b_{ij}) \|, \| \varphi_2(p + a_{ij}, r + b_{ij}) \| \right) \times$$

$$\times \varphi_2(p + a_{ij}, r + b_{ij}), \tag{2}$$

если $(p, r) \in L^+$ и $(p, r) \neq (p_0, r_0)$ с граничными условиями

$$\varphi_1(p_0, r_0) = U_1^*, \quad \varphi_2(p_0, r_0) = U_2^*,$$

$$\varphi_1(p, r) = M(p, r), \quad \varphi_2(p, r) = N(p, r), \quad \text{если} \quad (p, r) \in L(M, N)$$

$$\varphi_1(p, r) = \bar{V}_1(p, r), \quad \varphi_2(p, r) = \bar{V}_2(p, r),$$

$$\text{если} \quad (p, r) \in L\left(\bar{V}_1(p, r), \bar{V}_2(p, r)\right)$$

дает первому и второму игроку средние выигрыши U_1^* и U_2^*, соответственно.

Доказательство. Решение системы функциональных уравнений (2) будем конструировать методом итераций. Пусть

$$\varphi_1^{(0)}(p, r) = \begin{cases} \underline{M}, & \text{если} \quad (p, r) \in L^+, \quad (p, r) \neq (p_0, r_0), \\ U_1^*, & \text{если} \quad (p, r) = (p_0, r_0), \\ M(p, r), & \text{если} \quad (p, r) \in L(M, N), \\ \bar{V}_1(p, r), & \text{если} \quad (p, r) \in L\left(\bar{V}_1(p, r), V_2(p, r)\right), \end{cases}$$

$$\varphi_2^{(0)}(p, r) = \begin{cases} \underline{N}, & \text{если} \quad (p, r) \in L^+, \ (p, r) \neq (p_0, r_0), \\ U_2^*, & \text{если} \quad (p, r) = (p_0, r_0), \\ M(p, r), & \text{если} \quad (p, r) \in L(M, N), \\ \bar{V}_2(p, r), & \text{если} \quad (p, r) \in L\left(\bar{V}_1(p, r), \bar{V}_2(p, r)\right). \end{cases}$$

Далее, пусть

$$\varphi_1^{(n)}(p, r) = T\varphi_1^{(n-1)}(p, r), \quad \varphi_2^{(n)}(p, r) = T\varphi_2^{(n-1)}(p, r),$$

где

$$T\varphi_i = \begin{cases} \sum\limits_{i,j} z_{ij}\Big(\|\varphi_1(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\|,\ \|\varphi_2(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\|\Big)\times \\ \times\varphi_i(p+a_{ij},\ r+b_{ij}), \quad \text{если} \quad (p,\ r)\in L^+,\ (p,\ r)\neq(p_0,\ r_0), \\ \varphi_i, \quad \text{если} \quad (p,\ r)\notin L^+ \quad \text{или} \quad (p,\ r)=(p_0,\ r_0) \end{cases}$$

при $i=1,\ 2$.

Докажем существование предела последовательностей $\varphi_1^{(n)}$ и $\varphi_2^{(n)}$.

Когда $(p,\ r)\in L^+$ и $(p,\ r)\neq(p_0,\ r_0)$

$$\varphi_1^{(1)}(p,\ r)=\sum z_{ij}\Big(\|\varphi_1^{(0)}(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\|,\ \|\varphi_2^{(0)}(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\|\Big)\times$$

$$\times\varphi_1^{(0)}(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\geqslant\sum_{i,j} z_{ij}(\|\underline{M}\|,\ \|\underline{N}\|)\underline{M}=\varphi_1^{(0)}(p,\ r),$$

$$\varphi_2^{(1)}(p,\ r)\geqslant\varphi_2^{(0)}(p,\ r).$$

Также имеем, что $\varphi_i^{(1)}(p_0,\ r_0)=\varphi_i^{(0)}(p_0,\ r_0)$ для $i=1,\ 2$ и $\varphi_i^{(1)}(p,\ r)=\varphi_i^{(0)}(p,\ r)$, когда $(p,\ r)\notin L^+$ Допустим, что $\varphi_i^{(n)}\geqslant\varphi_i^{(n-1)}$. Тогда

$$\varphi_i^{(n+1)}(p,\ r)=T\varphi_i^{(n)}=$$

$$=\sum_{i,j} z_{ij}\Big(\|\varphi_1^{(n)}(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\|,\ \|\varphi_2^{(n)}(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\|\Big)\times$$

$$\times\varphi_i^{(n)}(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\geqslant$$

$$\geqslant\sum z_{ij}\Big(\|\varphi_1^{(n-1)}(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\|,\ \|\varphi_2^{(n-1)}(p+a_{ij},\ r+b_{ij})\|\Big)\times$$

$$\times\varphi_i^{(n-1)}(p+a_{ij},\ r+b_{ij})=\varphi_i^{(n)}(p,\ r)$$

когда $(p,\ r)\notin L^+$, $(p,\ r)\neq(p_0,\ r_0)$ и $\varphi_i^{(n+1)}=T\varphi_i^{(n)}=T\varphi_i^{(n-1)}=\varphi_i^{(n)}$, $i=1,\ 2$ – в остальных случаях. Отсюда в силу $\varphi_i^{(1)}\geqslant\varphi_i^{(0)}$ получаем, что последовательности $\varphi_i^{(n)}(p,\ r)$ монотонно возрастают по n. Из ограниченности членов этих последовательностей следует, что $\lim\limits_n\varphi_i^{(n)}(p,\ r)=U_i(p,\ r)$ существует для $i=1,\ 2$, а тем самым, в силу непрерывности оператора T, пара функций $U_1(p,\ r)$, $U_2(p,\ r)$ будет решением системы функциональных уравнений (2).

Докажем, что указанная в теореме совместная стратегия поведения дает выигрыши U_1^* и U_2^*.

Если на k-ом шаге совместная стратегия смешанная, то координаты $(p_{k+1},\ r_{k+1})$ суть случайные величины. Чтобы подчеркнуть это, обозначим их через $\dot{p}_{k+1},\ \dot{r}_{k+1}$.

Теперь пусть на k-ом шаге игроки применяют совместную стратегию $Z(\|U_1(p_k+a_{ij},\ r_k+b_{ij})\|,\ \|U_2(p_k+a_{ij},\ r_k+b_{ij})\|)$. Тогда случайная величина $U_1(\dot{p}_{k+1},\ \dot{r}_{k+1})$ должна иметь условное математическое ожидание, удовлетворяющее равенству

$$E\{U_1(\dot{p}_{k+1},\ \dot{r}_{k+1})\,|\,U_1(p_k,\ r_k),\qquad U_1(p_0,\ r_0)\}=$$

$$=\sum z_{ij}\Big(\|U_1(p_k+a_{ij},\ r_k+b_{ij})\|,\ \|U_2(p_k+a_{ij},\ r_k+b_{ij})\|\Big)\times$$

$$\times U_1(p_k+a_{ij},\ r_k+b_{ij}).$$

Так как $U_1(p, r)$ является решением функциональных уравнений (2), получаем:

$$E\{U_1(p_{k+1}, r_{k+1}) \mid U_1(p_k, r_k), \qquad U_1(p_0, r_0)\} = U_1(p_k, r_k). \tag{3}$$

Последнее равенство действительно для всех k. Случайный процесс, удовлетворяющий равенству (3) называется мартингалом. Для ограниченных мартингалов (см. [2]) $\lim\limits_k U_1(p_k, r_k)$ существует с вероятностью 1 и условное математическое ожидание предельного значения удовлетворяет равенству

$$E\{\lim_k U_1(p_k, r_k) \mid U_1(p_0, r_0)\} = U_1(p_0, r_0).$$

Кроме того, игра окончится за конечное число шагов и, следовательно, $\lim\limits_k U_1(p_k, r_k) = U_1(p^*, r^*)$, где $(p^*, r^*) \in L^+$ Тогда

$$\lim_k U_1(p_k, r_k) = M(p, r), \quad \text{если} \quad (p, r) \in L(M, N),$$

$$\lim_k U_1(p_k, r_k) = \bar{V}_1(p, r), \quad \text{если} \quad (p, r) \in L\left(\bar{V}_1(p, r), \bar{V}_2(p, r)\right).$$

В обоих случаях

$$E\left(M(p, r)\right) = U_1(p_0, r_0) = U_1^*, \quad E\{\bar{V}_1(p, r)\} = U_1(p_0, r_0) = U_1^*,$$

так как $U_1(p, r)$ должна удовлетворять граничным условиям системы функциональных уравнений (2).

Аналогично показывается, что средний выигрыш второго игрока

$$E\{N(p, r)\} = U_2(p_0, r_0) = U_2^*,$$

$$E\{\bar{V}_2(p, r)\} = U_2(p_0, r_0) = U_2^*.$$

Теперь несколько изменим правила кооперирования в игре Г. Пусть игрокам на каждом шаге разрешено сообщаться и принимать новые соглашения. Игры, начинающиеся с различных начальных позиций, дают вообще различные гарантированные выигрыши и, таким образом, имеют различные точки status quo. Через $U_1^0(p_k, r_k)$, $U_2^0(p_k, r_k)$ обозначим гарантированные выигрыши обоих игроков, когда игра начинается с точки (p_k, r_k). Соответственно изменится и решение Шэпли $U_1^*(p_k, r_k)$, $U_2^*(p_k, r_k)$, которое в точке (p_k, r_k) равно

$$U_1^*(p_k, r_k) = \frac{U_1^0(p_k, r_k) - U_2^0(p_k, r_k) + C}{2},$$

$$U_2^*(p_k, r_k) = \frac{U_2^0(p_k, r_k) - U_1^0(p_k, r_k) + C}{2}.$$

Средние выигрыши, которые получат игроки на каждом шаге, применяя новую совместную стратегию поведения, описывает

Теорема 3. *Стратегия поведения, следуя которой на k-ом шаге игроки применяют совместную стратегию*

$$Z\left(\| U_1^k(p_k + a_{ij}, r_k + b_{ij}) \|, \| U_2^k(p_k + a_{ij}, r_k + b_{ij}) \|\right),$$

где $U_1^k(p, r)$ *и* $U_2^k(p, r)$ *есть решение системы функциональных уравнений*

$$\varphi_1(p, r) = \sum z_{ij}\left(\|\varphi_1(p+a_{ij}, r+b_{ij})\|, \|\varphi_2(p+a_{ij}, r+b_{ij})\|\right)\times$$

$$\times\varphi_1(p+a_{ij}, r+b_{ij}),$$

$$\varphi_2(p, r) = \sum_{i, j} z_{ij}\left(\|\varphi_1(p+a_{ij}, r+b_{ij})\|, \|\varphi_2(p+a_{ij}, r+b_{ij})\|\right)\times$$

$$\times\varphi_2(p+a_{ij}\ r+b_{ij}),$$

если $(p, r)\in L^+$, $(p, r)\neq(p_0, r_0)$ *с граничными условиями:*

$$\varphi_1(p_0, r_0) = U_1^*(p_k, r_k),\ \varphi_2(p_0, r_0) = U_2^*(p_k, r_k),$$

$$\varphi_1(p, r) = M(p, r),\ \varphi_2(p, r) = N(p, r),\quad \text{если}\quad (p, r)\in L(M, N)$$

$$\varphi_1(p, r) = \bar{V}_1(p, r),\ \varphi_2(p, r) = \bar{V}_2(p, r),$$

$$\text{если}\ (p, r)\in L\left(\bar{V}_1(p, r),\ \bar{V}_2(p, r)\right)$$

дает средние выигрыши

$$U_2^*(p_0, r_0) = U_1^* \quad \text{и} \quad U_2^*(p_0, r_0) = U_2^*.$$

Доказательство. На каждом шаге отыскивается решение одного и того же функционального уравнения, только первые граничные условия изменяются зависимо от позиции игроков. Так же, как в теореме 2 доказывается, что

$$E\{\lim_k U_1^k(p_k, r_k) \mid U_1^k(p_0, r_0)\} = E\{M(p, r)\} = U_1^0(p_0, r_0) = U_1(p_0, r_0),$$

$$E\{\lim_k U_1^k(p_k, r_k) \mid U_1^k(p_0, r_0)\} = E\{\bar{V}_1(p, r)\} = U_1^0(p_0, r_0) = U_1(p_0, r_0),$$

$$E\{N(p, r)\} = U_2^0(p_0, r_0) = U_2(p_0, r_0) = U_2^*,$$

$$E\{\bar{V}_2(p, r)\} = U_2^0(p_0, r_0) = U_2(p_0, r_0) = U_2^*.$$

Оказывается, что средние выигрыши те же самые, что и в случае, когда игроки могут принимать соглашения только до начала игры.

Другой вариант решения кооперативной динамической игры Г получается на основе применения обобщенного решения Нэша (см. [1], стр. 190) для кооперативной игры двух лиц. В модели Нэша игроки встречаются перед началом игры и каждый выбирает некоторую стратегию поведения в качестве „угрозы" Эти стратегии обозначены через X и Y — для первого и второго игроков соответственно. Пара стратегий (X, Y) определяет выигрыши $V_1^0(X, Y)$, $V_2^0(X, Y)$, а решением Нэша будет пара выигрышей V_1^*, V_2^*, где

$$V_1^* = \frac{V_1^0(X, Y) - V_2^0(X, Y) + C}{2}, \quad V_2^* = \frac{V_2^0(X, Y) - V_1^0(X, Y) + C}{2}$$

$$C = \max\,[M(p, r) + N(p, r)].$$

Теорема 4. 1) *Оптимальной стратегией угрозы первого игрока является стратегия поведения, следуя которой, начав с точки* (p_0, r_0), *на* k-*ом шаге первый игрок применяет стратегию максимина матричной иг-*

ры $\| V(p_k+a_{ij}, r_k+b_{ij}) \|$, *где* $V(p, r)$ *есть ограниченное решение функционального уравнения*

$$\psi(p, r)=\operatorname{val} \| \psi(p+a_{ij}, r+b_{ij}) \|, \text{ когда } (p, r)\in L^+ \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\psi(p, r)=M(p, r)-N(p, r), \quad \text{если} \quad (p, r)\in L(M, N),$$

$$\psi(p, r)=\bar{V}_1(p, r)-\bar{V}_2(p, r), \quad \text{если} \quad (p, r)\in L\left(\bar{V}_1(p, r), \bar{V}_2(p, r)\right).$$

2) *оптимальной стратегией угрозы второго игрока является стратегия поведения, следуя которой, на k-ом шаге второй игрок применяет стратегию минимакса матричной игры*

$$\| V(p_k+a_{ij}, r_k+b_{ij}) \|.$$

Решения Нэша, соответствующие этой паре стратегии угроз, следующие:

$$V_1^{**}=\frac{V(p_0, r_0)+C}{2}, \quad V_2^{**}=\frac{-V(p_0, r_0)+C}{2}.$$

Доказательство. Решение функционального уравнения (4) можно найти методом итераций, как в теореме 2. Пусть это будет функция $V(p, r)$.

Будем искать значение величины $\omega=V_1^0-V_2^0$, где V_1^0 и V_2^0 есть средние платежи первого и второго игроков, если они применяют указанные в теореме стратегии угрозы.

Если первый игрок на k-ом шаге применяет указанную стратегию, то, по определению максимина случайная величина $V(\dot{p}_{k+1}, \dot{r}_{k+1})$ должна иметь условное математическое ожидание

$$E\{V(\dot{p}_{k+1}, \dot{r}_{k+1}) \mid V(p_k, r_k), \qquad V(p_0, r_0)\}\geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{val} \| V(p_k+a_{ij}, r_k+b_{ij}) \| = V(p_k, r_k).$$

Это неравенство действительно для всех k, поэтому случайный процесс $V(\dot{p}_k, \dot{r}_k)$ есть ограниченный полумартингал и, следовательно,

$$E\{\lim_k V(p_k, r_k) \mid V(p_0, r_0)\}\geqslant V(p_0, r_0),$$

$$\omega=E\{M(p, r)-N(p, r)\}\geqslant V(p_0, r_0)$$

или

$$\omega=E\{\bar{V}_1(p, r)-\bar{V}_2(p, r)\}\geqslant V(p_0, r_0).$$

Аналогично можно показать, что применение вторым игроком указанной в теореме стратегии угрозы, гарантирует, что

$$\omega\leqslant V(p_0, r_0).$$

Теорема доказана.

Замечание. Коррелированную стратегию поведения, обеспечивающую выигрыши V_1^{**} и V_2^{**}, описывает теорема 2, если в системе (2) граничные условия при $(p, r)=(p_0, r_0)$ заменяем следующими:

$$\varphi_1(p_0, r_0)=V_1^{**}, \quad \varphi_2(p_0, r_0)=V_2^{**}.$$

Еще раз кооперативную игру Γ изменим так, чтобы игрокам на каждом шаге разрешалось предъявлять новые стратегии угрозы, которые обозначим через X_k и Y_k. Им соответствуют выигрыши $V_1^0(p_k, r_k)$, $V_2^0(p_k, r_k)$ и решение Нэша $V_1^*(p_k, r_k)$, $V_2^*(p_k, r_k)$, где

$$V_1^*(p_k, r_k) = \frac{V_1^0(p_k, r_k) - V_2^0(p_k, r_k) + C}{2},$$

$$V_2^*(p_k, r_k) = \frac{V_2^0(p_k, r_k) - V_1^0(p_k, r_k) + C}{2}.$$

В точке (p_l, r_l) оптимальной стратегией угрозы первого игрока будет стратегия поведения, следуя которой, начав с точки (p_l, r_l), на k-ом шаге первый игрок применяет стратегию максимина матричной игры $\| U(p_k + a_{ij}, r_k + b_{ij}) \|$, где $U(p, r)$ есть решение функционального уравнения (4). Аналогично определяется оптимальная стратегия угрозы второго игрока в точке (p_l, r_l). Эти стратегии просто совпадают со стратегиями поведения, описанными в теореме 4, если $l=0$. Поэтому решения Нэша в обоих случаях, когда игроки принимают соглашение один раз перед началом игры, и когда угрожают и принимают новые соглашения на каждом шаге, совпадают.

Последнее утверждение можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5. *Коррелированная стратегия поведения, следуя которой на k-ом шаге игроки применяют совместную стратегию*

$$Z\left(\| V_1^k(p_k + a_{ij}, r_k + b_{ij}) \|, \| V_2^k(p_k + a_{ij}, r_k + b_{ij}) \| \right),$$

где $V_1^k(p, r)$ и $V_2^k(p, r)$ есть решение системы функциональных уравнений

$$\Psi_1(p, r) = \sum z_{ij} \left(\| \Psi_1(p + a_{ij}, r + b_{ij}) \|, \| \Psi_2(p + a_{ij}, r + b_{ij}) \| \right) \times$$

$$\times \Psi_1(p + a_{ij}, r + b_{ij}),$$

$$\Psi_2(p, r) = \sum z_{ij} \left(\| \Psi_1(p + a_{ij}, r + b_{ij}) \|, \| \Psi_2(p + a_{ij}, r + b_{ij}) \| \right) \times$$

$$\times \Psi_2(p + a_{ij}, r + b_{ij}),$$

когда $(p, r) \in L^+$, $(p, r) \neq (p_0, r_0)$ с граничными условиями

$$\Psi_1(p_0, r_0) = V_1^*(p_k, r_k), \quad \Psi_2(p_0, r_0) = V_2^*(p_k, r_k),$$

$$\Psi_1(p, r) = M(p, r), \quad \Psi_2(p, r) = N(p, r), \quad \text{если} \quad (p, r) \in L(M, N),$$

$$\Psi_1(p, r) = \bar{V}_1(p, r), \quad \Psi_2(p, r) = \bar{V}_2(p, r),$$

$$\text{если} \quad (p, r) \in L\left(\bar{V}_1(p, r), \bar{V}_2(p, r) \right)$$

дает средние выигрыши

$$V_1^*(p_0, r_0) = V_1^{**}, \quad V_2^*(p_0, r_0) = V_2^{**}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
3.XII.1969

Литература

1. Р. Д. Льюс, Х. Райфа, Игры и решения, ИЛ, М., 1961.
2. Д. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
3. С. Вакринене, Антагонистическая динамическая игра на основе повторения биматричной игры, Лит. матем. сб., VII, № 3 (1967), 395–398.
4. G. Owen, Game theory, W. B. Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1968.

KOOPERATINIS DINAMINIS NEANTAGONISTINIS DVIEJŲ ASMENŲ LOŠIMAS

S. Vakrinienė

(*Reziumė*)

Nagrinėjamas kooperatinis dinaminis dviejų asmenų lošimas. Surastos optimalios grasinimo strategijos ir koreliuotos elgesio strategijos, iš kurių gaunami šiam lošimui Šeplio ir Nešo sprendiniai, kai lošėjai gali tartis tik prieš pradėdami lošti. Parodoma, kad iš šių sprendinių gaunami tie patys išlošimai ir tuo atveju, kai kooperavimas vyksta kiekviename žingsnyje.

COOPERATIVE DYNAMIC NON-ZERO-SUM OF TWO-PERSON GAME

S. Vakrinienė

(*Summary*)

A cooperative two-person game is considered. The optimal threat strategies and correlated behaviour strategies resulting in Shapley and Nash's solutions are found, when the players can make agreements only before the begining of the game. The results of these solutions are shown to be the same in the case when the cooperation takes place at every stage.