X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК – 517.53 517.54

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ КЛАССА H_p' И ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

В. Кабайла

§ 1. Введение

Свойства функций класса H_p $(p>0)$, т. е. аналитических в единичном круге функций f, для которых

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^p\,d\Theta<\infty, \tag{1}$$

хорошо известны [1, 2]. Задачи интерполяции и аппроксимации в этих классах частично исследованы разными авторами [3–14].

Класс аналитических в единичном круге функций f, для которых

$$\iint\limits_{|z|<1} |f(z)|^p\,dS_z<\infty \qquad (p>0), \tag{2}$$

где dS_z – элемент площади в плоскости z и интеграл определяется как несобственный двойной интеграл Римана [15], будем обозначать H_p'.

Свойства функций класса H_p' менее известны (см., напр., [16]), чем свойства функций класса H_p. В настоящей статье рассматриваются некоторые свойства функций, принадлежащих классам H_p', в частности получены точные оценки модуля таких функций, доказано соотношение $H_p\subset H_{2p}'$ и доказано, что класс функций, представимых в единичном круге формулой

$$f(\lambda)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\frac{f(z)}{(1-\lambda\bar z)^2}\,dS_z \qquad (|\lambda|<1) \tag{3}$$

(аналогом формулы Коши для двойного интеграла), совпадает с классом H_1'. Соотношение $H_p\subset H_{2p}'$ позволяет функции класса H_p при $\frac{1}{2}\leqslant p<1$ рассматривать как элементы пространства Банаха H_{2p}' (с соответствующим образом определенной нормой), так как $2p\geqslant 1$. Кроме того, из соотношения $H_p\subset H_{2p}'$ и представимости функций класса H_1' формулой Коши с двойным интегралом (3) следует, что функции класса $H_{\frac{1}{2}}$ можно представить этой формулой, а обычной формулой Коши с интегралом по единичной окружности, как известно из теоремы Г. М. Фихтенгольца [1], можно представить лишь функции класса H_1. Методом, аналогичным использованному в [17] при исследовании аппроксимации рациональными функциями функций класса H_2, устанавливается зависимость между задачами аппроксимации и интерполяции в классе H_2'. С помощью этой зависимости получен общий вид минимальной интерполирующей в точках $\lambda_1, \quad \lambda_n$ ($|\lambda_k|<1$) заданные значения функции (т. е. интерполирующей функции с наименьшей нормой) класса H_2' и установлены необходимые и достаточные условия существования интерполирующей функции класса H_2' в случае бесконечной последовательности узлов интерполирования.

§ 2. Вспомогательные замечания

В дальнейшем будем пользоваться такими хорошо известными [15] свойствами несобственных двойных интегралов Римана:

а) интеграл $\iint\limits_{|z|<1} f(z)\,dS_z$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\iint\limits_{|z|<1} |f(z)|\,dS_z$;

б) если интеграл $\iint\limits_{|z|\leqslant\rho} f(z)\,dS_z$ существует в собственном смысле при $\rho<1$ и сходится при $\rho=1$, то

$$\iint\limits_{|z|<1} f(z)\,dS_z=\lim_{\rho\to 1}\int\limits_0^{\rho} r\,dr\int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\Theta})\,d\Theta;$$

в) пусть дробно-линейная функция $z=T(\rho)$ отображает единичный круг плоскости ζ в единичный круг плоскости z, тогда равенство

$$\iint\limits_{|z|<1} f(z)\,dS_z=\iint\limits_{|\zeta|<1} f\left(T(\zeta)\right)\cdot|T'(\zeta)|^2\,dS_\zeta \tag{4}$$

справедливо при условии, что один из этих интегралов сходится. В равенстве (4) dS_z и dS_ζ означают элементы площади соответственно в плоскостях z и ζ.

В дальнейшем изложении двойные интегралы везде понимаются как несобственные интегралы Римана.

По определению, данному в § 1, функция $f\in H_p'$ ($p>0$), если она аналитическая в круге $|z|<1$ и $\iint\limits_{|z|<1} |f(z)|^p\,dS_z<\infty$.

Для любой функции f класса H_p' ($p>0$) определим число $\|f\|_{H_p'}$ равенством:

$$\|f\|_{H_p'}=\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}|f(z)|^p\,dS_z\right\}^{\frac{1}{p}}$$

В случае $p\geqslant 1$ это число, очевидно, является нормой. В случае $p<1$ число $\|f\|_{H_p'}$ будем называть псевдонормой [14]. Для псевдонормы не выполняется неравенство треугольника, но

$$\|f+g\|_{H_p'}^p\leqslant\|f\|_{H_p'}^p+\|g\|_{H_p'}^p \qquad (f,\ g\in H_p',\ 0<p<1). \tag{5}$$

Таким образом, класс H_p' в случае $p\geqslant 1$ можно рассматривать как нормированное пространство, а в случае $p<1$ — как псевдонормированное пространство.

Сходимость по норме или псевдонорме последовательности $\{f_n\}$ в пространстве H'_p ($p>0$), вообще, не следует из равномерной сходимости в любом круге $|z|\leqslant\rho$, где $\rho<1$ (равномерной сходимости внутри единичного круга). Однако если $f_n\in H'_p$ ($p>0$), $\{f_n\}$ сходится равномерно внутри единичного круга к f и $\|f_n\|_{H'_p}\leqslant C$, то $f\in H'_p$ и $\|f\|_{H'_p}\leqslant C$. Действительно, так как $\|f_n\|_{H'_p}\leqslant C$, то тем более для любого ρ ($0<\rho<1$):

$$\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<\rho}|f_n(z)|^p\,dS_z\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant C.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу сперва при $n\to\infty$, а потом при $\rho\to1$, получаем, что $\|f\|_{H'_p}\leqslant C$ (для H_p — аналогично).

§ 3. Оценки модуля функций класса H'_p

Пусть E — произвольное множество точек круга $|z|<1$. Функцию $f\in H'_p$ будем называть минимальной на множестве E в классе H'_p, если ее норма (в случае $p<1$ — псевдонорма) $\|f\|_{H'_p}$ не больше нормы (псевдонормы) любой другой функции класса H'_p, совпадающей с функцией f на множестве E. Если E содержит лишь конечное число точек, то функцию, минимальную на E, будем называть минимальной в этих точках.

Пусть $f\in H'_p$ ($p>0$) и $T(\zeta)=\dfrac{\lambda-\zeta}{1-\bar\lambda\zeta}$ ($|\lambda|<1$). Так как $T'(\zeta)$ — аналитическая в единичном круге, не обращается в нуль и

$$\|f\|^p_{H'_p}=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left|f\left(T(\zeta)\right)\right|^p\cdot|T'(\zeta)|^2\,dS_\zeta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left|f\left(T(\zeta)\right)[T'(\zeta)]^{\frac{2}{p}}\right|^p dS_\zeta<\infty, \tag{6}$$

то, выбирая любую однозначную в круге $|z|<1$ ветвь функции $[T'(\zeta)]^{\frac{2}{p}}$ получим, что функция g, определяемая равенством

$$g(\zeta)=f\left(T(\zeta)\right)[T'(\zeta)]^{\frac{2}{p}}\qquad |\zeta|<1, \tag{7}$$

тоже принадлежит классу H'_p и $\|f\|_{H'_p}=\|g\|_{H'_p}$. И наоборот: если $g\in H'_p$, а значения $f(z)$ некоторой функции f связаны со значениями $g(\zeta)$ функции g равенством (7), то из равенства (6) следует, что $\|f\|_{H'_p}=\|g\|_{H'_p}$ и $f\in H'_p$.

Лемма 1. *Пусть E — некоторое множество точек круга $|z|<1$. Если функция f — минимальна на множестве E в классе H'_p ($p>0$), то функция g, определяемая равенством* (7), *тоже минимальна на множестве $T^{-1}(E)$ в классе H'_p. И наоборот: если g — минимальна на множестве $T^{-1}(E)$ в классе H'_p, то f — минимальна на E в H'_p.*

Доказательство. Допустим, что функция f — минимальна на множестве E, но функция g, определяемая равенством (7), не минимальна на множестве $T^{-1}(E)$. Тогда должна существовать функция $\tilde g\in H'_p$ со свойствами: $\tilde g(\zeta)=g(\zeta)$, если $\zeta\in T^{-1}(E)$ и $\|\tilde g\|_{H'_p}<\|g\|_{H'_p}=\|f\|_{H'_p}$.

Определим функцию $\tilde{f}$ равенством:

$$\tilde{f}(z)=\tilde{g}\left(T^{-1}(z)\right)\{[T^{-1}(z)]'\}^{\frac{2}{p}}$$

Из равенства (7), в котором функция f заменена функцией $\tilde{g}$ и T заменена функцией T^{-1}, получается, что $\|\tilde{f}\|_{H_p'}=\|\tilde{g}\|_{H_p'}<\|f\|_{H_p'}$. Кроме того, для $z\in E$ получается:

$$\tilde{f}(z)=\tilde{g}\left(T^{-1}(z)\right)\{[T^{-1}(z)]'\}^{\frac{2}{p}}=g\left(T^{-1}(z)\right)\{[T^{-1}(z)]'\}^{\frac{2}{p}}=f(z),$$

т. е. существует функция $\tilde{f}\in H_p'$, совпадающая с функцией f на E и такая, что $\|\tilde{f}\|_{H_p'}<\|f\|_{H_p'}$, чего быть не может, так как f — минимальная.

Вторая часть утверждения, содержащегося в лемме 1, легко следует из доказанного.

Теперь получим точную оценку модуля функции класса H_p' $(p>0)$ в нулевой точке.

Если $f\in H_p'$, то

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}|f(z)|^p\,dS_z=\lim_{\rho\to 1}2\int_0^{\rho} r\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^p\,d\Theta\right\}dr\geqslant$$

$$\geqslant 2\int_0^1 r\,|f(0)|^p\,d\Theta=|f(0)|^p,$$

так как функция $|f(z)|^p$ — субгармоническая. Следовательно, для любой функции $f\in H_p'$ будет:

$$|f(0)|\leqslant\|f\|_{H_p'}. \tag{8}$$

С другой стороны, если $f(z)\equiv\mathrm{const}$, то $|f(0)|=\|f\|_{H_p'}$, т. е. оценка (8) — точная. Иначе говоря, если $f(z)\equiv\mathrm{const}$, то f — минимальна в точке $z=0$.

Для оценки модуля функции класса H_p' $(p>0)$ в любой точке λ $(|\lambda|<1)$ применяем лемму 1. Пусть $z=T(\zeta)=\dfrac{\lambda-\zeta}{1-\bar{\lambda}\zeta}$ и множество E содержит лишь одну точку $z=0$. Тогда множество $T^{-1}(E)$ содержит одну точку λ. Функция, тождественно равная константе C — минимальна в точке $z=0$, поэтому функция g:

$$g(\zeta)=C\cdot[T'(\zeta)]^{\frac{2}{p}}=\frac{C(|\lambda|^2-1)^{\frac{2}{p}}}{(1-\bar{\lambda}\zeta)^{\frac{4}{p}}}, \tag{9}$$

по лемме 1, минимальна в точке $\zeta=\lambda$ и $\|g\|_{H_p'}=|C|$.

Из равенства (9) получаем:

$$|g(\lambda)|=\frac{|C|}{(1-|\lambda|^2)^{\frac{2}{p}}}=\frac{\|g\|_{H_p'}}{(1-|\lambda|^2)^{\frac{2}{p}}}. \tag{10}$$

Очевидно, умножая минимальную функцию g на произвольную константу, получаем опять функцию, минимальную в точке λ.

Пусть теперь f — произвольная функция класса H'_p $(p>0)$ и $|\lambda|<1$. Обозначим $f(\lambda)=c_1$ и

$$f_\lambda(\zeta)=c_1\left(\frac{1-|\lambda|^2}{1-\bar{\lambda}\zeta}\right)^{\frac{4}{p}}$$

Очевидно $f_\lambda(\lambda)=c_1=f(\lambda)$, функция f_λ — минимальна в точке $\zeta=\lambda$ (так как она отличается от функции g только постоянным множителем), т. е. $\|f_\lambda\|_{H'_p}\leqslant\|f\|_{H'_p}$ и $\|f_\lambda\|_{H'_p}=|c_1|(1-|\lambda|^2)^{\frac{2}{p}}$. Поэтому

$$|f(\lambda)|=|c_1|=\frac{\|f_\lambda\|_{H'_p}}{(1-|\lambda|^2)^{\frac{2}{p}}}\leqslant\frac{\|f\|_{H'_p}}{(1-|\lambda|^2)^{\frac{2}{p}}}$$

т. е. для любой функции $f\in H'_p$ и любой внутренней точки единичного круга справедливо неравенство:

$$|f(z)|\leqslant\frac{\|f\|_{H'_p}}{(1-|z|^2)^{\frac{2}{p}}}\qquad(f\in H'_p,\ p>0,\ |z|<1).\tag{11}$$

Это неравенство — точное в том смысле, что для любой точки λ существует функция $f_\lambda\in H'_p$, для которой в (11) справедлив знак равенства.

Интересно отметить, что таким же методом можно получить хорошо известную точную оценку модуля функции f класса H_p [4]:

$$|f(z)|\leqslant\frac{\|f\|_{H'_p}}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}}}\qquad(f\in H_p,\ p>0,\ |z|<1).\tag{12}$$

Асимптотические оценки (при $|z|\to1$) модуля функции $f\in H'_p$ можно получить из следующих соображений.

Обозначим

$$N(\rho)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\rho\leqslant|z|<1}|f(z)|^p\,dS_z,$$

$$I(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\Theta})|^p\,d\Theta.$$

Пусть $f\in H'_p$ и $|\lambda|<1$. Выберем положительные числа ρ и ρ' так, чтобы $|\lambda|<\rho<\rho'<1$. Тогда:

$$N(\rho)-N(\rho')=\frac{1}{\pi}\int_\rho^{\rho'}r\,dr\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^p\,d\Theta=$$

$$=2\int_\rho^{\rho'}rI(r)\,dr=I(\tilde{\rho})(\rho'^2-\rho^2),\tag{13}$$

где $\rho\leqslant\tilde{\rho}\leqslant\rho'<1$. Определим вспомогательную функцию $g_{\tilde{\rho}}$ в круге $|\zeta|<\frac{1}{\tilde{\rho}}$:

$$g_{\tilde{\rho}}(\zeta)=f(\tilde{\rho}\zeta).$$

Так как функция $g_{\tilde\rho}$ – аналитическая в круге $|\zeta|<\frac{1}{\tilde\rho}$ с радиусом $\frac{1}{\tilde\rho}>1$, то она принадлежит классу H_p и

$$|g_{\tilde\rho}(\zeta)|=|f(\tilde\rho\zeta)|\leqslant\frac{\|g_{\tilde\rho}\|_{H_p}}{(1-|\zeta|^2)^{\frac{1}{p}}},\quad\text{если}\quad|\zeta|<1. \tag{14}$$

С другой стороны, из равенства (13) получается:

$$\|g_{\tilde\rho}\|^p_{H_p}=I(\tilde\rho)=\frac{N(\rho)-N(\rho')}{\rho'^2-\rho^2}.$$

Подставляя в (14) получаем:

$$f(\tilde\rho\zeta)=\frac{[N(\rho)-N(\rho')]^{\frac{1}{p}}}{(\rho'^2-\rho^2)^{\frac{1}{p}}(1-|\zeta|^2)^{\frac{1}{p}}}\qquad\text{для}\quad|\zeta|<1.$$

Выберем ζ так, чтобы выполнялось равенство: $\tilde\rho\zeta=\lambda$, т. е. $\zeta=\frac{\lambda}{\tilde\rho}$. Так как $|\lambda|<$ $<\rho\leqslant\tilde\rho$, то точка $\zeta=\frac{\lambda}{\tilde\rho}$ – внутренняя точка единичного круга. Тогда

$$|f(\tilde\rho\zeta)|^p=|f(\lambda)|^p=\frac{N(\rho)-N(\rho')}{(\rho'^2-\rho^2)\left(1-\left|\frac{\lambda}{\tilde\rho}\right|^2\right)}\leqslant\frac{N(\rho)-N(\rho')}{(\rho'^2-\rho^2)\left(1-\left|\frac{\lambda}{\rho}\right|^2\right)}$$

Переходя к пределу при $\rho'\to1$ получаем:

$$|f(\lambda)|\leqslant\left[\frac{\rho^2N(\rho)}{(1-\rho^2)(\rho^2-|\lambda|^2)}\right]^{\frac{1}{p}}\qquad(f\in H'_p,\quad|\lambda|<\rho<1). \tag{15}$$

Неравенство (15) справедливо для любого ρ, удовлетворяющего неравенству $|\lambda|<\rho<1$, следовательно, справедливо и для такого ρ, что

$$\rho^2=|\lambda|^2+\frac{1-|\lambda|^2}{2}=\frac{1+|\lambda|^2}{2}.$$

Для такого ρ неравенство (15) запишется так:

$$|f(\lambda)|\leqslant\left[\frac{2(1+|\lambda|^2)N(\rho)}{(1-|\lambda|^2)^2}\right]^{\frac{1}{p}}$$

Так как при $|\lambda|\to1$ выбранное $\rho=\frac{1+|\lambda|^2}{2}\to1$ и $N(\rho)\to0$, то получается:

$$|f(\lambda)|=o\left(\frac{1}{(1-|\lambda|^2)^{\frac{2}{p}}}\right)\qquad\text{при}\quad|\lambda|\to1\quad(f\in H'_p,\ p>0). \tag{16}$$

Следовательно, справедливо такое утверждение:

Теорема 1. *Если* $f\in H'_p$ $(p>0)$, *то*

$$|f(z)|\leqslant\frac{\|f\|_{H'_p}}{(1-|z|^2)^{\frac{2}{p}}}\qquad(|z|<1) \tag{17}$$

$$|f(z)|=o\left(\frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{2}{p}}}\right)\qquad\textit{при}\quad|z|\to1. \tag{18}$$

Оценка (17) *– точная в том смысле, что для любой точки* λ ($|\lambda|<1$) *существует функция* $f_\lambda \in H'_p$ *вида*

$$f_\lambda(z) = \frac{C}{(1-\bar{\lambda} z)^{\frac{4}{p}}} \qquad (|z|<1,\ C - \textit{константа}),$$

для которой в (17) *справедлив знак равенства.*

Следствие 1. *Из сходимости по норме в пространстве* H'_p *последовательности* $\{f_n : f_n \in H'_p\}$ *следует равномерная сходимость внутри единичного круга.*

Следствие 2. *Классы* H'_p *являются полными нормированными (в случае* $p<1$ *– псевдонормированными) пространствами.*

Действительно, если $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность функций пространства H'_p ($p>0$), то $\|f_n\|_{H'_p} \leqslant C$ и для $|z|\leqslant r<1$ получается:

$$|f_n(z)-f_m(z)| \leqslant \frac{\|f_n-f_m\|_{H'_p}}{(1-r^2)^{\frac{2}{p}}},$$

потому $\{f_n\}$ сходится равномерно внутри единичного круга к некоторой аналитической функции f, которая, как заметили в § 2, принадлежит классу H'_p. Из фундаментальности $\{f_n\}$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой N, что $\|f_n-f_m\|_{H'_p}<\varepsilon$, если $m,\ n>N$. Тем более для $\rho<1$

$$\left\{ \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z|\leqslant\rho} |f_n(z)-f_m(z)|^p dS_z \right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \tag{19}$$

если $m,\ n>N$. Переходя в неравенстве (19) к пределу сначала при $m\to\infty$, а потом – при $\rho\to 1$, получим $\|f_n-f\|_{H'_p}<\varepsilon$, если $n>N$, т. е. $\|f_n-f\|_{H'_p}\to 0$ при $n\to\infty$.

Следствие 3. *Если* $f_n \in H'_p$ ($p>0$) *и* $\|f_n\|_{H'_p} \leqslant C$ ($n=1, 2, \ldots$), *то существует подпоследовательность последовательности* $\{f_n\}$, *которая сходится равномерно внутри единичного круга к функции класса* H'_p.

Следствие 3 остается верным и для классов H_p. Доказательство такое же, как для H'_p, отличаются только оценки модуля функций f_n.

§ 4. Связь между классами H_p и H'_{2p}. Задачи интерполяции в классах H'_p

Сопоставляя оценки модуля функций классов H_p и H'_{2p}:

$$|f(z)| \leqslant \frac{\|f\|_{H_p}}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}}} \qquad \text{для} \quad f\in H_p,$$

и

$$|f(z)| \leqslant \frac{\|f\|_{H'_{2p}}}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}}} \qquad \text{для} \quad f\in H'_{2p},$$

а также общий вид минимальных в точке $z=\lambda$ функций этих классов, можно предположить, что существует связь между классами H_p и H'_{2p}.

Теорема 2. $H_p \subset H'_{2p}$ *для любого* $p>0$.

Доказательство. Докажем сначала соотношение $H_1 \subset H'_2$.

Если f — производная аналитическая в круге $|z|<1$ функция, то $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и для любого $\rho<1$ будет:

$$J(\rho) = \frac{1}{\pi} \iint_{|z|\leqslant\rho} |f(z)|^2 dS_z =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\rho} r\,dr \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\Theta}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n r^n e^{-in\Theta}\right) d\Theta =$$

$$= 2\int_0^{\rho} r\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right) dr = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}\rho^{2n+2}. \tag{20}$$

Пусть $f \in H_1$. Тогда $|a_n| = o\,(1)$ при $n\to\infty$ [1] и, по теореме Харди [2], $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} < \infty$. Но $\frac{|a_n|^2}{n+1} = \frac{|a_n|}{n+1}\cdot|a_n| = o\left(\frac{|a_n|}{n}\right)$, поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}$ сходится и, следовательно, функция $J(\rho)$ ограничена для $0\leqslant\rho<1$, а это означает, что $f\in H'_2$.

Пусть теперь $f\in H_p$ $(p>0)$ и пусть $b(z)$ — произведение Бляшке, нули которого совпадают с нулями функции f. Тогда $f(z) = b(z)\,F(z)$ и $F\in H_p$. Функция $F^p \in H_1$ и, по доказанному, $F^p \in H'_2$, т. е.

$$\iint_{|z|<1} |F(z)|^{2p} dS_z < \infty,$$

поэтому $F\in H'_{2p}$ и, тем более, $f\in H'_{2p}$, так как $|f(z)|\leqslant|F(z)|$.

Теорема доказана.

Из соотношения $H_p\subset H'_{2p}$ в случае $\frac{1}{2}\leqslant p<1$ следует, что функции псевдонормированного пространства H_p принадлежат банаховому пространств H'_{2p}.

Для построения интерполирующих функций в классах H'_p можно применять такие же методы, как и в классах H_p [8—11].

Теорема 3. *Пусть* $\{\lambda_k\}$ *— последовательность различных внутренних точек единичного круга,* $\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\lambda_k|)<\infty$, $\{c_k\}$ *— последовательность комплексных чисел,* $b_k(z)$ *— произведение Бляшке с нулями* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots$ *Для того, чтобы существовала функция* f *класса* H'_p, *принимающая в точках* λ_k *значения* c_k, *достаточно, чтобы выполнялось условие:*

а) в случае $p\geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{c_k}{b_k(\lambda_k)}\right| (1-|\lambda_k|^2)^{\frac{2}{p}} < \infty; \tag{21}$$

б) в случае $p<1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{c_k}{b_k(\lambda_k)}\right|^p (1-|\lambda_k|^2)^2 < \infty. \tag{22}$$

Если условие (21) или (22) выполняется, то одна из интерполирующих функций f представляется в виде суммы ряда:

$$|f(z)| = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{b_k(z)}{b_k(\lambda_k)} \left(\frac{1-|\lambda_k|^2}{1-\bar{\lambda}_k z}\right)^{\frac{4}{p}} \qquad (p>0), \tag{23}$$

который сходится по норме в H'_p и равномерно внутри единичного круга.

Доказательство. Рассмотрим интерполяционный ряд (23). В случае $p \geqslant 1$ из условия (21), а в случае $p<1$ – из условия (22) следует, что ряд (23) сходится равномерно внутри единичного круга (ср. [8, 9]). Сумму ряда (23) обозначаем $f(z)$. Из построения интерполяционного ряда следует, что $f(\lambda_k)=c_k$ $(k=1, 2, \ldots)$. Для доказательства соотношения $f \in H'_p$ достаточно показать, что нормы (псевдонормы в случае $p<1$) частичных сумм S_n ряда (23) – ограничены.

В случае $p \geqslant 1$ с помощью равенств (9) и (10) получаем:

$$\|S_n\|_{H'_p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{c_k}{b_k(\lambda_k)} \right| (1-|\lambda_k|^2)^{\frac{4}{p}} \left\{ \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z|<1} \frac{dS_z}{|1-\bar{\lambda}_k z|^4} \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{c_k}{b_k(\lambda_k)} \right| (1-|\lambda_k|^2)^{\frac{2}{p}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{b_k(\lambda_k)} \right| (1-|\lambda_k|^2)^{\frac{2}{p}}.$$

Аналогично, в случае $p<1$, применяя неравенство (5), получаем:

$$\|S_n\|^p_{H'_p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{c_k}{b_k(\lambda_k)} \right|^p (1-|\lambda_k|^2)^4 \left\{ \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z|<1} \frac{dS_z}{|1-\bar{\lambda}_k z|^4} \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{c_k}{b_k(\lambda_k)} \right|^p (1-|\lambda_k|^2)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{b_k(\lambda_k)} \right|^p (1-|\lambda_k|^2)^2.$$

Следовательно, для любого $p>0$ последовательность норм $\{\|S_n\|_{H'_p}\}$ – ограничена и $f \in H'_p$.

Следствие. *Если условия теоремы* 3 *выполнены, то норма (в случае $p<1$ – псевдонорма) функции f, интерполирующей в точках λ_k значения c_k и представимой в виде суммы ряда* (23), *оценивается так*:

$$\|f\|_{H'_p} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{b_k(\lambda_k)} \right| (1-|\lambda_k|^2)^{\frac{2}{p}} \qquad \text{если} \quad p \geqslant 1, \tag{24}$$

$$\|f\|_{H'_p} \leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{b_k(\lambda_k)} \right| (1-|\lambda_k|^2)^2 \right\}^{\frac{1}{p}} \qquad \text{если} \quad p<1. \tag{25}$$

В теореме 2 было доказано, что $H_p \subset H'_{2p}$ для любого $p>0$. Применяя теорему 3 можно показать, что, вообще, $H_p \neq H'_{2p}$.

Теорема 4. *Если* $p \leqslant 1$, *то* $H_p \neq H'_{2p}$.

Доказательство. Пусть $\frac{1}{2} \leqslant p < 1$, $|\lambda_k| < 1$ $(k=1,2,\ldots)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} (1-|\lambda_k|) < \infty$. По теореме 1 статьи [8] можно так выбрать точки λ'_k, чтобы было $|\lambda'_k| = |\lambda_k|$ и ни для одной последовательности $\{c_k\}$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{b_k(\lambda'_k)} \right|^p (1-|\lambda'_k|) = \infty, \tag{26}$$

не существовала функция класса H_p, принимающая в точках λ'_k значения c_k. Выберем теперь c_k так, чтобы выполнялось равенство:

$$\left| \frac{c_k}{b_k(\lambda'_k)} \right|^p (1-|\lambda'_k|) = \frac{1}{k}$$

($\arg c_k$ — любой). Тогда ряд (26) расходится, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{b_k(\lambda'_k)} \right| (1-|\lambda'_k|^2)^{\frac{2}{2p}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+|\lambda'_k|)^{\frac{1}{p}}}{k^{\frac{1}{p}}}$$

сходится. По теореме 3 существует функция класса H'_{2p}, принимающая в точках λ'_k значения c_k, а по теореме 1 статьи [8] — не существует функции класса H_p, принимающей в точках λ'_k значения c_k, т. е. $H_p \neq H'_{2p}$.

Пусть теперь $0 < p < \frac{1}{2}$ Тогда существует такое натуральное число $n \geqslant 2$, что $\frac{1}{2n} \leqslant p < \frac{1}{n}$. Обозначим $p' = np$. Очевидно $\frac{1}{2} \leqslant p' < 1$ и, по доказанному, существует функция f такая, что $f \in H'_{2p'}$, и $f \,\overline{\in}\, H_{p'}$. Тогда функция f^n будет аналитической в единичном круге, $f^n \in H'_{\frac{2p'}{n}} = H'_{2p}$ и $f^n \,\overline{\in}\, H_{\frac{p'}{n}} = H_p$, т. е. и в случае $0 < p < \frac{1}{2}$ справедливо $H_p \neq H'_{2p}$.

В случае $p=1$ будем рассматривать, как в доказательстве теоремы 2, равенство (20). По теореме Харди [2], если $f \in H_1$ и $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} < \infty$. С другой стороны, для $\rho < 1$ и любой аналитической в единичном круге функции f, такой что $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, справедливо равенство (20) и, следовательно, $f \in H'_2$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} < \infty. \tag{27}$$

Рассмотрим функцию f:

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln n}.$$

Так как для функции $\bar{f}$ коэффициенты Тейлора $a_n=\frac{1}{\ln n}$ $(n=2,\ 3,$ $a_0=a_1=0)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}=\infty$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2 n}<\infty,$$

то $\bar{f}\in H'_2$ и $\bar{f}\,\bar{\in}\, H_1$.

§ 5. Представление функций класса H'_1 двойным интегралом Коши

В теореме Г. М. Фихтенгольца [1] содержится утверждение: класс H_1 совпадает с классом функций f, представимых в единичном круге интегралом Коши:

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-\lambda}\,dz,\qquad |\lambda|<1, \tag{28}$$

где $f(e^{i\Theta})=\lim\limits_{r\to 1}f(re^{i\Theta})$. Интеграл Коши (28), очевидно, можно переписать в виде криволинейного интеграла:

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{1-\lambda\bar{z}}\,ds,\qquad |\lambda|<1. \tag{29}$$

Мы покажем, что класс H'_1 совпадает с классом функций f, представимых в единичном круге двойным интегралом, аналогичным интегралу Коши:

$$f(\lambda)=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}\frac{f(z)}{(1-\lambda\bar{z})^2}\,dS_z,\qquad |\lambda|<1. \tag{30}$$

Заметим, что равенство (30) для аналитических функций других классов применялось и другими авторами (напр., [13] для H'_2).

Лемма 2. *Если $f\in H'_1$, то*

$$f(0)=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}f(z)\,dS_z. \tag{31}$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}f(z)\,dS_z=\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\pi}\int_0^{\rho}r\,dr\int_0^{2\pi}f(re^{i\Theta})\,d\Theta=$$

$$=\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\pi i}\int_0^{\rho}r\,dr\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}\,dz=\lim_{\rho\to 1}2f(0)\int_0^{\rho}r\,dr=f(0).$$

Лемма 3. *Если* $f \in H_1'$ и λ — *внутренняя точка единичного круга, то справедливо равенство (аналог формулы Коши)*:

$$f(\lambda)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\frac{f(z)}{(1-\lambda\bar z)^2}\,dS_z. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $g\in H_1'$ и $\zeta=T(z)=\frac{\lambda-z}{1-\bar\lambda z}$. Очевидно $z=T^{-1}(\zeta)=\frac{\lambda-\zeta}{1-\bar\lambda\zeta}$. Тогда из леммы 2 получается:

$$g(0)=g\left(T(\lambda)\right)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}g(\zeta)\,dS_\zeta=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}g\left(T(z)\right)|T'(z)|^2\,dS_z=$$

$$=\frac{(1-|\lambda|^2)^2}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\frac{g\left(T(z)\right)}{|1-\bar\lambda z|^4}\,dS_z.$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$\frac{g\left(T(\lambda)\right)}{(1-|\lambda|^2)^2}=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\frac{g\left(T(z)\right)}{(1-\bar\lambda z)^2}\cdot\frac{dS_z}{(1-\lambda\bar z)^2}, \tag{33}$$

для любой функции g из класса H_1'.

Пусть f — произвольная заданная функция класса H_1'. Определим функцию g равенством:

$$\frac{g\left(T(z)\right)}{(1-\bar\lambda z)^2}=f(z),$$

т. е.

$$g(\zeta)=f\left(T^{-1}(\zeta)\right)[1-\bar\lambda T^{-1}(\zeta)]^2.$$

Очевидно $g\in H_1'$ и для g справедливо равенство (33). Выражая в этом равенстве g через f, получаем равенство (32).

Теорема 5. *Для того, чтобы функция f, определенная в единичном круге $|\lambda|<1$, в любой точке этого круга удовлетворяла равенству*:

$$f(\lambda)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\frac{f(z)}{(1-\lambda\bar z)^2}\,dS_z, \tag{34}$$

необходимо и достаточно, чтобы $f\in H_1'$. Иными словами, *класс H_1' совпадает с классом функций, представимых двойным интегралом Коши* (34).

Достаточность доказана в лемме 3.

Пусть функция f определена в единичном круге, интеграл (34) сходится (как несобственный интеграл) и равенство (34) выполняется для любого λ ($|\lambda|<1$). В случае $\lambda=0$ получаем, что $\iint\limits_{|z|<1}f(z)\,dS_z$ сходится и потому $\iint\limits_{|z|<1}|f(z)|\,dS_z$ тоже сходится.

Докажем, что функция $f(z)$ имеет производную в любой внутренней точке λ_0 единичного круга.

Заметим, что $\frac{d}{d\lambda}(1-\lambda\bar{z})^{-2}=2\bar{z}(1-\lambda\bar{z})^{-3}$, и покажем, что

$$f'(\lambda_0)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\frac{2\bar{z}f(z)}{(1-\lambda\bar{z})^3}\,dS_z. \tag{35}$$

Действительно, интеграл (35), очевидно, сходится и

$$\left|\frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\frac{2\bar{z}f(z)}{(1-\lambda_0\bar{z})^3}\,dS_z\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}f(z)\left[\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)(1-\lambda\bar{z})^2}-\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)(1-\lambda_0\bar{z})^2}-\frac{2\bar{z}}{(1-\lambda_0\bar{z})^3}\right]dS_z\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3|\lambda-\lambda_0|+|\lambda_0^2+\lambda_0\lambda-2\lambda^2|}{(1-|\lambda|)^2(1-|\lambda_0|)^3\pi}\iint\limits_{|z|<1}|f(z)|\,dS_z\to 0,$$

если $\lambda\to\lambda_0$. Так как f — аналитическая в единичном круге и интеграл $\iint\limits_{|z|<1}|f(z)|\,dS_z$ сходится, то $f\in H'_1$.

Следствие. Из способа доказательства теоремы следует, что для любой функции $f\in H'_1$ справедливо равенство (35). Аналогично *для любой* $f\in H'_1$ *получается*:

$$f^{(k)}(\lambda)=\frac{(k+1)!}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\frac{\bar{z}^kf(z)}{(1-\lambda\bar{z})^{k+2}}\,dS_z\quad (f\in H'_1,\ |\lambda|<1,\ k=1,2,\ \ldots). \tag{36}$$

§ 6. Задачи аппроксимации и интерполяции в классе H'_2

Определим в классе H'_2 скалярное произведение:

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}f(z)\overline{g(z)}\,dS_z \tag{37}$$

для любых $f,\ g\in H'_2$. Тогда H'_2 — гильбертово пространство и $(f,f)=\|f\|^2_{H'_2}$.

Задача о наилучшей аппроксимации в метрике H'_2 функции $f\in H'_2$ полиномами тривиальна. Так как система функций $\{\alpha_n:\alpha_n(z)=\sqrt{n+1}\,z^n\}$ — ортонормирована и замкнута в пространстве H'_2, то для любой функции $f\in H'_2$ ряд Тейлора $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ является и рядом Фурье и сходится по норме к f. Следовательно, частичные суммы ряда Тейлора являются полиномами наилучшего приближения в метрике H'_2 функции $f\in H'_2$.

Рассмотрим аппроксимацию функций класса H'_2 рациональными функциями.

Пусть $\{\lambda_k\}$ — произвольная последовательность различных внутренних точек единичного круга и

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{(1-\bar{\lambda}_kz)^2}\qquad (|z|\leqslant 1,\ k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{38}$$

Так как последовательность $\{\varphi_k\}$ – линейно независима в H_2', то ее можно ортогонализовать, т.е. существует последовательность $\{\gamma_k\}$ функций пространства H_2' такая, что

$$(\gamma_m, \gamma_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } m = 1, \quad n-1, \\ 1, & \text{если } m = n \quad (n = 1, 2, \ldots), \end{cases} \tag{39}$$

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} \varphi_k \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{40}$$

где $a_{k,n}$ – некоторые константы, определяемые процессом ортогонализации, т.е. выбором точек $\{\lambda_k\}$. Очевидно, $\mathcal{L}\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}) = \mathcal{L}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $\mathcal{L}(E)$ обозначает линейную оболочку множества E.

Если $f \in H_2'$, то, по формуле Коши (34),

$$(f, \varphi_k) = f(\lambda_k) \qquad (k = 1, 2, \quad .). \tag{41}$$

Если для некоторого k будет $f(\lambda_k) = 0$, то $f \perp \varphi_k$ и наоборот: если $f \perp \varphi_k$, то $f(\lambda_k) = 0$.

Лемма 4. *Если $f \in H_2'$ и $f(\lambda_1) = \quad = f(\lambda_n) = 0$, то $f \perp \mathcal{L}(\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\})$. И наоборот: если $f \in H_2'$ и $f \perp \mathcal{L}(\{\gamma_1, \ldots \quad \gamma_n\})$, то $f(\lambda_1) = \quad . = f(\lambda_n) = 0$.*

Доказательство. Если $f(\lambda_k) = 0$, то, по формуле (41), $f \perp \varphi_k$ для $k = 1, \quad n$, т.е. $f \perp \mathcal{L}(\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\})$.

Если, наоборот, $f \perp \mathcal{L}(\{\gamma_1, \quad \gamma_n\})$, то $f \perp \varphi_k$ и потому $f(\lambda_k) = 0$ для $k = 1, \ldots, n$.

Лемма 5. *Если функции f, $g \in H_2'$ и $(f, \gamma_k) = (g, \gamma_k)$, то $f(\lambda_k) = g(\lambda_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. И наоборот: если f, $g \in H_2'$ и $f(\lambda_k) = g(\lambda_k)$, то $(f, \gamma_k) = (g, \gamma_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.*

Доказательство леммы 5 получаем применяя лемму 4 для функции $f - g$.

Теперь рассмотрим ряд Фурье функции $f \in H_2'$ по ортонормированной системе $\{\varphi_n\}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \gamma_k) \cdot \gamma_k(z).$$

Частичную сумму этого ряда обозначим S_n:

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (f, \gamma_k) \cdot \gamma_k(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{k,n}}{(1 - \bar{\lambda}_k z)^2}. \tag{42}$$

Теорема 6. *Пусть $\{\gamma_n\}$ – ортонормированная система функций пространства H_2', получаемая при ортогонализации системы $\{\varphi_k\}$, где $\varphi_k(z) = (1 - \bar{\lambda}_k z)^{-2}$ и $|\lambda_k| < 1$. Если $f \in H_2'$, то частичная сумма S_n ряда Фурье функции f по системе $\{\gamma_k\}$ имеет такие свойства:*

1) *$S_n(\lambda_k) = f(\lambda_k)$ для $k = 1, \ldots, n$;*

2) $\|f - S_n\|_{H_2'} = \min\limits_{\sigma \in \mathcal{L}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})} \|f - \sigma\|_{H_2'}$;

3) *функция S_n минимальна на множестве $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ в классе H_2', т.е. норма $\|S_n\|_{H_2'}$ не превышает нормы любой другой функции класса H_2', принимающей в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ значения $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$.*

Доказательство. Очевидно, $(S_n, \gamma_k)=(f, \gamma_k)$ для $k \leqslant n$, поэтому из леммы 5 следует, что $S_n(\lambda_k)=f(\lambda_k)$ для $k=1, \ldots, n$.

Из общих свойств рядов Фурье в любом гильбертовом пространстве следует, что равенство

$$f=S_n+(f-S_n) \tag{43}$$

является ортогональным разложением элемента f гильбертова пространства H'_2, где $S_n \in \mathcal{L}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$, а $f-S_n \perp \mathcal{L}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$ и, следовательно,

$$\|f-S_n\|_{H'_2}=\min_{\sigma \in \mathcal{L}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})} \|f-\sigma\|_{H'_2}.$$

Докажем третье утверждение теоремы.

Пусть $g \in H'_2$ и $g(\lambda_k)=f(\lambda_k)$ для $k=1, \ldots, n$. Тогда из леммы 5 получается, что $(g, \gamma_k)=(f, \gamma_k)$ для $k=1, \ldots, n$, т.е. первые n коэффициентов Фурье функций f и g совпадают и равны коэффициентам Фурье функции S_n. Тогда равенство

$$g=S_n+(g-S_n)$$

является ортогональным разложением функции g, где

$$S_n \in \mathcal{L}(\{\gamma_1, \quad \gamma_n\}), \quad g-S_n \perp \mathcal{L}(\{\gamma_1, \quad \gamma_n\})$$

и потому

$$\|g\|^2_{H'_2}=\|S_n\|^2_{H'_2}+\|g-S_n\|^2_{H'_2} \geqslant \|S_n\|^2_{H'_2}.$$

Таким образом, число $\|S_n\|_{H'_2}$ не превышает нормы любой другой функции g класса H'_2, для которой $g(\lambda_k)=f(\lambda_k)$ $(k=1, \ldots, n)$.

Единственность минимальной функции следует из единственности ортогонального разложения (43).

Утверждение теоремы 6 можно формулировать и таким образом.

Теорема 7. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — заданные различные внутренние точки единичного круга и $f \in H'_2$. Тогда единственной функцией вида*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(1-\bar{\lambda}_k z)^2}, \tag{44}$$

осуществляющей наилучшее приближение функции f в метрике H'_2, является функция вида (44), *интерполирующая в точках λ_k значения $f(\lambda_k)$* $(k=1, \ldots, n)$.

Аналогичная теорема для класса H_2 доказана в [17].

Следствие. *Любая минимальная на множестве $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ в классе H'_2 функция имеет вид* (44).

С помощью теорем 6 и 7 можно решить вопрос о существовании функции класса H'_2, интерполирующей в точках заданной бесконечной последовательности $\{\lambda_k : |\lambda_k|<1\}$ заданные значения $\{c_k\}$.

Теорема 8. *Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательнсcть различных внутренних точек единичного круга, $\{c_k\}$ — последовательность комплексных чисел. Тогда*:

1) *существуют комплексные числа $a_{k,n}$ ($k=1$, $n=1, 2, \ldots$), удовлетворяющие равенствам*:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{j,m}\bar{a}_{k,n}}{(1-\bar{\lambda}_j\lambda_k)^2}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad m=1, \ \ldots, n-1,\\ 1, & \text{если}\quad m=n\ (n=1,\ 2,\ \ldots),\end{cases}\tag{45}$$

выбор которых зависит от $\{\lambda_k\}$ и не зависит от $\{c_k\}$;

2) *для того, чтобы существовала функция класса H_2', принимающая в точках λ_k значения c_k ($k=1, 2, \ldots$), необходимо и достаточно, чтобы сходился такой числовой ряд*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^2,\tag{46}$$

где числа A_n определяются равенствами:

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{k,n}c_k\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots);\tag{47}$$

3) *если ряд* (46) *сходится, то единственная минимальная интерполирующая функция f^* класса H_2' (т.е. интерполирующая в точках λ_k значения c_k ($k=1, 2, \ldots$) функция с наименьшей нормой) равна сумме такого ряда*:

$$f^*(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\gamma_n(z),\tag{48}$$

где

$$\gamma_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k,n}}{(1-\bar{\lambda}_k z)^2}\tag{49}$$

и ряд (48) *сходится равномерно внутри единичного круга и по норме в H_2'; кроме того*,

$$\|f^*\|^2_{H_2'}=\sum_{n=1}^{n}|A_n|^2.\tag{50}$$

Доказательство. Для того, чтобы доказать существование чисел $a_{k,n}$, достаточно ортогонализовать систему функций $\{\varphi_k\}$, определяемых равенством (38). При этом коэффициенты $a_{k,n}$, связывающие ортогонализованную систему $\{\gamma_k\}$ с системой $\{\gamma_k\}$ равенствами (39) и (40), что нетрудно проверить с помощью (41), будут удовлетворять равенствам (45); очевидно, $a_{k,n}$ не зависят от выбора $\{c_k\}$. Следовательно, при любом выборе $\{\lambda_k\}$ и $\{c_k\}$ существуют числа A_n, определяемые равенством (47).

Если $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 < \infty$, то, по теореме Рисса – Фишера, существует $f^* \in H_2'$ такая, что $(f^*, \gamma_n) = A_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ и f^* равна сумме своего ряда Фурье (48). Тогда по (41):

$$A_n = (f^*, \gamma_n) = \left(f^*, \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} \varphi_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{k,n} (f^*, \varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{k,n} f^*(\lambda_k).$$

Из полученного равенства отнимая (47) получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{k,n} [f^*(\lambda_k) - c_k] = 0 \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

т. е. $f^*(\lambda_k) = c_k$ для $k=1, 2,$

Если f – другая функция класса H_2' и $f(\lambda_k) = f^*(\lambda_k)$ $(k=1, 2, \ldots)$, то, по лемме 5, $(f^*, \gamma_k) = (f, \gamma_k) = A_k$, т.е. ряды Фурье функций f и f^* совпадают и, так как f^* – сумма этого ряда, то равенство $f = f^* + (f - f^*)$ является ортогональным разложением элемента f пространства H_2' и потому

$$\|f\|^2_{H_2'} = \|f^*\|^2_{H_2'} + \|f - f^*\|^2_{H_2'} \geqslant \|f^*\|^2_{H_2'},$$

т.е. f^* – минимальная интерполирующая функция. Равенство (50) следует из (48).

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
8.IX.1969

Литература

1. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.-Л., Гостехиздат, 1950.
2. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
3. С. Я. Хавинсон, Об одной экстремальной задаче теории аналитических функций, „Уст. мат. наук", 4, 4(32) (1949), 158–159.
4. A. J. Macintyre, W. W. Rogosinski, Extremum problems in the theoria of analytic functions, „Acta Math.", 82 (1950) 275–325.
5. С. Я. Хавинсон, О некоторых экстремальных задачах теории аналитических функций, „Уч. зап. МГУ", математика, 148 (1951), 133–143.
6. W. A. Rogosinski, H. S. Shapiro, On certain extremum problems for analytic functions, „Acta Math.", 90 (1953), 287–318.
7. С. Я. Хавинсон, Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций, „Матем. сб.", 36 (78), 3(1955), 445–477.
8. В. Кабайла, Об интерполяции функций в классе H_δ, „Усп. матем. наук", 13, 1(79) (1958), 181–188.
9. В. Кабайла, Уточнение некоторых теорем об интерполяции в классе H_δ, „Уч. зап. Вильнюсского Гос. ун-та", 33, математика, физика, 9(1960), 15–19.
10. В. Кабайла, О некоторых задачах интерполяции в классе H_p при $p<1$, „Докл. АН СССР", 132, 5(1960), 1002–1004.

11. В. Кабайла, Об интерполяции в классах H_p и E_p (автореф. диссерт.), Вильнюс, 1960.
12. В. Кабайла, Некоторые задачи интерполяции в классе H_δ при $\delta<1$, Сб. „Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного", М., Изд. физ. матем. лит. 1961, 180–187.
13. H. S. Shapiro, A. L. Shields, On some interpolation problems for analytic functions, „Amer. J. Math.", 83 (1961), 513–532.
14. В. Кабайла, Интерполяционные последовательности для классов H_p в случае $p<1$, „Лит. матем. сб.", III, 1 (1963), 141–147.
15. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Гос. изд. техн.-теорет. лит., М.–Л., 1949.
16. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М., „Мир", 1965.
17. Дж. Л. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., Изд. ин. лит., 1961.

KAI KURIOS H_p' KLASĖS FUNKCIJŲ SAVYBĖS IR INTERPOLIACINIAI UŽDAVINIAI

V. Kabaila

(*Reziumė*)

Tegul H_p $(p>0)$ – analizinių vienetiniame skritulyje funkcijų, kurioms

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\Theta})|^p\,d\Theta=M<\infty,$$

klasė, H_p' $(p>0)$ – analizinių vienetiniame skritulyje funkcijų, kurioms

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}|f(z)|^p\,dS_z=\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\pi}\int_0^{\rho}r\,dr\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^p\,d\Theta=N<\infty,$$

klasė, $\|f\|_{H_p}=M^{\frac{1}{p}}$ ir $\|f\|_{H_p'}=N^{\frac{1}{p}}$, $p>0$ (jei $p<1$, tai $\|f\|_{H_p}$ ir $\|f\|_{H_p'}$ yra „pseudonorma" [14]).

Šiame straipsnyje įrodyta:

1) $|f(z)|\leqslant\frac{\|f\|_{H_p'}}{(1-|z|^2)^{\frac{2}{p}}}$, *jei* $f\in H_p'$ *ir* $|z|<1$; *jei* $f_\lambda(z)=(1-\bar\lambda z)^{-\frac{4}{p}}$ $(|\lambda|<1)$, *tai*

$$|f_\lambda(\lambda)|=\frac{\|f_\lambda\|_{H_p'}}{(1-|\lambda|^2)^{\frac{2}{p}}}.$$

2) $H_p\subset H_{2p}'$ *visiems* $p>0$; *jei* $0<p\leqslant 1$, *tai* $H_p\neq H_{2p}'$;

3) *klasė* H_1' *sutampa su funkcijų, išreiškiamų vienetiniame skritulyje dvilypiu Koši integralu*:

$$f(\lambda)=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}\frac{f(z)}{(1-\lambda\bar z)^2}\,dS_z\qquad(\textit{visiems }\lambda:|\lambda|<1),$$

klase (G. M. Fichtengolco teoremos [1] H_1 klasei analogas);

4) *tegul* $f\in H_2'$ *ir* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – *duoti vienetinio skritulio taškai. Tuomet vienintelė funkcija užrašoma tokiu pavidalu*:

$$\frac{C_1}{(1-\bar\lambda_1 z)^2}+\ldots+\frac{C_n}{(1-\bar\lambda_n z)^2}\qquad(1)$$

($|\lambda_k|<1$, $k=1, \ldots, n$; $\lambda_i \neq \lambda_j$, *jei* $i \neq j$) *ir geriausiai aproksimuojanti funkciją f erdvės* H'_2 *metrikos prasme, yra* (1) *pavidalo funkcija, interpoliuojanti* $f(z)$ *reikšmes taškuose* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (teorema įrodyta metodu, panaudotu [17] klasei H_2);

5) *tegul* $\{\lambda_k : |\lambda_k|<1\}$ *taškų seka ir* $\{c_k\}$ — *kompleksinių skaičių seka. Tuomet:*

a) *egzistuoja skaičiai* $a_{m,n}$, *kuriems*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{j,m}\bar{a}_{k,n}}{(1-\bar{\lambda}_j \lambda_k)^2} = \begin{cases} 0, & jei \quad m=1, \ldots, n-1, \\ 1, & jei \quad m=n \, (n=1, 2, \ldots); \end{cases}$$

b) *tam, kad egzistuotų* H'_2 *klasės funkcija, interpoliuojanti duotuose taškuose* λ_k *duotas reikšmes* c_k $(k=1, 2, \ldots)$, *būtina ir pakankama, kad konverguotų eilutė*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2,$$

kur

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{k,n} c_k \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

ON THE FUNCTIONS OF CLASS H'_p AND INTERPOLATION PROBLEMS

V. Kabaila

(*Summary*)

Let H_p $(p>0)$ be the class of the functions f, analytic in the unit circle, for which

$$\lim_{\rho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\Theta})|^p \, d\Theta = M < \infty,$$

H'_p $(p>0)$ the class of the functions, analytic in the unit circle, for which

$$\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f(z)|^p \, dS_z = \lim_{\rho \to 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{\rho} r \, dr \int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^p \, d\Theta = N < \infty,$$

$\|f\|_{H_p} = M^{\frac{1}{p}}$ and $\|f\|_{H'_p} = N^{\frac{1}{p}}$, $p>0$ (if $p<1$, then $\|f\|_{H_p}$ and $\|f\|_{H'_p}$ are „pseudonorm" [14]).

In this paper is proved:

1) $|f(z)| \leqslant \dfrac{\|f\|_{H'_p}}{(1-|z|^2)^{\frac{2}{p}}}$, *if* $f \in H'_p$ *and* $|z|<1$; *if* $f_\lambda(z) = (1-\bar{\lambda}z)^{-\frac{4}{5}}$ $(|\lambda|<1)$, *then*

$$|f_\lambda(\lambda)| = \frac{\|f_\lambda\|_{H'_p}}{(1-|\lambda|^2)^{\frac{2}{p}}}.$$

2) $H_p \subset H'_{2p}$ *for* $p>0$; *if* $0<p\leqslant 1$, *then* $H_p \neq H'_{2p}$;

3) *the class* H'_1 *is equal to the class of the functions f, for which in the unit circle*

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} \frac{f(z)}{(1-\lambda \bar{z})^2} \, dS_z \qquad (\textit{for all } \lambda : |\lambda|<1)$$

(analogical for H_1 [1]);

4) *let* $f \in H_2'$ *and* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *be the given points in the unit circle; then the unique function of the form*

$$\frac{C_1}{(1-\bar{\lambda}_1 z)^2} + \ldots + \frac{C_n}{(1-\bar{\lambda}_n z)^2} \tag{1}$$

($|\lambda_k| < 1$, $k=1, \ldots, n$; $\lambda_i \neq \lambda_j$ *if* $i \neq j$) *of best approximation to* f *in the sense norm of* H_2', *is the unique function of form* (1) *which interpolates to* $f(z)$ *in the points* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (this theorem is proved by the method used in [17] for H_2);

5) *let* $\{\lambda_k : |\lambda_k| < 1\}$ *be the given set of points and* $\{c_k\}$ *the given set of complex numbers; then*:

a) *there exist numbers* $a_{m,n}$, *for which*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{j,m} \bar{a}_{k,n}}{(1-\bar{\lambda}_j \lambda_k)^2} = \begin{cases} 0, & \text{if } m=1, \ldots, n-1, \\ 1, & \text{if } m=n \ (n=1, 2, \ldots); \end{cases}$$

b) *the necessary and sufficient condition that there exist the function* f *of the class* H_2' *which takes on the given values* c_k *in the given points* λ_k ($k=1, 2, \ldots$), *is the convergence of the series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2,$$

where

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{k,n} c_k.$$