X ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1970

УДК – 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. Пипирас

§ 1. Результаты

Пусть

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n \tag{1}$$

независимые случайные величины с математическими ожиданиями $M\xi_i=0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Будем считать, что случайная величина ξ_i принимает только значения вида a_i+h_ik $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, где $h_i>0$ – максимальный шаг распределения. Ради сохранения решетчатости случайной величины $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ приходится потребовать: существует число h такое, что $h_i=hl_i$, при некотором целом числе l_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Очевидно, без ограничения общности можем принять, что $|a_i|\leqslant B_n$, $i=1,\ \ldots,\ n$.

Пусть:

$$B_n^2=\sum_{i=1}^{n} M\xi_i^2, \qquad B_{\nu n}=\sum_{i=1}^{n} M|\xi_i|^\nu, \qquad L_{\nu n}=\frac{B_{\nu n}}{B_n^\nu}\ (\nu\geqslant 1),$$

$$Z_n=\frac{S_n}{B_n},$$

F_ξ – функция распределения случайной величины ξ, $\tilde{\xi}$ – симметризованная случайная величина с функцией распределения

$$F_{\tilde{\xi}}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x+y)\,dF_\xi(y),$$

$[a]$ – целая часть a,

$$\Phi_{sZ_n}(x)=\Phi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{\nu=1}^{s-2} Q_{\nu S_n}(x)\,L_{\nu+2,\,S_n}$$

(см. [7] или [9])

$$D_{kZ_n}(x)=\sum_{\nu=1}^{k-2}\delta_\nu\left(\frac{h}{B_n}\right)^\nu S_\nu\left(\frac{xB_n}{h}-\frac{A_n}{h}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{A_n}{h}\right]\right)\frac{d^\nu}{dx^\nu}\,\Phi_{sZ_n}(x)\ (k\geqslant 3),$$

где

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$\delta_\nu=\begin{cases} 1, & \text{если } \nu=4m+1, \quad 4m+2, \\ -1, & \text{если } \nu=4m, \quad 4m+3, \end{cases}$$

$$S_{2l}(x)=\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi mx}{2^{2l-1}(\pi m)^{2l}}, \qquad l=1,\ 2,$$

$$S_{2l+1}(x)=\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi mx}{2^{2l}(\pi m)^{2l+1}} \qquad l=0,\ 1,$$

$\Theta_i(j, \ldots)$, $i=1,$ — константы, зависящие только от аргументов $j,$

Далее нам потребуются следующие условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=\infty,$

2) при некотором $\alpha>0$ имеем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{L_{1n}}{B_n^\alpha}<\infty,$

3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n L_{3n}<\infty,$

4) для любого $2\leqslant q\leqslant \dfrac{42 B_n L_{3n}}{h}$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{\ln B_n}\sum_{i=1}^{n} P\left\{\frac{\tilde{\xi}_i}{h}\not\equiv 0 \ (\operatorname{mod} q)\right\}\to\infty\ (n\to\infty),$$

5) для некоторой положительной функции $\delta(u)=o(u)$ (при $u\to\infty$) имеем

$$\frac{1}{B_{rn}}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|u|>\delta(B_n(1+|x|))} |u|^r dF_{\xi_i}(u)\to 0, \text{ когда } B_n(1+|x|)\to\infty.$$

Здесь же отметим, что условия 1 и 2 следуют из условия $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{B_n^2}{n}>0$ (всегда $L_{1n}\leqslant\sqrt{n}$), а условия 1—3 следуют, например, из ограничений $\mathbf{M}\xi_i^2\geqslant m>0$ и $\mathbf{M}\,|\,\xi_i\,|^3\leqslant\mathbf{M}<\infty$ $(i=1,\quad n)$.

Теорема 1. *Если случайные величины* (1) *удовлетворяют условиям* 1—4 *и* $\mathbf{M}\,|\,\xi_i\,|^r<\infty$ $(i=1,\quad n;\ r\geqslant 3$ *— любое число), то при* $n\to\infty$ *имеем*

$$|F_{Z_n}(x)-\Phi_{[r],\,Z_n}(x)-D_{[r],\,Z_n}(x)|=O\left(L_{rn}+\frac{1}{B_n^{[r]-1}}\right)\frac{1}{(1+|x|)^r}, \tag{2}$$

а если выполняется еще и условие 5, *то*

$$|F_{Z_n}(x)-\Phi_{[r],\,Z_n}(x)-D_{[r],\,Z_n}(x)|\leqslant\Theta_1(r)\left(\frac{h}{B_n}\right)^{[r]-1}\times$$

$$\times\frac{1}{(1+|x|)^{[r]+1}}+\frac{\varepsilon_1(B_n(1+|x|))}{(1+|x|)^r}L_{rn}, \tag{3}$$

где положительная функция $\varepsilon_1(u)\to 0$, *когда* $u\to\infty$.

Замечание 1. В оценке остаточного члена соотношений (2) и (3) слагаемые с множителем $B_n^{1-\{r\}}$ исчезают, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, B_n^2 B_{rn}^{-1} < \infty$. Такой цели достигнем всегда, заменив в теореме

$D_{[r],\, z_n}(x)$ на $D_{[r]+2,\, z_n}(x)$.

Для доказательства теоремы 1 приходится интеграл (20) оценивать аналогично обоснованию замечания к теореме 1 из [1]. После этого условия 1—4 и неравенства (2) [9], (3) [9] дают оценку (2). Здесь также следует иметь в виду, что условия 1 и 3 при достаточно большом n позволяют урезанные случайные величины ρ_i заменить через ξ_i, $i=1$, Если дополнительно применим условие 5 и неравенство

$$\frac{1}{\omega^{s+1}} \sum_{i=1}^{n} \int_{|u|\leqslant\omega} u^{s+1}\, dF_{\xi_i}(u) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\frac{\delta(\omega)}{\omega}\right)^{s+1-r} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} R_{ri}\left(\delta(\omega)\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} R_{ri}(0)} \right) \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} R_{ri}(0)}{\omega^{r}} \tag{4}$$

$s=[r]$, $0<\delta(\omega)<\omega$,

где обозначено

$$R_{ri}(u) = \int_{|x|>u} |x|^r\, dF_{\xi_i}(x), \quad u\geqslant 0, \quad i=1, \qquad \text{с } \omega = B_n(1+|x|),$$

то получим оценку (3).

Заметим, что неравенство (4) следует из соотношений

$$\int_{|u|\leqslant\omega} |u|^{s+1}\, dF_{\xi_i}(u) = -\int_0^{\omega} u^{s+1-r}\, dR_{ri}(u) =$$

$$= -\omega^{s+1-r} R_{ri}(\omega) + (s+1-r) \int_0^{\omega} R_{ri}(u)\, u^{s-r}\, du \leqslant$$

$$\leqslant (s+1-r)\left[\int_0^{\delta(\omega)} R_{ri}(u)\, u^{s-r}\, du + \int_{\delta(\omega)}^{\omega} R_{ri}(u)\, u^{s-r}\, du \right] \leqslant$$

$$\leqslant R_{ri}(0)\left(\delta(\omega)\right)^{s+1-r} + R_{ri}\left(\delta(\omega)\right)\left(\omega^{s+1-r} - \left(\delta(\omega)\right)^{s+1-r}\right) \leqslant$$

$$\leqslant R_{ri}(0)\left(\delta(\omega)\right)^{s+1-r} + R_{ri}\left(\delta(\omega)\right)\omega^{s+1-r}.$$

Следствие 1. *В теореме 1 условие 4 можно заменить более сильным условием:*

4′) *общий наибольший делитель множества A всех целых чисел m, для которых*

$$\frac{1}{\ln B_n} \sum_{i=1}^{n} P\{\xi_i = (a_i + hm_i) + hm\} P\{\xi_i = a_i + hm_i\} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

равен 1, *причем* m_i *такие, что*

$$P\{\xi_i = a_i + hm_i\} \geqslant P\{\xi_i = a_i + hm\}, \quad i = 1, 2,$$

для любого целого m.

В условии 4 случайные величины ξ_i можем заменить через $\eta_i = \xi_i - a_i - hm_i$. Заметив, что

$$P\left\{\frac{\bar{\eta}_i}{h} = m\right\} \geqslant P\{\xi_i = (a_i + hm_i) + hm\} P\{\xi_i = a_i + hm_i\}$$

и что для любого $q \geqslant 2$ найдется такое $m \in A$, что $m \neq 0 \pmod{q}$, легко получаем доказательство следствия.

Пусть, далее, среди случайных величин (1) имеется только k различно распределенных (случай k-последовательности — термин, введенный В. В. Петровым в [5]). Обозначим их через ξ^1, ξ^k. Пусть их максимальные шаги соответственно $H_1, \ldots, H_k$. Так как в нашей схеме $\mathbf{M}\xi^i = 0$, то нет смысла рассматривать случай $\mathbf{D}\xi^i = 0$ ($i = 1$, k). Тогда очевидно, что B_n^2 и n величины одинакового порядка. Через n_i обозначим, наконец, число случайных величин ξ^i среди случайных величин (1), $i = 1$, k.

Так как в этом случае условия 1–3 и 5 выполняются, то справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Если* $\mathbf{M}\,|\xi^i|^r < \infty$ ($i = 1$, k; $r \geqslant 3$ — *любое число*) *и выполнено условие* 4, *то*

$$|F_{Z_n}(x) - \Phi_{[r]\,Z_n}(x) - D_{[r]\,Z_n}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_2\left(B_n(1 + |x|)\right)}{(1 + |x|)^r} L_{rn},$$

где положительная функция $\varepsilon_2(u) \to 0$, *когда* $u \to \infty$.

Следствие 2. *В теореме 2 условие 4 можно заменить более сильными требованиями:*

$$4'')\ \varliminf_{n \to \infty} \frac{n_i}{\ln n} = \infty, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

и

4‴) *общий наибольший делитель множества*

$$\left\{\frac{H_1}{h}, \ldots, \frac{H_k}{h}\right\}$$

равен 1.

Для одинаково распределенных случайных величин аналогичная оценка получена Л. В. Осиповым [2].

В доказательстве следствия 2 мы можем считать, что $P\{\xi^i = a_i\} > 0$, $i = 1$, k. Тогда случайная величина $\zeta_i = h^{-1}(\xi_i - a_i)$ с положительными вероятностями принимает только значения вида $\frac{H_i}{h}m$ $(m=0, \pm 1, \ldots)$, причем $\frac{H_i}{h}$ максимальный шаг, $i=1, \ldots, k$. Пусть d общий наибольший делитель множества всех целых m, для которых $P\{\zeta_i=m\}>0$, хотя бы для одного ζ_i, $i=1, \ldots, k$. Легко показать, что все $\frac{H_i}{h}$ делятся на d. Поэтому из условия 4‴ следует, что $d=1$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству следствия 1.

При формулировке и доказательстве следствий 1 и 2 применялись некоторые идеи работ [3]–[6].

Введем случайные величины

$$\rho_i=\begin{cases}\frac{\xi_i-a_i}{h} & \text{если } |\xi_i|\leqslant B_n,\\ 0 & \text{если } |\xi_i|>B_n,\end{cases}$$

и функции

$$\alpha_i(a, q, N_n)=\frac{1}{q^2}\sum_{-\frac{q}{2}<r\leqslant\frac{q}{2}} r^2P\{a\bar\rho_i\equiv r \,(\mathrm{mod}\, q), |\bar\rho_i|\leqslant N_n\},$$

причем min в теореме 3 берется по всем несократимым дробям $\frac{a}{q}$ из интервала $\left[\frac{1}{2N_n}, \frac{1}{2}\right]$ с знаменателями $1<q\leqslant 2N_n$ (т. е. $1\leqslant a\leqslant\frac{q}{2}$, $1<q\leqslant 2N_n$ и $(a, q)=1$), $i=1, \ldots, n$.

Теорема 3. *Если* $\mathbf{M}|\xi_i|^s<\infty$ ($s\geqslant 3$ — *целое число*; $i=1, 2, \ldots, n$), *то*

$$|F_{Z_n}(x)-\Phi_{sZ_n}(x)-D_{kZ_n}(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\Theta_2(s)\left\{\frac{1}{B_n^s(1+|x|)^s}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|u|>B_n(1+|x|)}|u|^s d\,F_{\xi_i}(u)+\right.$$

$$+\frac{1}{B_n^{s+1}(1+|x|)^{s+1}}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|u|\leqslant B_n(1+|x|)}|u|^{s+1}dF_{\xi_i}(u)+$$

$$+\frac{1}{(1+|x|)^{s+1}}\left[\left(\frac{h}{B_n}\right)^{k-1}+\min\{\ln(1+N_n), N_nL_{3n}\}(1+L_{1n}^{s+1})\times\right.$$

$$\left.\left.\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,q}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a, q, N_n)\right\}\right]\right\},$$

для любого $N_n\geqslant 21h^{-1}B_nL_{3n}$ *и любого целого числа* $k\geqslant 3$.

Замечание 2. Если $21B_nL_{3n}<h$, то в оценке остаточного члена нет слагаемого, в которое входит N_n.

Напишем еще обобщение теоремы 2 из [8] и его следствия. Пусть

$$z_{kn}=B_n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+hk\right), \quad k=0, \pm 1, \ldots$$

$$\varphi_{rZ_n}=\frac{d}{dx}\Phi_{rZ_n}(x), \quad r=s-1, s,$$

$$P(r,\ l,\ z_{kn})=|z_{kn}|^l\left|\frac{B_n}{h}P\{Z_n=z_{kn}\}-\varphi_{rZ_n}(z_{kn})\right|,\quad l=0,\ 1,$$

Условие 1′. $\lim\limits_{n\to\infty} L_{sn}=0$.

Условие 5′. При некотором $\alpha<1$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{B_{sn}}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|u|>B_n^\alpha}|u|^s dF_{\xi_i}(u)\to 0\quad (n\to\infty).$$

Теорема 1′. *Если* $\mathbf{M}|\xi_i|^s<\infty$ ($i=1,\ \ldots,\ n$; $s\geqslant 3$ — *целое число*) *и выполнены условия* 1—4, *то при* $n\to\infty$

$$P(s-1,\ l,\ z_{kn})=O(L_{sn}).$$

Теорема 1″. *Если* $\mathbf{M}|\xi_i|^s<\infty$ ($i=1,$; $s\geqslant 3$ — *целое число*) *и выполнены условия* 1′, 2—4, 5′, *то при* $n\to\infty$

$$P(s,\ l,\ z_{kn})=o(L_{sn}).$$

Теорема 2′. *В условиях теоремы* 2 *при* $r=s$ ($s\geqslant 3$ — *целое число*) *имеем*

$$P(s,\ l,\ z_{kn})=o(L_{sn})\quad (\text{при } n\to\infty).$$

Теорема 3′. *Если* $\mathbf{M}|\xi_i|^s<\infty$ ($i=1,$ $s\geqslant 3$ — *целое число*), *то*

$$P(s-1,\ l,\ z_{kn})\leqslant\Theta_3(l,\ s)\Bigg[L_{sn}+h^{-1}B_nL_{3n}(1+L_{sn}+L_{1n}^l)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\ q}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a,\ q,\ N_n)\right\}\Bigg],$$

а если выполнены еще и условия 1′ *и* 5′, *то*

$$P(s,\ l,\ z_{kn})\leqslant\varepsilon_3(n)L_{sn}+\Theta_4(l,\ s)h^{-1}B_nL_{3n}(1+L_{1n}^l)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,\ q}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a,\ q,\ N_n)\right\},$$

для любого $N_n>4h^{-1}B_nL_{3n}$, *причем* $\alpha_i(a,\ q,\ N_n)$ *определяются через случайные величины* $\rho_i=h^{-1}(\xi_i-a_i)$, $i=1,$ n, *и* $\varepsilon_3(n)\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Заметим, что появление представляемой работы вызвано, прежде всего, исследованиями А. А. Миталаускаса, В. А. Статулявичуса [1] и Л. В. Осипова [2].

§ 2. Оценки для усеченных случайных величин

В этом параграфе рассматриваются независимые случайные величины

$$\xi_1,\ \xi_2\qquad \xi_n \tag{5}$$

с нулевыми математическими ожиданиями $\mathbf{M}\xi_i$ и конечными дисперсиями $\sigma_{\xi_i}^2$, $i=1,$ n.

Обозначим

$$\eta_i = \begin{cases} \xi_i, & \text{если } |\xi_i| \leqslant B_n, \\ 0, & \text{если } |\xi_i| > B_n, \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_i = \begin{cases} \xi_i, & \text{если } |\xi_i| \leqslant B_n, \\ a_i, & \text{если } |\xi_i| > B_n \end{cases}$$

(a_i — произвольные фиксированные числа),

$$b_i^{(n)} = \int\limits_{|u| > B_n} dF_{\xi_i}(u),$$

$$E_c(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leqslant c, \\ 1, & \text{если } u > c, \end{cases}$$

$$\bar{F}_i(u) = F_{\eta_i}(u) - b_i^{(n)} E_0(u), \quad i = 1,\ 2,$$

Тогда

$$F_{\bar{\eta}_i}(u) = \bar{F}_i(u) + b_i^{(n)} E_{a_i}(u).$$

Также обозначим:

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} \bar{\eta}_i,$$

$$Y_n = \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} \eta_i.$$

Лемма 1. *Для любого целого неотрицательного k имеет место неравенство*

$$|F_{Y_n}(x) - F_{\bar{Y}_n}(x)| \leqslant \frac{\Theta(k)}{(1+|x|)^k} \left(1 + \frac{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|^k}{B_n^k}\right) \sum_{i=1}^{n} b_i^{(n)}.$$

Доказательство. Так как

$$(E_{a_i} * E_{a_j})(u) = E_{a_i + a_j}(u)$$

$$(F * E_{a_i})(u) = F(u - a_i),$$

то

$$\left(\prod_{i=1}^{n}{}^{*} F_{\bar{\eta}_i}\right)(u) = \left(\prod_{i=1}^{n}{}^{*} \bar{F}_i\right)(u) + \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{n}{}^{*} \bar{F}_\nu(u - a_i) + \right.$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_i b_j \left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i,j}}^{n}{}^{*} \bar{F}_\nu(u - a_i - a_j) + \right.$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < m \leqslant n} b_i b_j b_m \left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i,j,m}}^{n}{}^{*} \bar{F}_\nu\right)(u - a_i - a_j - a_m) + \cdots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{n} b_\nu \bar{F}_i \left(u - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{n} a_\nu\right) + \prod_{i=1}^{n} b_i E_{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}(u)$$

и

$$\left(\prod_{i=1}^{n}{}^{*} \bar{F}_i\right)(u)=\left(\prod_{i=1}^{n}{}^{*} F_{\eta_i}\right)(u)-\sum_{l=1}^{n} b_l\left(\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq l}}^{n}{}^{*} F_{\eta_\nu}\right)(u)+$$

$$+\ \ldots\ +(-1)^n b_1 \ldots b_n E_0(u).$$

Согласно (6) [9] (так будем указывать на соотношения статьи [9]) и из рассуждений аналогичных доказательству (10) [9] следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^k d\left(\prod_{i=1}^{r}{}^{*} \bar{F}_{l_i}\right)(uB_n)\leqslant\Theta(k), \qquad k=0,\ 1,\ \ldots$$

$r=1,\ 2,\ \ldots\ n$, где $1\leqslant l_i\leqslant n$ – все различные.

Отсюда и согласно неравенству $|a+b|^k\leqslant 2^{k-1}(|a|^k+|b|^k)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^k d\left(\prod_{i=1}^{r}{}^{*} \bar{F}_{l_i}\right)(uB_n-c)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} \left|u+\frac{c}{B_n}\right|^k d\left(\prod_{i=1}^{r}{}^{*} \bar{F}_{l_i}\right)(uB_n)\leqslant\Theta(k)\left(1+\left|\frac{c}{B_n}\right|^k\right).$$

Из изложенных соотношений и (6) [9] получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^k \left| d\left(\left(\prod_{i=1}^{n}{}^{*} F_{\bar{\eta}_i}\right)(uB_n)-\left(\prod_{i=1}^{n}{}^{*} F_{\eta_i}\right)(uB_n)\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(k)\left(1+\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|^k}{B_n^k}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i+2^k\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} b_i b_j+\right.$$

$$\left.+3^k\sum_{1\leqslant i<j<m\leqslant n} b_i b_j b_m+\ \ldots\ +n^k\prod_{i=1}^{n} b_i\right)\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(k)\left(1+\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|^k}{B_n^k}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt[3]{3^k}b_i)-1\right),$$

так как

$$\max_{1\leqslant r\leqslant n}\left(\sqrt[r]{r^k}\right)=\sqrt[3]{3^k}.$$

Далее,

$$\prod_{i=1}^{n}(1+b_i\sqrt[3]{3^k})-1\leqslant e^{\sqrt[3]{3^k}\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}-1\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt[3]{3^k}\sum_{i=1}^{n} b_i e^{\sqrt[3]{3^k}\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}\leqslant\Theta(k)\sum_{i=1}^{n} b_i,$$

$$\sum_{1}^{n} b_i \leqslant 1$$

Этим завершаем доказательство леммы 1.

Обозначим:

$$\bar{B}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{\bar{\eta}_i}, \qquad \bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{\eta}_i - \mathbf{M}\bar{\eta}_i)}{\bar{B}_n}$$

$$\bar{L}_{\nu n} = \frac{\sum_{1}^{n} \mathbf{M} \mid \bar{\eta}_i - \mathbf{M}\bar{\eta}_i}{\bar{B}_n^{\nu}} \qquad L_{\nu S_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M} \mid \eta_i \mid}{B_n^{\nu}}$$

$$p = \frac{B_n}{\bar{B}_n} \qquad q = -\frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\bar{\eta}_i}{\bar{B}_n}$$

$$\lambda_{\nu i} = \int\limits_{\mid > B_n} \mid u \mid^{\nu} dF_{\xi_i}(u) + \mid \qquad \int\limits_{\mid u \mid > B_n} dF_{\xi_i}(u),$$

$$\nu = 1, \qquad i = 1,$$

$$\Lambda_{sn} = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant s} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{\nu i}}{B_n^{\nu}}, \qquad \Lambda_{sS_n} = \frac{\sum_{1}^{n} \int\limits_{\mid u \mid > B_n} \quad u \mid^{s} dF_{\xi_i}(u)}{B_n^{s}}$$

Лемма 2. *Если случайные величины* (5) *удовлетворяют условию* $\mathbf{M} \mid \xi_i \mid^s < \infty$ ($s \geqslant 3$ — *целое число*), $i = 1,$ $\qquad$ n *и* $\Lambda_{sn} < \frac{1}{4}$, *то*

$$\Phi_{sZ_n}(x) - \Phi_{s+1,\ \bar{X}_n}(\bar{p}x + \bar{q}) \mid \leqslant$$

$$\leqslant \Theta(s) \left(\Lambda_{sn} + \bar{L}_{s+1, S_n} + \sum_{1}^{n} b_i^{(n)} \quad \frac{a_i}{B_n} \quad {}^{1} \right) e$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{M}\bar{\eta}_i^{\nu} = \int\limits_{-B_n}^{B_n} u^{\nu} dF_{\xi_i}(u) + a_i^{\nu} \int\limits_{\mid u \mid > B_n} dF_{\xi_i}(u) =$$

$$= \mathbf{M}\xi_i^{\nu} - \int\limits_{u > B_n} u^{\nu} dF_{\xi_i}(u) + a_i^{\nu} \int\limits_{u \mid > B_n} dF_{\xi_i}(u) = \mathbf{M}\xi_i^{\nu} + \Theta_1\lambda_{\nu i}, \quad \nu = 1,$$

$$\mathbf{M} \qquad \mid^{\nu} = \mathbf{M} \qquad {}^{\nu} + \Theta_2\lambda_{\nu i}, \qquad \nu = 1,$$

$$\mathbf{M} \quad \bar{\eta}_i \mid^{\nu} \leqslant \mathbf{M} \quad \xi_i \quad \text{если} \qquad \leqslant B_n, \qquad \nu = 1,$$

$$= \mathbf{M}\bar{\eta}_i^2 - (\mathbf{M}\bar{\eta}_i)^2 = \sigma^2_{\xi_i} + \Theta_3\lambda_{2i} + \Theta_4\lambda^2_{1i},$$

$$\frac{\bar{B}_n^2}{B_n^2}=1+\Theta_5\bar{\Lambda}_{sn}+\Theta_6\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_{1i}^2}{B_n^2}=1+\Theta_5\bar{\Lambda}_{sn}+\Theta_7\bar{\Lambda}_{sn}^2,$$

$$1-\frac{5}{16}\leqslant\frac{\bar{B}_n^2}{B_n^2}\leqslant 1+\frac{5}{16},\quad \text{если } \bar{\Lambda}_{sn}<\frac{1}{4}, \tag{6}$$

$$\bar{B}_n^2\leqslant B_n,\quad \text{если } |a_i|\leqslant B_n,$$

$$1-\left(\frac{\bar{B}_n}{B_n}\right)^m\leqslant\Theta(m)\,\bar{\Lambda}_{sn}\,(m\geqslant 1). \tag{7}$$

Здесь $|\Theta_\nu|\leqslant 1$, $\nu=1, \quad 7$.

Так как $\Lambda_{ss_n}\leqslant\bar{\Lambda}_{sn}$, то согласно (29) [9] имеем

$$L_{\nu n}\leqslant\frac{5}{4},\qquad \nu=2, \tag{8}$$

Далее,

$$\mathbf{M}\,|\bar{\eta}_i-\mathbf{M}\bar{\eta}_i|^\nu\leqslant 2^{\nu-1}(\mathbf{M}|\bar{\eta}_i|^\nu+|\mathbf{M}\bar{\eta}_i|^\nu)\leqslant 2^\nu\mathbf{M}\,|\bar{\eta}_i|^\nu\leqslant$$
$$\leqslant 2^\nu\left(\mathbf{M}\,|\eta_i|^\nu+|a_i|^\nu\int\limits_{|u|>B_n}dF_{\xi_i}(u)\right),\qquad \nu=1,\ 2,$$

$$\mathbf{M}\,|\bar{\eta}_i-\mathbf{M}\bar{\eta}_i|^\nu\leqslant 2^\nu\mathbf{M}\,|\xi_i|^\nu,\ \nu=1,\ \ldots,s,\ \text{если } |a_i|\leqslant B_n,$$

$$\bar{L}_{\nu n}\leqslant\Theta(\nu)\left(\bar{L}_{\nu s_n}+\sum_{i=1}^{n}b_i\left(\frac{a_i}{B_n}\right)^\nu\right),\qquad \nu=1,\ 2, \tag{9}$$

$$\bar{L}_{\nu n}\leqslant\Theta(\nu),\ \nu=2,\ 3,\qquad s\ \text{(согласно (24) [9])}, \tag{10}$$

$$\bar{L}_{3n}\leqslant 8L_{3n}\left(\frac{B_n}{\bar{B}_n}\right)^3,\ \text{если } |a_i|\leqslant B_n \tag{11}$$

$$\mathbf{M}\,(\bar{\eta}_i-\mathbf{M}\bar{\eta}_i)^\nu=\mathbf{M}\bar{\eta}_i^\nu-\nu\mathbf{M}\bar{\eta}_i^{\nu-1}\,\mathbf{M}\bar{\eta}_i+$$

$$\mathbf{M}\,(\bar{\eta}_i-\mathbf{M}\bar{\eta}_i)^\nu-\mathbf{M}\xi_i^\nu=\Theta_8\lambda_{\nu i}-\nu\mathbf{M}\bar{\eta}_i^{\nu-1}\,\mathbf{M}\bar{\eta}_i+\qquad \nu=1,$$

и, обозначив $\bar{\zeta}_i=\bar{\eta}_i-\mathbf{M}\bar{\eta}_i$,

$$\left|\frac{\mathbf{M}\bar{\zeta}_i^\nu}{\bar{B}_n^\nu}-\frac{\mathbf{M}\xi_i^\nu}{B_n^\nu}\right|\leqslant\Theta(\nu)\left(\frac{\lambda_{\nu i}}{B_n^\nu}+\frac{\lambda_{1i}}{B_n}\right),\qquad \nu=1,\ 2,$$

$$\left|\frac{\mathbf{M}\bar{\zeta}_i^\nu}{\bar{B}_n^\nu}\right|\leqslant\Theta(\nu)\left(\frac{\lambda_{\nu i}}{B_n^\nu}+\frac{\lambda_{1i}}{B_n}+\frac{\beta_{\nu\eta_i}}{B_n^\nu}\right),\qquad \nu=2,\ 3,$$

$$\left|\frac{\alpha_\nu\xi_i}{B_n^\nu}-\frac{\alpha_\nu\bar{\zeta}_i}{\bar{B}_n^\nu}\right|\leqslant\Theta(\nu)\left(\frac{\lambda_{\nu i}}{B_n^\nu}+\frac{\lambda_{1i}}{B_n}+\bar{\Lambda}_{sn}\frac{\beta_{2\eta_i}}{B_n^2}\right),$$

$$\nu=2,\qquad s\ \left(\text{согласно неравенству } \frac{\beta_{\nu\eta_i}}{B_n^\nu}\leqslant\frac{\beta_{2\eta_i}}{B_n^2},\ \nu\geqslant 2\right),$$

$$\left| \left(\frac{\alpha_1 \xi_i}{\bar{B}_n}\right)^{r_1} \quad \left(\frac{\alpha_\nu \xi_i}{B_n^\nu}\right)^{r_\nu} - \left(\frac{\alpha_1 \bar{\zeta}_i}{\bar{B}_n}\right)^{r_1} \quad \left(\frac{\alpha_\nu \bar{\zeta}_i}{\bar{B}_n^\nu}\right)^{r_\nu} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \Theta(\nu) \left(\frac{\lambda_{\nu i}}{B_n^\nu} + \frac{\lambda_{\nu-1, i}}{B_n^{\nu-1}} + \qquad + \frac{\lambda_{1i}}{B_n} + \Lambda_{sn} \frac{\beta_{2\tau_i}}{B_n^2} \right), \qquad \nu = 2,$$

Продолжив такие рассуждения по схеме доказательства леммы 3 [9] получаем доказательство леммы 2.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Сначала проведем доказательство при ограничении

$$\Lambda_{sS_n} = \frac{1}{B_n^s} \sum_{i=1}^{n} \int_{|u| > B_n} |u|^s \, dF_{\xi_i}(u) < \frac{1}{8}.$$

Тогда

$$\bar{\Lambda}_{sn} \leqslant 2\Lambda_{sS_n} < \frac{1}{4} \quad \text{(согласно (23) [9] и тому, что } |a_i| \leqslant B_n).$$

Обозначим

$$D_{s+1, \bar{X}_n}(x) = \sum_{\nu=1}^{s-2} \delta_\nu \left(\frac{h}{\bar{B}_n}\right)^\nu S_\nu\left(\frac{x\bar{B}_n}{h} + \frac{\bar{A}_n}{h}\right) \frac{d^\nu}{dx^\nu} \Phi_{s+1, \bar{X}_n}(x),$$

где

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{M}\bar{\eta}_i - a_i).$$

Так как

$$F_{\bar{Y}_n}(x) = F_{\bar{X}_n}(\bar{p}x + \bar{q}),$$

то

$$|F_{Z_n}(x) - \Phi_{sZ_n}(x) - D_{sZ_n}(x) \leqslant |F_{Z_n}(x) - F_{Y_n}(x)| +$$

$$+ |F_{Y_n}(x) - F_{\bar{Y}_n}(x)| + |F_{\bar{X}_n}(\bar{p}x + \bar{q}) - \Phi_{s+1, \bar{X}_n}(\bar{p}x + q) -$$

$$- D_{s+1, \bar{X}_n}(\bar{p}x + \bar{q})| + |\Phi_{s+1, \bar{X}_n}(\bar{p}x + \bar{q}) - \Phi_{sZ_n}(x)| +$$

$$+ |D_{s+1, \bar{X}_n}(\bar{p}x + \bar{q}) - D_{sZ_n}(x)| =$$

$$= w_1(x) + w_2(x) + w_3(x) + w_4(x) + w_5(x). \tag{12}$$

$w_1(x)$ можем оценить согласно лемме 2 [9], $w_2(x)$ – согласно лемме 1, $w_4(x)$ – согласно лемме 2. Дополнительно отметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{(n)} \leqslant \Lambda_{sS_n}.$$

Далее оценим $w_5(x)$.

Так как

$$D_{s+1,\,x_n}(px+q)=\sum_{\nu=1}^{s-2}\delta_\nu\left(\frac{h}{B_n}\right)^\nu S_\nu\left(\frac{xB_n}{h}-\frac{A_n}{h}+\left[\frac{A_n}{h}\right]\right)$$

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}\Phi_{s+1,\,\bar{x}_n}(px+\bar{q})$$

(здесь мы опирались на то, что $S_\nu(x)$ периодические с периодом 1), то

$$D_{s+1,\,\bar{x}_n}(\bar{p}x+\bar{q})-D_{sZ_n}(x)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{s-2}\delta_\nu\left(\frac{h}{B_n}\right)^\nu S_\nu\left(\frac{xB_n}{h}-\frac{A_n}{h}+\left[\frac{A_n}{h}\right]\right)\times$$

$$\times\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left[\Phi_{s+1,\,\bar{x}_n}(\bar{p}x+\bar{q})-\left(\frac{\bar{B}_n}{B_n}\right)^\nu\Phi_{sZ_n}(x)\right]$$

Согласно (7) имеем

$$\left(\frac{\bar{B}_n}{B_n}\right)^\nu=1+\Theta'(m)\,\Lambda_{sS_n},\quad \text{где}\quad |\Theta'(m)|\leqslant\Theta(m),$$

а согласно (8) и (45) [9] получаем неравенство

$$\left|\frac{d^\nu}{dx^\nu}\Phi_{sZ_n}(x)\right|\leqslant\Theta(\nu)\,e$$

Рассуждения, аналогичные доказательству леммы 2, дают оценку

$$\left|\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\Phi_{s+1,\,\bar{x}_n}(\bar{p}x+\bar{q})-\Phi_{sZ_n}(x)\right)\right|\leqslant\Theta(s)\,(\Lambda_{sS_n}+\bar{L}_{s+1,\,S_n})\,e$$

Отсюда

$$w_5\ (x)\leqslant\Theta(s)\,\frac{h}{B_n}\,(\Lambda_{sS_n}+L_{s+1,\,S_n})\,e^{-\frac{x^2}{4}}\tag{13}$$

Остается оценить $\bar{w}_3\ (x)$.

Для этого применим следующую лемму [2]:

Лемма 3. *Пусть A, T – положительные числа, $k\geqslant 2$ – целое число, $G(x)$ – неубывающая чисто разрывная функция, $\Pi(x)$ – функция ограниченной вариации.*

Если

1) $G(-\infty)=\Pi(-\infty)$, $G(\infty)=\Pi(\infty)$,

2) $\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k\,\left|d\left(G(x)-\Pi(x)\right)\right|<\infty$,

3) *функции $G(x)$ и $\Pi(x)$ могут иметь разрывы только в точках $x_\nu(x_\nu<x_{\nu+1};\ \nu=0,\ \pm 1,\ \ldots)$, причем в этих точках функции $G(x)$ и $\Pi(x)$ непрерывны слева или справа, существует $l>0$ такое, что $x_{\nu+1}-x_\nu\geqslant l$ при всех ν,*

4) *всюду, за исключением точек* x_ν, *функция* $\Pi(x)$ *имеет производную и* $|\Pi'(x)|<A(1+|x|)^{-k}$, *то при* $T>1$ *и* $Tl>\frac{160}{\pi}$ *имеем*

$$|G(x)-\Pi(x)|<\frac{\Theta(k)}{(1+|x|)^k}\left(\int_0^T|\delta_k(t)|\,t^{-1}\,dt+\int_0^T|\delta_0(t)|\,t^{-1}\,dt+\frac{A}{T}\right),$$

где

$$\delta_l(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,d\left(x^l\Big(G(x)-\Pi(x)\Big)\right),\qquad l=0,\ k.$$

Положим в этой лемме $k=s+1$, $G(x)=F_{X_n}(x)$,

$$\Pi(x)=\Phi_{s+1,\,X_n}(x)+D_{s+1,\,X_n}(x),\quad T=T_n=\frac{51B_n}{h}$$

Так как в этом случае $l\geqslant\frac{h}{B_n}$ то, ввиду (6), все условия леммы 3 выполнены, если $\frac{h}{B_n}<40$. Остается найти A.

Очевидно,

$$\frac{d}{dx}S_1\left(\frac{xB_n}{h}+\frac{A_n}{h}\right)=-\frac{B_n}{h},$$

где производная существует,

$$\frac{d}{dx}S_\nu\left(\frac{xB_n}{h}+\frac{A_n}{h}\right)=(-1)^{\nu-1}\frac{B_n}{h}S_{\nu-1}\left(\frac{xB_n}{h}+\frac{A_n}{h}\right),\ \text{если}\ \nu>1$$

Поэтому

$$\frac{d}{dx}D_{s+1,\,X_n}(x)=-\frac{d}{dx}\Phi_{s+1,\,X_n}(x)+$$

$$+\delta_{s-2}\left(\frac{h}{B_n}\right)^{s-2}S_{s-2}\left(\frac{xB_n}{h}+\frac{A_n}{h}\right)\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}\Phi_{s+1,\,X_n}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\Big(\Phi_{s+1,\,X_n}(x)+D_{s+1,\,X_n}(x)\Big)=$$

$$=\delta_{s-2}\left(\frac{h}{B_n}\right)^{s-2}S_{s-2}\left(\frac{xB_n}{h}+\frac{A_n}{h}\right)\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}\Phi_{s+1,\,X_n}(x).$$

Отсюда, из (10) и (45) [9] находим, что

$$A=\Theta(s)\left(\frac{h}{B_n}\right)^{s-2}$$

Следовательно,

$$w_3(x)\leqslant\frac{\Theta(s)}{(1+|px+q|)^{s+1}}\left(\int_0^{T_n}|\delta_{s+1,\,X_n}(t)|\,t^{-1}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{T_n}|\delta_{0,\,X_n}(t)|\,t^{-1}\,dt+\left(\frac{h}{B_n}\right)^{s-1}\right),\tag{14}$$

где

$$\bar{\delta}_{l,\,\bar{X}_n}(t)=\delta_{l,\,\bar{X}_n}(t)-\Delta_{l,\,\bar{X}_n}(t),$$

$$\delta_{l,\,\bar{X}_n}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\left(x^l\left(F_{\bar{X}_n}(x)-\Phi_{s+1,\,\bar{X}_n}(x)\right)\right),$$

$$\Delta_{l,\,\bar{X}_n}(t)=\int\limits_{\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\left(x^l D_{s+1,\,\bar{X}_n}(x)\right), \qquad l=0,\ s+1.$$

Отметим, что согласно неравенству, аналогичному (41) [9], множитель $(1+|px+q|)^{-(s+1)}$ можно заменить множителем $(1+|x|)^{-(s+1)}$. Нам достаточно оценить

$$\int\limits_0^{T_n} |\bar{\delta}_{s+1,\,\bar{X}_n}(t)|\,t^{-1}\,dt=\int\limits_0^{\frac{\pi B_n}{h}} +$$

$$+\int\limits_{\frac{\pi B_n}{h}}^{T_n} |\bar{\delta}_{s+1,\,\bar{X}_n}(t)|\,t^{-1}\,dt=I_1+I_2. \tag{15}$$

Сначала оценим I_1.

Методом математической индукции легко доказываются соотношения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx}\,\Phi^{(\nu+1)}_{s+1,\,\bar{X}_n}(x)\,dx=$$

$$=(-i)^\nu\sum_{j=0}^{\nu} C_\nu^{\nu-j}\frac{k!}{(k-j)!}\,h^{(k-j)}_{s+1,\,\bar{X}_n}(t)\,t^{\nu-j}=$$

$$=(-i)^\nu\frac{d^k}{dt^k}\left(t^\nu h_{s+1,\,\bar{X}_n}(t)\right), \qquad 0\leqslant\nu\leqslant k.$$

Здесь и далее

$$h_{s+1,\,\bar{X}_n}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\Phi_{s+1,\bar{X}_n}(x).$$

Отсюда и замечая, что при нечетном ν

$$S_\nu(x)=\frac{1}{i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{i2\pi mx}}{(2\pi m)^\nu}$$

а при четном ν

$$S_\nu(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{i2\pi mx}}{(2\pi m)^\nu},$$

где Σ' означает суммирование по всем целым $m \neq 0$, получаем, обозначив $\tau = \frac{2\pi}{h}$, что

$$\Delta_{s+1,\,\bar{X}_n}(t) = -it \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x^{s+1} D_{s+1,\,\bar{X}_n}(x)\,dx =$$

$$= -\frac{t}{i^{s+1}} \left(\sum_{\nu=1}^{s-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(\tau m \bar{B}_n)^{\nu}} e^{i\tau m \bar{A}_n} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d^{s+1}}{dt^{s+1}} \left[(t + \tau m \bar{B}_n)^{\nu-1} h_{s+1,\,\bar{X}_n}(t + \tau m \bar{B}_n) \right] \right).$$

Согласно (10) имеем

$$\left| \frac{d^r}{dt^r} \left(t^{\mu} h_{s+1,\,\bar{X}_n}(t) \right) \right| \leqslant \Theta(\mu,\ r,\ s)\, e^{-\frac{t^2}{4}} \qquad \mu = 0,\ 1, \tag{16}$$

Следовательно, при $|t| \leqslant \frac{\pi \bar{B}_n}{h}$ получаем, что

$$\left| \frac{\Delta_{s+1,\,\bar{X}_n}(t)}{t} \right| \leqslant \Theta(s) \sum_{\nu=1}^{s-2} \left(\frac{h}{\bar{B}_n} \right)^{\nu} \times$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{2\pi |m|} e^{-\frac{1}{4}(t+\tau m \bar{B}_n)^2} \leqslant \Theta(s) \frac{h}{\bar{B}_n} e^{-\frac{\pi^2 \bar{B}_n^2}{8h^2}}$$

Итак,

$$\int_0^{\frac{\pi \bar{B}_n}{h}} \left| \frac{\Delta_{s+1,\,\bar{X}_n}(t)}{t} \right| dt \leqslant \Theta(s)\, e^{-\frac{\pi^2 \bar{B}_n^2}{8h^2}} \tag{17}$$

Остается оценить

$$\int_0^{\frac{\pi \bar{B}_n}{h}} |\delta_{s+1,\,\bar{X}_n}(t)|\, t^{-1}\,dt. \tag{18}$$

Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 3 [9] нхаодим, что

$$\int_0^{\frac{\pi \bar{B}_n}{\bar{N}_n}} |\delta_{s+1,\,\bar{X}_n}(t)|\, t^{-1}\,dt \leqslant \Theta(s)\, \bar{L}_{s+2,\,n}, \tag{19}$$

где $\bar{N}_n \geqslant 4 \bar{B}_n \bar{L}_{3n}$.

Ввиду (53) [9], остается оценить

$$\bar{\varphi}_{\nu,\,j} = \int_{\frac{\pi \bar{B}_n}{h N_n}}^{\frac{\pi \bar{B}_n}{h}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l_1,\, \ldots,\, l_j}}^{n} \left| f_{\bar{\eta}_i - M\bar{\eta}_i} \left(\frac{t}{\bar{B}_n} \right) \right| t^{\nu-(s+2)}\,dt,$$

$\nu = 1,\ \ldots,\ s+1;\ j = 1, \qquad \nu$, где $hN_n = \bar{N}_n$.

Так как

$$f_{\eta_i - M\eta_i}(t) = f_{\eta_i - a_i}(t) = f_{\rho_i}(th) \quad \text{где } \rho_i = \frac{\eta_i - a_i}{h}$$

$$\tilde{\varphi}_{\nu,j} = \left(\frac{h}{2\pi B_n}\right)^{s+1} \int_{\frac{1}{2N_n}}^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l_1,}}^{n} |f_{\rho_i}(2\pi t)| \, t^{\nu-(s+2)} \, dt.$$

Обозначив $\tilde{q}_{mi} = \boldsymbol{P}\{\tilde{\rho}_i = m\}$, находим, что

$$1 - |f_{\rho_i}(t)|^2 = 2 \sum_{m} \tilde{q}_{mi} \sin^2 \frac{tm}{2}$$

согласно неравенству $|x| \leqslant e$

$$|f_{\rho_i}(2\pi t)| \leqslant \exp\{-I_i(t)\},$$

где

$$I_i(t) = \sum_{m} \tilde{q}_{mi} \sin^2 \pi m t.$$

Следовательно,

$$\tilde{\varphi}_{\nu,j} \leqslant \left(\frac{h}{2\pi B_n}\right)^{s+1} \int_{\frac{1}{2N_n}}^{\frac{1}{2}} \exp\{-I_n(t)\}\, t^{\nu-(s+2)}\, dt, \tag{20}$$

где

$$I_n(t) = \sum_{i=1}^{n} I_i(t).$$

Отметим, что подобные рассуждения подробней проведены в работах [1] и [8].

Если обозначим

$$J_n(t) = \sum_{1}^{n} \sum_{m} (\|mt\|)^2 \tilde{q}_{im},$$

где $(\|\alpha\|)$ означает расстояние α до ближайшего целого числа, то, ввиду неравенства $|\sin \pi\alpha| \geqslant 2(\|\alpha\|)$, получим, что

$$I_n(t) \geqslant 4J_n(t).$$

Согласно лемме 2 работы [1] в интервале $\frac{1}{2N_n} \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}$ имеем

$$J_n(t) \geqslant \frac{1}{4} \min_{a,q} \sum_{1}^{n} \alpha_i(a, q, N_n). \tag{21}$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\varphi}_{\nu j} \leqslant \Theta(s) \ln(1 + N_n) \exp\left\{-\min_{a,q} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a, q, N_n)\right\}, \tag{22}$$

$$\nu = 0, 1, \ldots, s+1; \; j = 0, 1, \ldots, \nu.$$

Согласно лемме 1 из [1] существует такое разбиение $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{M_n}=\frac{1}{2}$ интервала $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, что

$$J_n(t)\geqslant\frac{1}{36}(t-t_{i0}^{(n)})^2\,\frac{\bar{B}_n^2}{h^2},$$

если $t\in[t_i^{(n)},\ t_{i+1}^{(n)}]$, причем $t_{i0}^{(n)}$ при данном n в зависимости от i равно или $t_i^{(n)}$, или $t_{i+1}^{(n)}$. При этом

$$M_n\leqslant 5\tilde{N}_n,\ \text{где}\ \tilde{N}_n=4\bar{B}_nL_{3n}h^{-1}.$$

Здесь мы имели в виду,

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{\leqslant\tilde{N}_n} m^2\bar{q}_{im}\geqslant\frac{B_n^2}{h^2}$$

Из (21) и отсюда следует, что

$$\tilde{\varphi}_{\nu j}\leqslant\Theta(s)\left(\frac{h}{\bar{B}_n}\right)^{s+1-\nu}N_n^{s+2-\nu}\exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,q}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a,\ q,\ N_n)\right\}\times$$

$$\int_{\frac{1}{2N_n}}^{\frac{1}{2}}\exp\{-2J_n(t)\}\,dt\leqslant\Theta(s)\left(\frac{h}{B_n}\right)^{s-\nu}N_n^{s+2-\nu}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,q}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a,\ q,\ N_n)\right\}\times$$

$$\times\sum\int_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}}\exp\left\{-\frac{1}{18}(t-t_{i0}^{(n)})^2\,\frac{B_n^2}{h^2}\right\}dt\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(s)\,N_n\bar{L}_{3n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,q}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a,\ q,\ N_n)\right\},\tag{23}$$

$\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ s+1;\ j=0,\ 1,$

Согласно (17), (19), (22), (23), имеем

$$I_1\leqslant\Theta(s)\left(\exp\left\{-\frac{\pi^2B_n^2}{8h^2}\right\}+\bar{L}_{s+2,\,n}+(1+L_{1n}^{s+1})\times\right.$$

$$\times\min\{\ln(1+N_n),\ N_nL_{3n}\}\times$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\min_{a,q}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a,\ q,\ N_n)\right\}\right)\tag{24}$$

Оценим I_2.

Очевидно, что

$$I_2 \leqslant \sum_{k=1}^{8} \int\limits_{(2k-1)\frac{\pi \bar{B}_n}{h}}^{(2k+1)\frac{\pi \bar{B}_n}{h}} |\delta_{s+1,\, \bar{X}_n}(t)|\, t^{-1} dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{8} \int\limits_{-\frac{\pi \bar{B}_n}{h}}^{h} |\delta_{s+1,\, \bar{X}_n}(t + \tau k \bar{B}_n)|\, |t + \tau k \bar{B}_n|^{-1} dt = \sum_{k=1}^{8} I_{2,\, k}. \tag{25}$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}\, \Phi_{s+1,\, \bar{X}_n}(x) \right) dx = (-it)^{\nu-1} h_{s+1,\, \bar{X}_n}(t),$$

$$d_{s+1,\, X_n}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dD_{s+1,\, X_n}(x) = -it \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} D_{s+1,\, X_n}(x)\, dx =$$

$$= -t \sum_{\nu=1}^{s-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{i\tau m A_n}}{(\tau m \bar{B}_n)^{\nu}}\, h_{s+1,\, X_n}(t + \tau m B_n)(t + \tau m B_n)^{\nu-1}$$

и, применив равенство

$$\sum_{i=0}^{s-3} a^i = \frac{a^{s-2} - 1}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

при

$$a = \frac{}{\tau m \bar{B}_n} + 1,$$

$$d_{s+1,\, X_n}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{i\tau m \bar{A}_n} \left[1 - \left(\frac{t}{\tau m \bar{B}_n} + 1 \right)^{s-2} \right] h_{s+1,\, \bar{X}_n}(t + \tau m B_n).$$

Замечая, что

$$(-it)^{s+1}\, \delta_{s+1,\, \bar{X}_n}(t) =$$

$$= (s+1)! \sum_{\nu=1}^{s+1} \frac{(-t)^{\nu}}{\nu!} \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}} \left(f_{\bar{X}_n}(t) - h_{s+1,\, \bar{X}_n}(t) - d_{s+1,\, \bar{X}_n}(t) \right)$$

(равенство аналогичное (47) [9]),

$$f_{\bar{X}_n}(t + \tau k \bar{B}_n) = e^{-i\tau k \bar{A}_n} f_{\bar{X}_n}(t),$$

$$d_{s+1,\,X_n}(t+\tau kB_n)=e^{-i\tau k\bar{A}_n}h_{s+1,\,\bar{X}_n}(t)+$$

$$+\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq -k}}^{\infty}{}' e^{i\tau m\bar{A}_n}h_{s+1,\,X_n}\Big(t+\tau(k+m)B_n\Big)-$$

$$-e^{-i\tau k\bar{A}_n}\Big(-\frac{1}{\tau kB_n}\Big)^{s-2}t^{s-2}h_{s+1,\,X_n}(t)-$$

$$-\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq -k}}^{\infty} e^{i\tau m\bar{A}_n}(\tau m\bar{B}_n)^{2-s}\Big(t+\tau B_n(k+m)\Big)^{s-2}h_{s+1,\,X_n}\Big(t+\tau(k+m)\bar{B}_n\Big),$$

$$\exp\{-(t+\tau lB_n)^2\}\leqslant\exp\left\{-\Big(\frac{\pi\bar{B}_n l}{2h}\Big)^2\right\}e$$

если $|t|\leqslant\frac{\pi\bar{B}_n}{h}$ и $l\neq 0$ – целое число,

и применяя (16), получаем, что

$$I_{2,\,k}\leqslant\frac{2h}{\tau kB_n}\int\limits_0^{\frac{\pi B_n}{h}}|\bar{\delta}_{s+1,\,X_n}(t+\tau kB_n)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\Theta(s)\frac{h}{k\bar{B}_n}\left(\exp\left\{-\Big(\frac{\pi\bar{B}_n}{4h}\Big)^2\right\}+\Big(\frac{h}{B_n}\Big)^{s-2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=0}^{s+1}\int\limits_0^{h^{-}}\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}\Big(f_{X_n}(t)-h_{s+1,\,X_n}(t)\Big)\right|dt\right)$$

Рассматривая последние интегралы таким же способом, как подобные интегралы, входящие в (18), находим отсюда, что

$$I_{2,\,k}\leqslant\Theta(s)\left(L_{s+2,\,n}+\Big(\frac{h}{\bar{B}_n}\Big)^{s-1}+\right.$$

$$\left.+(1+\bar{L}_{1n}^{s+1})\min\Big(\frac{1}{2},\,\bar{L}_{3n}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{2}\min_{a,\,q}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a,\,q,\,N_n)\Big\}\right).\qquad(26)$$

Из (12), леммы 2 [9], леммы 1, леммы 2, (13) – (15), (24) – (26), (6), (9) и (11) следует доказательство теоремы 3 в случае

$$\Lambda_{sS_n}<\frac{1}{8}$$

В случае $\Lambda_{sS_n}\geqslant\frac{1}{8}$ доказательство аналогичное доказательству теоремы 3 [9] в случае $\Lambda_{sS_n}\geqslant\frac{1}{4}$

Теорема 3 доказана.

В заключение автор благодарит проф. В. Статулявичуса за внимание к настоящей работе и советы.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
13.X.1969

Литература

1. А. Миталаускас, В. Статулявичус, Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых решетчатых случайных величин, Лит матем. сб., **VI**, 4 (1966), 569–583.
2. Л. В. Осипов, Об асимптотических разложениях функции распределения суммы независимых решетчатых случайных величин, Теория вероятн. и ее прим., **XIV**, 3 (1969), 468–475.
3. В. В. Петров, Локальная теорема для решетчатых распределений, ДАН СССР, **115**, 1 (1957), 49–52.
4. В. В. Петров, Уточнение локальной предельной теоремы для неодинаковых решетчатых распределений, Теория вероятн. и ее прим., **VII**, 3 (1962), 344–346.
5. В. В. Петров, Предельные теоремы для k-последовательностей независимых случайных величин, Лит. матем. сб., **V**, 3 (1965), 443–455.
6. Ю. В. Прохоров, О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, ДАН СССР, 98, 4 (1954), 535–538.
7. В. Статулявичус, Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее прим., **X**, 4 (1965), 643–659.
8. В. Статулявичус, В. Пипирас, Асимптотические разложения для сумм независимых случайных величин, Лит. матем., сб., **VIII**, 1 (1968), 137–151.
9. В. Пипирас, Об остаточных членах асимптотического разложения функции распределения суммы независимых случайных величин, Лит. матем. сб., **X**, 1 (1970).

RĖTINIŲ NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMOS PASISKIRSTYMO FUNKCIJOS ASIMPTOTINIAI IŠDĖSTYMAI

V. Pipiras

(*Reziumė*)

Tegul $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, įgaunantys reikšmes pavidalo a_i+hk $(h>0;\ k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ i=1, 2, ,,,, n)$. Šiame straipsnyje įrodoma, kad atsitiktinio dydžio $B_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ pasiskirstymo funkcijos asimptotinio išdėstymo liekamasis narys absoliutiniu didumu neviršyja $\varepsilon\left(B_n(1+|x|)\right)(1+|x|)^{-r}L_{rn}\left(\varepsilon(z)\to 0,\ \text{kai } z\to\infty\right)$, jeigu $M|\xi_i|^r<\infty$ $(r\geqslant 3;\ i=1, 2, \ldots, n)$ ir patenkinamos kai kurios kitos sąlygos.

DIE ASYMPTOTISCHE ZERLEGUNGEN DER VERTEILUNGSFUNKTION VON DER SUMME UNABHÄNGIGER GITTERFÖRMIGER ZUFALLSVERÄNDERLICHEN

V. Pipiras

(*Zusammenfassung*)

Es seien $\xi_1, \xi_2,$ unabhängige Zufllsveränderlichen, die nur Werte der Form a_i+hk $(h>0;\ k=0, \pm 1, \pm 2$ $i=1, 2, \ldots, n)$ annehmen. Sind $M|\xi_i|<\infty$ $(r\geqslant 3;\ i=1, 2, \ldots, n)$ und sind manche andere Bedingungen erfüllt, so ist der absolute Wert des Restgliedes der asymptotischen Zerlegung der Verteilungsfunktion von der Zufallsveränderliche $B_n^{\ 1}\sum_{1}^{n}\xi_i$ nicht größer als $\varepsilon\left(B_n(1+|x|)\right)(1+|x|)^{-r}L_{rn}$, wobei $\varepsilon(z)\to 0$ $(z\to\infty)$.