УДК – 519.21

# О ЗАКОНЕ ПУАССОНА НА ГРУППАХ

А. Рухин

Пусть $X$ – локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, а $Y$ – ее группа характеров, т. е. если $\chi \in Y$, $x$, $y \in X$, то

$$e^{i\chi(x+y)} = e^{i\chi(x)} e^{i\chi(y)}.$$

Если $\mu$ – некоторая мера на $X$, то ее характеристической функцией или преобразованием Фурье называется функция

$$\hat{\mu}(\chi) = \int_X e^{i\chi(x)} d\mu(x), \qquad \chi \in Y$$

Свойства характеристических функций, так же как и некоторые другие факты абстрактного гармонического анализа предполагаются известными (см., например, [1]).

Если $\nu$ – некоторая конечная мера на группе $X$, то законом Пуассона, ассоциированным с этой мерой $\nu$ называется распределение, получаемое за счет сдвига на некоторый элемент меры

$$\pi = e^{-\nu(x)} \left( \varepsilon + \nu + \frac{\nu^{*2}}{2} + \quad + \frac{\nu^{*n}}{n!} + \quad \right), \tag{1}$$

где через $\varepsilon$ обозначена единичная нагрузка, сосредоточенная в нуле группы $X$, а через $\nu^{*n}$ – $n$-ая степень свертки меры $\nu$ с ней самой (см. [3, 7]). Характеристической функцией этого закона является

$$\hat{\pi}(\chi) = \exp\left\{ i\chi(x_0) + \int_X (e^{i\chi(x)} - 1)\, d\nu(x) \right\}. \tag{2}$$

Если $X = T$ есть группа вращений окружности, то согласно этому определению, законом Пуассона на $T$ является распределение с коэффициентами Фурье

$$c_k = \exp\left\{ \int_T (e^{ikx} - 1)\, d\nu(x) \right\}, \qquad k \in Z,$$

где $\nu$ – некоторая, вообще говоря, ненормированная мера на окружности.

Докажем следующее.

**Предложение.** *Безгранично делимое распределение $\pi$ на группе $X$ яется законом Пуассона тогда и только тогда, когда каждый характер $\chi$ индуцирует на окружности закон Пуассона.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\pi$ — закон Пуассона на $X$. Тогда согласно (2) для некоторой меры $\nu$ на $X$

$$\hat{\pi}(k\chi) = \exp\left\{\int_X (e^{ik\chi(x)} - 1)\, d\nu(x)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int_T (e^{ikt} - 1)\, d\nu_\chi(t)\right\} \tag{3}$$

Здесь $\nu_\chi(A) = \nu(\{x \quad e^{i\chi(x)} \in A\})$. С другой стороны,

$$\hat{\pi}(k\chi) = \int_X e^{ik\chi(x)}\, d\pi(x) = \int_T e^{ikt}\, d\pi_\chi(t) = c_k,$$

где $\pi_\chi$ — мера, индуцируемая распределением $\pi$ и характером $\chi$ на $T$.

Таким образом, в силу (3), действительно, каждый характер имеет распределение Пуассона на окружности.

Пусть теперь $\pi$ — некоторая безгранично делимая мера на $X$ такая, что

$$\hat{\pi}(k\chi) = \exp\left\{\int_T (e^{ikt} - 1)\, d\nu_\chi(t)\right\}, \qquad k \in Z,\ \chi \in Y \tag{4}$$

В силу аналога представления Леви-Хинчина для безгранично делимых распределений, характеристическая функция которых не обращается в нуль, имеем (см. [3, 4]).

$$\hat{\pi}(k\chi) = \exp\left\{i\chi(x_0) + \int_X \left(e^{ik\chi(x)} - 1 - ig(x, k\chi)\right) dF(x) - \varphi(k\chi)\right\},$$

где $x_0$ — фиксированный элемент группы $X$, $g(x, \chi)$ — некоторая функция на $X \times Y$, не зависящая от $\pi$, $F$ — некоторая мера, конечная на дополнении каждой окрестности нуля в $X$ и такая, что для всех $\chi \in Y$

$$\int (1 - \mathrm{Re}\, e^{i\chi(x)})\, dF(x) < \infty,$$

а $-\varphi(\chi)$ — логарифм характеристической функции симметричного нормального закона.

За счет сдвига меры $\pi$ мы можем считать, что $x_0 = 0$. Далее имеем

$$\hat{\pi}(k\chi) = \exp\left\{\int_T \left(e^{ikt} - 1 - ig_1(t, k\chi)\right) dF_\chi(t) - \varphi(k\chi)\right\} \tag{5}$$

Заметим, что представления (4) и (5) можно считать единственными в том смысле, что единственно представление полугруппы мер $\pi_s$, $\pi_1 = \pi$, $\pi_{s+t} = \pi_s * \pi_t$, $\pi_s \underset{s\to 0}{\to} \varepsilon$,

$$\hat{\pi}_s(k\chi) = \exp\left\{s\int_T \left(e^{ikt} - 1 - ig_1(t, k\chi)\right) dF_\chi(t) - s\varphi(k\chi)\right\},$$

$$\hat{\pi}_s(k\chi) = \exp\left\{s\int_T (e^{ikt} - 1)\, d\nu_\chi(t)\right\}.$$

Отсюда получаем $\varphi(\chi) = 0$ и $\int g_1(t, k\chi)\, dF_\chi(t) = 0$, так что

$$\log\hat{\pi}(k\chi) = \int_X (e^{ik\chi(x)} - 1)\, dF(x)$$

и $\pi$ — закон Пуассона на $X$.

Отметим, что аналогичное утверждение для гауссовских законов также имеет место (см. [3, 8]).

Мы рассмотрим далее случай, когда мера $\nu$ в (1) приписывает положительную нагрузку $\lambda$ некоторому элементу $x_0 \in X$. Тогда

$$\hat{\pi}(\chi) = \exp\{\lambda(e^{i\chi(x_0)} - 1)\},$$

а мера $\pi$ после сдвига на некоторый элемент сосредоточена на элементах вида 0, $x_0$, $2x_0$, причем если $x_0$ — элемент бесконечного порядка

$$\pi\{lx_0\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{e!} \quad l=0,\ 1,$$

если же $x_0$ имеет порядок $p$, то

$$\pi\{lx_0\} = e^{-\lambda} \sum_{k \equiv l \pmod p} \frac{\lambda^k}{k!} \quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1.$$

Хорошо известна теорема Д. А. Райкова ([2], согласно которой закон Пуассона на аддитивной группе всех вещественных чисел представим в виде композиции лишь пуассоновских распределений. Еще в 1939 году П. Леви [5] показал, что аналогичный результат имеет место и для группы вращений окружности, если $x_0$ — элемент бесконечного порядка или порядка два. Мы докажем следующий более общий факт.

**Теорема.** *Пусть закон Пуассона $\pi$, ассоциированный с положительной нагрузкой в элементе $x_0$, представим в виде композиции двух мер. Если $x_0$ — элемент бесконечного порядка или порядка два, то обе эти меры — также законы Пуассона. Если $x_0$ — элемент конечного порядка, большего двух, то эти меры всегда можно выбрать отличными от пуассоновских.*

Доказательство. Пусть $\pi_1$ и $\pi_2$ — распределения на $X$ такие,

$$\pi_1 * \pi_2 = \pi,$$

где $\pi$ — пуассоновская мера, связанная с элементом $x_0$, который будет сейчас предположен бесконечного порядка.

Покажем прежде всего, что мы можем считать, что $\pi_1$ и $\pi_2$ сосредоточены на множестве $\{kx_0,\ k=0,\ 1,\ \ldots\}$.

В самом деле, так как

$$\pi\{A\} = \int_X \pi_1(A-x)\, d\pi_2(x), \tag{6}$$

то найдется точка $x_1 \in X$ такая, что $\pi_1\{x_1\} > 0$, и значит при некотором $x_2 \in X$ и $\pi_2\{x_2\} > 0$.

Далее замечая, что при всех борелевских множествах $V_1$, $V_2$

$$\pi_1\{V_1\}\pi_2\{V_2\} \leqslant \pi\{V_1 + V_2\}, \tag{7}$$

получаем, что $\pi\{x_1 + x_2\} > 0$ и $x_1 + x_2 = kx_0$ при некотором $k \geqslant 0$. За счет сдвига меры $\pi_2$ можем считать, что $x_2 = 0$. Тогда $x_1 = kx_0$ и единственными точками положительной $\pi_1$ меры являются элементы вида $kx_0$, $k=0,\ 1,$ Ясно также, что аналогичное утверждение справедливо и для $\pi_2$. Пусть далее

$$\pi_1 = \pi_c^{(1)} + \pi_d^{(1)}, \quad \pi_2 = \pi_c^{(2)} + \pi_d^{(2)},$$

где $\pi_c^{(i)}$, $\pi_d^{(i)}$ $i=1, 2$ — однозначно определенные меры такие, что $\pi_c^{(i)}\{x\}=0$ при всех $x\in X$, а $\pi_d^{(i)}\{X\setminus A\}>0$ для некоторого не более чем счетного множества $A$. Из предыдущего следует, что меры $\pi_d^{(1)}$ и $\pi_d^{(2)}$ сосредоточены на множестве $\{kx_0,\ k=0,\ 1,\ \ldots\}$. Из (6) получаем

$$\pi_c^{(1)} * \pi_c^{(2)} + \pi_c^{(1)} * \pi_d^{(2)} + \pi_c^{(2)} * \pi_d^{(1)} = \pi - \pi_d^{(1)} * \pi_d^{(2)}. \tag{8}$$

В левой части (8) стоит мера, не имеющая элементов положительной нагрузки, распределение же в правой части (8) сосредоточено на множестве $\{kx_0,\ k=0,\ 1,\ \ldots\}$. В силу неотрицательности мер $\pi_c^{(i)}$ и $\pi_d^{(i)}$ видим, что

$$\pi_c^{(i)}=0,\ i=1,\ 2 \text{ и } \pi=\pi_d^{(1)} * \pi_d^{(2)}.$$

(Ясно, что эти рассуждения необходимы лишь в случае незамкнутого множества $\{kx_0,\ k=0,\ 1,\ \ldots\}$).

Если обозначить теперь через $c_k=\pi_1\{kx_0\}$, $d_k=\pi_2\{kx_0\}$ и ввести в рассмотрение

$$\hat{\pi}_1(\chi)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\chi(x_0)}, \qquad \hat{\pi}_2(\chi)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{ik\chi(x_0)}$$

— характеристические функции соответствующих распределений, то (6) означает, что при всех $\chi\in Y$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\chi(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{ik\chi(x_0)} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{ik\chi(x_0)}. \tag{9}$$

Полагая $z=e^{i\chi(x_0)}$ перепишем (9) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{e=0}^{k} c_e d_{k-e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{10}$$

Заметим, что множество $N=\{e^{i\chi(x_0)},\ \chi\in Y\}$ совпадает со всей окружностью $T$. Действительно $N$ является подгруппой (топологической) группы $T$. Если $N\neq T$, то найдется число $r\geqslant 2$ такое, что $N=\left\{ e^{i2\pi\frac{s}{r}}\ \ s=0,\ 1,\ \ldots\ r-1 \right\}$ и значит $e^{ir\chi(x_0)}=e^{i\chi(rx_0)}=1$ при всех $\chi\in Y$. Но это означало бы $rx_0=0$, что противоречит нашему предположению о бесконечности порядка $x_0$.

Из того, что (10) выполнено при всех $z$, $|z|=1$, выводим

$$\sum_{e=0}^{k} c_e d_{k-e} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad k=0,\ 1,\ \ldots \tag{11}$$

Теперь оставшаяся часть доказательства проводится как и в вещественном случае. Если $c_{e_0}>0$ первый не равный нулю коэффициент $c_k$, то из (11) извлекаем

$$d_{k-e_0} \leqslant \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Отсюда заключаем, что существуют две постоянные $C_1$ и $C_2$ такие, что

$$c_k < C_1 \frac{\lambda^k}{k!} \qquad d_k < C_2 \frac{\lambda^k}{k!}$$

Но эти неравенства показывают, что $\hat{\pi}_1(z)$ и $\hat{\pi}_2(z)$ как функции от комплексного аргумента $z$ являются целыми функциями экспонентного типа, не обращающимися в нуль согласно (10). Известная теорема Адамара о факторизации целых функций показывает, что

$$\hat{\pi}_1(z)=\exp\{\lambda_1(z-1)\}, \quad \hat{\pi}_2(z)=\exp\{\lambda_2(z-1)\}$$

при некоторых постоянных $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Отсюда получаем

$$c_k=e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}, \quad d_k=e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^k}{k!}.$$

В силу неотрицательности чисел $c_k$ и $d_k$ получаем, что $\lambda_1$, $\lambda_2 \geqslant 0$.

Разберем теперь случай, когда $x_0$ — элемент конечного порядка $px_0=0$. Как нетрудно видеть, мы можем отвлечься от исходной группы $X$ и рассматривать закон Пуассона на аддитивной группе целых чисел по модулю $p$ $Z_p$. Тогда

$$\hat{\pi}_s=\exp\left\{-\lambda\left(1-e^{i2\pi\frac{s}{p}}\right)\right\} \qquad s=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1$$

коэффициенты Фурье нашего закона $\pi$.

Пусть $\hat{q}_s=\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\left(1-e^{i2\pi\frac{s}{p}}\right)\right\}$ — характеристическая функция закона Пуассона с параметром $\frac{\lambda}{2}$, вероятности которого суть

$$q_k=e^{-\frac{\lambda}{2}}\sum_{e\equiv k(\mathrm{mod}\,p)}\frac{1}{e!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^e \qquad k=0,\ 1, \qquad p-1.$$

Ясно, что $\hat{q}_s^2=\hat{\pi}_s$.

Положим теперь

$$r_k^{(1)}=q_k+\frac{2}{p}\left(\alpha_1\operatorname{Re}e^{i2\pi\frac{k}{p}}+\beta_1\operatorname{Im}e^{i2\pi\frac{k}{p}}\right),$$

$$r_k^{(2)}=q_k+\frac{2}{p}\left(\alpha_2\operatorname{Re}e^{i2\pi\frac{k}{p}}+\beta_2\operatorname{Im}e^{i2\pi\frac{k}{p}}\right). \tag{12}$$

Понятно, что если коэффициенты $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ достаточно малы, то $r_k^{(1)}$ и $r_k^{(2)}$ задают распределения вероятностей на $Z_p$.

Заметим далее, что

$$\hat{r}_s^{(1)}=\sum_{k=0}^{p-1}e^{i2\pi\frac{sk}{p}}r_k^{(1)}=\sum_{k=0}^{p-1}e^{i2\pi\frac{sk}{p}}q_k+$$

$$+\frac{\alpha_1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}e^{i2\pi\frac{sk}{p}}\left(e^{i2\pi\frac{k}{p}}+e^{-i2\pi\frac{k}{p}}\right)+\frac{\beta_1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}e^{i2\pi\frac{sk}{p}}\left(e^{i2\pi\frac{k}{p}}-e^{-i2\pi\frac{k}{p}}\right)=$$

$$=\begin{cases}\hat{q}_s & s\neq 1,\ p-1,\\ \hat{q}_1+\alpha_1+i\beta_1, & s=1,\\ \hat{q}_{p-1}+\alpha_1-i\beta_1, & s=p-1.\end{cases}$$

Аналогично

$$\hat r_s^{(2)} = \begin{cases} \hat q_s, & s\neq 1,\ p-1, \\ \hat q_1+\alpha_2+i\beta_2, & s=1, \\ \hat q_{p-1}+\alpha_2-i\beta_2, & s=p-1. \end{cases}$$

Покажем, что возможен выбор коэффициентов $\alpha_j$ и $\beta_j$ таким образом, чтобы было

$$\hat r_s^{(1)}\cdot\hat r_s^{(2)}=\hat\pi_s, \qquad s=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1. \tag{13}$$

В самом деле (13) выполнено при $s\neq 1$, $p-1$. Для выполнения (13) при всех $s$ в силу условия $\bar{\hat r}_{p-1}^{(j)}=\hat r_1^{(j)}$ нужно, чтобы

$$(\hat q_1+z_1)(\hat q_1+z_2)=\hat\pi_1.$$

Здесь $z_1=\alpha_1+i\beta_1$, $z_2=\alpha_2+i\beta_2$. Предыдущее равенство эквивалентно следующему

$$\hat q_1(z_1+z_2)+z_1z_2=0,$$

откуда без труда получаем

$$z_1=-\frac{\hat q_1 z_2}{\hat q_1+z_2}.$$

Таким образом, действительно, найдутся числа $\alpha_j$ и $\beta_j$ $j=1,2$, не равные нулю одновременно и такие, что имеет место (13) и (12) задает распределения вероятностей на $Z_p$. Эти распределения при $p>3$ заведомо не являются пуассоновскими.

Для $p=3$ положим

$$\hat r_1^{(1)}=\bar{\hat r}_2^{(1)}=e^{-\frac{\lambda}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}\right)}e^{-i\frac{\lambda}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3}+i\varepsilon\right)}$$

$$\hat r_1^{(2)}=\bar{\hat r}_2^{(2)}=e^{-\frac{\lambda}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}\right)}e^{-i\frac{\lambda}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3}-i\varepsilon\right)}$$

$$\hat r_0^{(1)}=\hat r_0^{(2)}=1.$$

Ясно, что при достаточно малом положительном $\varepsilon$ $\hat r_s^{(1)}$ и $\hat r_s^{(2)}$ являются преобразованиями Фурье вероятностных непуассоновских распределений на $Z_3$ и вместе с тем

$$\hat r_s^{(1)}\cdot\hat r_s^{(2)}=\hat\pi_s, \qquad s=0,\ 1,\ 2.$$

Наконец, так как при $p=2$ всякое вероятностное распределение на $Z_2$, отличное от равномерного, является пуассоновским, то всякий закон Пуассона в этом случае представим в виде композиции лишь пуассоновских распределений.

Теорема таким образом доказана полностью.

Отметим, что последнее утверждение теоремы дает ответ на вопрос, поставленный П. Леви в [5].

В заключеие заметим, что гауссовский закон на группах, вообще говоря, представим в виде композиции негауссовских компонент. (Впервые примеры подобных разложений были приведены Марцинкевичем [6]). В связи с этим, используя представление (5) можно доказать, что в классе безгранично делимых законов нормальный закон также как и закон Пуассона раскладывается лишь на нормальные соответственно пуассоновские компоненты.

Ленинград

Поступило в редакцию
12.II.1969

**Литература**

1. У Гренандер, Вероятности на алгебрических структурах, „Мир“, 1965.
2. Д. А. Райков, О разложении законов Гаусса и Пуассона, Изв. АН СССР, сер. 2 (1938), 91–124.
3. К. Р. Партасарати, Р Ранга Рао, С. Р. Варадхан, Распределения вероятностей на локально-компактных группах, Математика, 9, 2 (1965), 115–146.
4. В. В. Сазонов, В. Н. Тутубалин, Распределения вероятностей на топологических группах, Теория вероятн. и ее примен., XI, 1 (1965), 3–55.
5. P. Levy, Sur l'arithmetique des lois de probabilites enroules, C. R. Society Math. France, (1938), 32–34.
6. J. Marcinkiewicz, Sur les variables aleatoires enroules. C. R. Society Math. France, (1938), 34–37.
7. K. Urbanik, Poisson distributions on compact Abelian topological groups, Colloq. Math. 6 (1958), 13–24.
8. K. Urbanik, Gaussian measures on a locally compact Abelian topological groups, Studia Math., 19 (1960), 77–88.

## APIE PUASONO DĖSNĮ GRUPĖSE

A. Ruchinas

(*Reziumė*)

Nagrinėjamos Puasono dėsnio faktorizacijos grupėse.
Įrodytoji teorema apibendrina Levi ir Raikovo rezultatus.

## ON POISSON LAW ON GROUPS

A. Ruchin

(*Summary*)

The known result of Raikov concerning decomposition of Poisson law is generalized to the case of locally compact Abelian groups.