УДК – 511

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МАЛЕРА – СПРИНДЖУКА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМОВ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. I

Р. Слесорайтене

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – независимые вещественные переменные, m и k – произвольные целые положительные числа, p – целое число,

$$p \leqslant \binom{m+k}{k},$$

$i_{1u}, \ldots, i_{ku}$ $(u=1, 2, \ldots, p)$ – системы целых положительных чисел, удовлетворяющих неравенству

$$i_{1u}+i_{2u}+\ldots+i_{ku} \leqslant m.$$

Существует предположение [1], что при любом фиксированном $\varepsilon>0$ неравенство

$$\left| \sum_{u=1}^{p} b_u x_1^{i_{1u}} x_2^{i_{2u}} \ldots x_k^{i_{ku}} \right| < h^{-p+1-\varepsilon},$$

$h=\max(|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_p|)$, для почти всех $x_1, x_2, \ldots, x_k$ в смысле k-мерной лебеговской меры имеет только конечное число решений в целых $b_1, b_2, \ldots, b_p$.

В случае $m=1$ это утверждение для любого k имеет место в силу известной теоремы Хинчина [2]. В. Спринджук [3] доказал справедливость предположения для $m=2$ и любого k с помощью метода тригонометрических сумм. Для $m=2$, $k=2$ оно доказано и без использования метода тригонометрических сумм [4]. Наша цель – продолжить доказательство гипотезы для $m=3$, $k=2$.

Пусть

$$P(x, y)=a_{111}x^3+a_{112}x^2y+a_{122}xy^2+a_{222}y^3+a_{113}x^2+a_{123}xy+a_{223}y^2+$$
$$+a_{133}x+a_{233}y+a_{333}$$

– полином с целыми коэффициентами a_{ijr} $(1 \leqslant i, j, r \leqslant 3)$, причем среди них $10-n$ $(1 \leqslant n \leqslant 10)$ фиксированных равны нулю, иными словами, соответствующие члены полинома отсутствуют. $h=h(P)$ – высота полинома P:

$$h=\max_{1 \leqslant i, j, r \leqslant 3} |a_{ijr}|.$$

Если $a_{222}=0$, $x=x_0$ – фиксированное число, то назовем $D(x_0)$ – дискриминант полинома $P_1(y)=P(x_0, y)$:

$$D(x)=d_1x^4+d_2x^3+d_3x^2+d_4x+d_5,$$

где

$$d_1 = a_{112}^2 - 4a_{122} \cdot a_{111},$$
$$d_2 = 2a_{112} \cdot a_{123} - 4a_{122} \cdot a_{113} - 4a_{111} \cdot a_{223},$$
$$d_3 = a_{123}^2 + 2a_{112} \cdot a_{233} - 4a_{122} \cdot a_{133} - 4a_{223} \cdot a_{113}, \qquad (1)$$
$$d_4 = 2a_{123} \cdot a_{233} - 4a_{122} \cdot a_{333} - 4a_{223} \cdot a_{113},$$
$$d_5 = a_{233}^2 - 4a_{223} \cdot a_{333}.$$

Пусть B_n — класс полиномов $P(x, y)$, для которых

a) $a_{222}=0$,

b) $a_{111} \cdot a_{112} \cdot a_{122} \neq 0$, $d_1 \neq 0$,

c) хоть один из $|a_{111}|$, $|a_{333}|$

не равен ни нулю, ни высоте полинома,

d) полином $D(x)$ не имеет кратных корней.

Теорема. *При любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *для почти всех* (x, y) *неравенство*

$$|P(x, y)| < h^{-n+1-\varepsilon} \qquad (2)$$

имеет лишь конечнсе число решений в полиномах $P \in B_n$.

Леммы о полиномах

Будем рассматривать не имеющие кратных корней полиномы

$$R(x) = a_1 x^N + a_2 x^{N-1} + \quad + a_{N+1}$$

третьей или четвертой степени, т. е. $N=3$ или 4, от одной переменной x с целыми коэффициентами. Пусть H — высота полинома $R(x)$, v — любое фиксированное число, удовлетворяющее условию $v(v+1)>0$. Обозначим через $\alpha_j = \Theta_j + i\sigma_j$ корни этого полинома. Выберем из Θ_j те, которые принадлежат интервалу $\Delta = (v, v+1)$. Если l — число таких Θ_j, то индексы j не трудно подобрать так, чтобы числа $\Theta_1, \Theta_2, \quad \Theta_l$ принадлежали Δ и $\Theta_1 \leqslant \Theta_2 \leqslant \leqslant \Theta_l$.

Рассмотрим расстояния между каждыми двумя последовательными числами из системы $(\Theta_1, \Theta_2, \quad \Theta_l)$. Пусть наибольшее из этих расстояний δ, а следующее за ним по величине $\gamma \leqslant \delta$.

Лемма 1. I. *Если все корни* $R(x)$ *— действительные* *то при* $l=3$

$$\delta \gg \frac{1}{H},$$

а при $l=4$

$$\delta \gg \frac{1}{\sqrt{H}}.$$

Если $l=4$ *и* $|\Theta_2 - \Theta_3| < \delta$, *то*

$$\delta\gamma \gg \frac{1}{H}.$$

II. В *случае, когда* $R(x)$ *имеет одну пару комплексных сопряженных корней* α_s, $\alpha_{s+1} = \bar{\alpha}_s$, $\sigma_s > 0$, $(1 \leqslant s \leqslant 3)$ *и* $l=3$, $A = \max(\gamma, \sigma_s)$:

$$\max(\sigma_s, \delta) \gg \frac{1}{H}.$$

В случае, когда $l=4$, $s=1$ или 3, а ближайший соответственно к Θ_1 или Θ_3 действительный корень находится на расстоянии δ от Θ_1 или Θ_3, имеем:

$$\max(\sigma_s,\ \delta) \gg \frac{1}{\sqrt{H}}.$$

Во всех остальных случаях при $l=4$, $A=\max(\gamma,\ \sigma_s)$ $(1 \leqslant s \leqslant 3)$

$$A\delta \gg \frac{1}{H},$$

если $A \leqslant \delta$, и

$$\sigma_s \gg \frac{1}{\sqrt{H}},$$

если $A=\sigma_s > \delta$.

III. *Если $R(x)$ имеет две пары комплексных сопряженных корней: $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$, $\alpha_4=\bar{\alpha}_3$, $\sigma_1>0$, $\sigma_3>0$, то*

$$\max(\sigma_1,\ \sigma_3,\ \delta) \gg \frac{1}{\sqrt{H}}.$$

Доказательство. Обозначим через $D(R)$ — дискриминант полинома $R(x)$. По условиям $R(x)$ — полином с целыми коэффициентами, не имеющий кратных корней. Следовательно, всегда

$$|D(R)| \geqslant 1. \tag{3}$$

Мы часто будем пользоваться равенством

$$|D(R)| = a_1^{2N-2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} |\alpha_i - \alpha_j|^2. \tag{4}$$

Для каждого корня α_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$

$$a_1 \alpha_j^N + a_2 \alpha_j^{N-1} + \ldots + a_{N+1} = 0,$$

откуда

$$|\alpha_j| \leqslant \frac{|a_2| + |a_3| \cdot |\alpha_j^{-1}| + \ldots + |a_{N+1}|\,|\alpha_j^{-N+1}|}{|a_1|}.$$

Так как $|a_i| \leqslant H$ $(2 \leqslant i \leqslant N)$, то в случае $|\alpha_j| > 1$

$$|\alpha_j| \ll \frac{H}{|a_1|}. \tag{5}$$

$\frac{H}{|a_1|} \geqslant 1$, поэтому последнее соотношение справедливо для всех корней α_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$. Из (5) следует, что

$$|\alpha_i - \alpha_j| \ll \frac{H}{|a_1|} \qquad (1 \leqslant i,\ j \leqslant N). \tag{6}$$

I. Пусть все корни $R(x)$ — действительные числа.

1. Разберем случай, когда $l=3$. Из определения δ следует, что

$$|\Theta_i - \Theta_j| \leqslant \delta \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant 3). \tag{7}$$

А отсюда ввиду (3) и (4) при $N=3$

$$a_1^4 \delta^6 \gg 1.$$

Из последнего непосредственно следует оценка

$$\delta \gg \frac{1}{H}.$$

Для полинома четвертой степени в силу (3), (4), (6), (7):

$$1 \leqslant a_1^6 \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} |\Theta_i - \Theta_j|^2 \cdot \prod_{1 \leqslant i \leqslant 3} |\Theta_i - \Theta_4|^2 \leqslant a_1^6 \delta^6 \; H^6$$

Следовательно,

$$\delta \geqslant \frac{1}{H}.$$

2. Пусть $l=4$.

a) В силу определения δ:

$$|\Theta_i - \Theta_j| \leqslant \delta \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 4).$$

Из последней оценки ввиду (3) и (4) непосредственно следует:

$$\delta \geqslant \frac{1}{\sqrt{H}}$$

b) Рассмотрим отдельно случай, когда $|\Theta_2 - \Theta_3| < \delta$. Положим для определенности, что $|\Theta_1 - \Theta_2| = \delta$. Тогда в силу определения δ:

$$|\Theta_1 - \Theta_i| \leqslant \delta \quad (2 \leqslant i \leqslant 4),$$

а в силу определения γ:

$$|\Theta_i - \Theta_j| \leqslant \gamma \quad (2 \leqslant i < j \leqslant 4).$$

Поэтому ввиду (3) и (4):

$$1 \leqslant a_1^6 \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant 4} |\Theta_i - \Theta_j|^2 \cdot \prod_{2 \leqslant i \leqslant 4} |\Theta_i - \Theta_1|^2 \leqslant a_1^6 \delta^6 \gamma^6,$$

откуда

$$\delta\gamma \geqslant \frac{1}{H}.$$

В случае $|\Theta_3 - \Theta_4| = \delta$ доказательство проводится аналогично.

II. Пусть $R(x)$ имеет одну пару комплексных сопряженных корней α_s, $\alpha_{s+1} = \bar{\alpha}_s$, $\sigma_s > 0$ $(1 \leqslant s \leqslant 3)$.

1. Рассмотрим случай $l=3$.

a) Пусть $0 < \sigma_s \leqslant \delta$. Если $R(x)$ — полином третьей степени, то так как

$$|\alpha_i - \alpha_j| \leqslant \delta \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant 3), \tag{8}$$

из (4) и последней оценки следует

$$\delta \geqslant \frac{1}{H}.$$

Для полинома четвертой степени ввиду (3), (4), (6), (8) справедлива оценка

$$1 \leqslant a_1^6 \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} |\alpha_i - \alpha_j|^2 \cdot \prod_{1 \leqslant i \leqslant 3} |\alpha_i - \alpha_4|^2 \leqslant a_1^6 \delta^6 \frac{H^6}{a_1^6}.$$

Следовательно,

$$\delta \geqslant \frac{1}{H}.$$

b) Если $\sigma_s > \delta$, а $R(x)$ — полином третьей степени, то, положив для определенности, что $s=1$, т. е. $\alpha_s = \alpha_1$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$, $\sigma_1 > 0$, $\alpha_3 = \Theta_3 > \Theta_1$, имеем:

$$|D(R)| = 4a_1^4 \sigma_1^2 [(\Theta_1 - \Theta_3)^2 + \sigma_1^2]^2 \geqslant 1. \tag{9}$$

Ввиду того, что $|\Theta_1-\Theta_3|=\delta$, $\delta<\sigma_1$, получим:

$$\sigma_1 \gg \frac{1}{H}.$$

В случае, когда $R(x)$ — полином четвертой степени, положив опять, что $s=1$, т. е. $\alpha_s=\alpha_1$, $\alpha_{s+1}=\alpha_2=\bar{\alpha}_1$, $\sigma_1>0$, $\alpha_3=\Theta_3>\Theta_1$, ввиду (4):

$$|D(R)|=4a_1^6\sigma_1^2[(\Theta_1-\Theta_3)^2+\sigma_1^2]^2\cdot\prod_{1\leqslant i\leqslant 3}|\alpha_i-\alpha_4|^2.$$

В силу (6) и того, что $\sigma_1>\delta=|\Theta_1-\Theta_3|$ имеем:

$$a_1^6\sigma_1^6\cdot\frac{H^6}{a_1^6}\gg 1,$$

а отсюда

$$\sigma_1\gg\frac{1}{H}$$

Для $s=2$ доказательство протекает аналогично случаю $s=1$.

2. Пусть далее $l=4$.

a) Разберем сначала случай $s=2$, т. е. $\alpha_1=\Theta_1$, $\alpha_3=\bar{\alpha}_2$, $\sigma_2>0$, $\alpha_4=\Theta_4$.

a_1) Пусть $\sigma_2\leqslant\gamma$. Тогда

$$|D(R)|=a_1^6\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}|\alpha_i-\alpha_j|^2=4a_1^6[(\Theta_1-\Theta_2)^2+\sigma_2^2]^2\cdot\sigma_2^2[(\Theta_2-\Theta_4)^2+$$
$$+\sigma_2^2]^2\cdot|\Theta_1-\Theta_4|^2. \qquad (10)$$

Отсюда, ввиду того, что $\sigma_2\leqslant\gamma<\delta$, получаем:

$$a_1^6\delta^6\gamma^6\gg 1$$

или

$$\delta\gamma\gg\frac{1}{|a_1|}\geqslant\frac{1}{H}.$$

a_2) Пусть $\gamma\leqslant\sigma_2\leqslant\delta$. Тогда в силу (10) имеем:

$$a_1^6\sigma_2^6\delta^6\gg 1$$

Отсюда

$$\sigma_2\delta\gg\frac{1}{H}$$

a_3) И, наконец, если $\sigma_2>\delta$, то

$$a_1^6\sigma_2^{12}\gg 1.$$

Следовательно,

$$\sigma_2\gg\frac{1}{\sqrt{H}}$$

b) Пусть действительная часть комплексных сопряженных корней не меньше или не больше двух остальных действительных корней, т. е. $s=1$ или 3. Ограничимся случаем $s=1$. Тогда корни расположены так: $\alpha_1=\Theta_1+$ $+\sigma_1 i$, $\alpha_2=\bar{\alpha}_1$, $\sigma_1>0$, $\alpha_3=\Theta_3$, $\alpha_4=\Theta_4$.

В случае $s=3$ доказательство аналогично случаю $s=1$.

b_1) Предположим, что $|\Theta_1-\Theta_3|=\gamma$, $|\Theta_3-\Theta_4|=\delta$.

b_{11}) Пусть $0<\sigma_1\leqslant\gamma$. Тогда

$$|D(R)|=4a_1^6[(\Theta_1-\Theta_3)^2+\sigma_1^2]^2\cdot[(\Theta_1-\Theta_4)^2+\sigma_1^2]^2\cdot\sigma_1^2\cdot|\Theta_3-\Theta_4|^2\geqslant 1. \qquad (11)$$

Отсюда

$$a_1^6\ \gamma^4\ \delta^4\ \gamma^2\ \delta^2 \gg 1$$

$$\delta\gamma \gg \frac{1}{|a_1|} \geqslant \frac{1}{H}.$$

b_{12}) Пусть $\gamma < \sigma_1 \leqslant \delta$. В силу (11)

$$a_1^6 \sigma_1^4 \delta^4 \sigma_1^2\ \delta^2 \gg 1,$$

откуда

$$\delta\sigma_1 \gg \frac{1}{H}.$$

b_{13}) И, наконец, когда $\sigma_1 > \delta > 0$, имеем:

$$a_1^6 \sigma_1^{12} \gg 1.$$

Следовательно,

$$\sigma_1 \gg \frac{1}{\sqrt{H}}.$$

b_2) Разберем случай $|\Theta_1 - \Theta_3| = \delta$, $|\Theta_3 - \Theta_4| = \gamma$.

b_{21}) Пусть $\sigma_1 \leqslant \delta$. Тогда в силу (11)

$$a_1^6\, \delta^{12} \gg 1.$$

Отсюда

$$\delta \gg \frac{1}{\sqrt{H}}.$$

b_{22}) Если $\sigma_1 > \delta > 0$, то из (11) следует, что

$$a_1^6 \sigma_1^{12} \gg 1$$

$$\sigma_1 \gg \frac{1}{H}$$

III. Пусть $R(x)$ в интервале Δ имеет действительные части двух пар комплексных сопряженных корней: $\alpha_1 = \Theta_1 + i\sigma_1$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$, $\sigma_1 > 0$, $\alpha_3 = \Theta_3 + \sigma_3 i$, $\alpha_4 = \bar{\alpha}_3$, $\sigma_3 > 0$, $|\Theta_1 - \Theta_3| = \delta$.

a) Пусть $0 < \sigma_1 \leqslant \delta$, $0 < \sigma_3 \leqslant \delta$. Так как

$$|D(R)| = 16 a_1^6 \sigma_1^2 \cdot \sigma_3^2 \cdot [(\Theta_1 - \Theta_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^2 \cdot [(\Theta_1 - \Theta_3)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2]^2 \geqslant 1, \tag{12}$$

$$a_1^6\, \delta^{12} \gg 1.$$

Отсюда

$$\delta \gg \frac{1}{\sqrt{H}}.$$

b) Пусть $\max(\sigma_1, \sigma_3) > \delta$. Положим для определенности, что $\max(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1$. Тогда в силу (12)

$$a_1^6 \sigma_1^{12} \gg 1$$

$$\sigma_1 \gg \frac{1}{\sqrt{|a_1|}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{H}}.$$

Лемма доказана.

Пусть $h>0$, $n>0$ – целые числа, $\varepsilon>0$ – любое фиксированное число. Положим, что высота полинома $R(x)$

$$H \ll h^2.$$

Обозначим через Ω – множество тех $x \in \Delta$, для которых

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant l} |x-\Theta_j| > h^{-n-\varepsilon}. \tag{13}$$

Пусть $\Delta' = (v+c_1,\ v+1-c_2) \subset \Delta$, где c_1, c_2, $c_1+c_2<1$, $c_1>0, c_2>0$, – любые фиксированные числа, а Ω' – множество тех $x \in \Delta'$, для которых справедливо (13).

Если

$$I = \int\limits_{\Omega'} \frac{dx}{\sqrt{|R(x)|}},$$

то справедлива следующая.

Лемма 2. I. При $l=0,1,2$

$$I \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|}}.$$

II. Если все корни $R(x)$ – действительные числа, то при $l=3$

$$I \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta}},$$

а при $l=4$

$$I \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}}$$

В случае $l=4$, $|\Theta_2-\Theta_3|=\delta$

$$I \ll \frac{\ln h}{\delta\sqrt{|a_1|}}$$

III. Если $R(x)$ имеет одну пару комплексных сопряженных корней α_s, $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}_s$, $\sigma_s>0$ $(1 \leqslant s \leqslant 3)$, то при $l=3$

$$I \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1| \max(\sigma_s,\ \delta)}}.$$

Если $l=4$, $A=\max(\gamma,\ \sigma_s)$, $A \leqslant \delta$, имеем

$$I \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta A}},$$

при $A=\sigma_s>\delta$ справедлива оценка

$$I \ll \frac{\ln h}{\sigma_s\sqrt{|a_1|}}.$$

В случае $s=1$ или 3, когда ближайший соответственно к Θ_1 или Θ_3 действительный корень находится на расстоянии δ от Θ_1 или Θ_3,

$$I \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|} \cdot \max(\sigma_s,\ \delta)}.$$

IV. Если $R(x)$ имеет две пары комплексных сопряженных корней: $\alpha_2=\bar{\alpha}_1$, $\alpha_3=\bar{\alpha}_4$, $\sigma_1>0$, $\sigma_3>0$, то

$$I \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|} \cdot \max(\sigma_1,\ \sigma_3,\ \delta)}.$$

V. Во всех случаях справедлива оценка:

$$I \ll \sqrt{\frac{H}{|a_1|}} \ll \frac{h}{\sqrt{|a_1|}}.$$

Доказательство. Для α_j с индексом $j > l$

$$|\alpha_j - x| \geqslant \min(c_1, c_2),$$

где x — любое число из интервала Δ'. Поэтому

$$I \ll \int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|S_l(x)|}}. \tag{14}$$

Здесь и далее $S_l(x) = a_1(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \quad (x-\alpha_l)$.

Имеем

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|x-\omega_1|}} \ll 1,\ 1 \leqslant i \leqslant l, \tag{15}$$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_i)(x-\Theta_j)|}} \ll \ln h,\ 1 \leqslant i < j \leqslant l, \tag{16}$$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|(x-\omega_1)^2(x-\omega_2)|}} \ll \frac{\ln h}{\sqrt{\rho}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant l, \tag{17}$$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{|(x-\Theta_i)(x-\Theta_j)|} \ll \frac{\ln h}{|\Theta_i - \Theta_j|}. \tag{18}$$

Разобьем множество Ω на подмножества $\Delta_0, \Delta_1, \quad \Delta_l$, где

$$\Delta_0 = \begin{cases} \left(v,\ \Theta_1 - \frac{1}{h^{n+\varepsilon}}\right), \text{ если } \Theta_1 - \frac{1}{h^{n+\varepsilon}} > v, \\ \varnothing \text{ — в противном случае,} \end{cases}$$

$$\Delta_j = \begin{cases} \left(\Theta_j + \frac{1}{h^{n+\varepsilon}},\ \Theta_{j+1} - \frac{1}{h^{n+\varepsilon}}\right) \text{ если } \Theta_{j+1} - \Theta_j > \frac{2}{h^{n+\varepsilon}}, \\ \varnothing \text{ — в противном случае, } (1 \leqslant j \leqslant l-1), \end{cases}$$

$$\Delta_l = \begin{cases} \left(\Theta_l + \frac{1}{h^{n+\varepsilon}},\ v+1\right), \text{ если } \Theta_l + \frac{1}{h^{n+\varepsilon}} < v+1, \\ \varnothing \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|S_l(x)|}} = \sum_{j=0}^{l} \int\limits_{\Delta_j} \frac{dx}{\sqrt{|S_l(x)|}}. \tag{19}$$

I. Пусть $l=1, 2$. Если корни $S_l(x)$ — действительные числа, то из (15), (16) следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|S_l(x)|}} \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|}}.$$

В случае комплексных сопряженных корней

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|S_l(x)|}} \ll \frac{1}{\sqrt{|a_1|}} \int\limits_{\Omega} \frac{dx}{|x-\Theta_1|} \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|}}.$$

II. Пусть все корни $S_l(x)$ ($l \geqslant 3$) действительные числа.

1. Разберем случай $l=3$. Оценим

$$\int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|S_3(x)|}}.$$

a) Если $|\Theta_1-\Theta_2|<\delta$, то в силу того, что $|x-\Theta_3|>|\Theta_2-\Theta_3|=\delta$ для всех $x \in \Delta_1$, и (16)

$$\int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|S_3(x)|}} < \frac{1}{\sqrt{|a_1|\delta}} \int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)(x-\Theta_2)|}} \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta}}.$$

b) В случае $|\Theta_1-\Theta_2|=\delta$ ввиду неравенства $|x-\Theta_3|>|x-\Theta_2|$ для всех $x \in \Delta_1$ и (17)

$$\int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|S_3(x)|}} < \frac{1}{\sqrt{|a_1|}} \int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)(x-\Theta_2)^2|}} \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta}}.$$

Аналогично рассуждая, легко показать, что для остальных интегралов в (19) действительна та же оценка. В силу того

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|S_3(x)|}} \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta}}.$$

2. Пусть $l=4$. Оценим

$$\int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}.$$

a) Если $|\Theta_1-\Theta_2|<\gamma$, то в силу (16)

$$\int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} < \frac{1}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}} \int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)(x-\Theta_2)|}} \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}},$$

ибо $|x-\Theta_3|>\gamma$, $|x-\Theta_4|>\delta$ для всех $x \in \Delta_1$.

в) В противном случае $|\Theta_1-\Theta_2|$ равно либо δ, либо γ. Пусть $|\Theta_1-\Theta_2|=\gamma$. Тогда для всех $x \in \Delta_1$ $|x-\Theta_4|>\delta$, $|x-\Theta_3|>|x-\Theta_2|$.

В силу (17)

$$\int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} < \frac{1}{\sqrt{|a_1|\delta}} \int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)(x-\Theta_2)^2|}} \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}}$$

Для случая $|\Theta_1-\Theta_2|=\delta$ в силу неравенств $|x-\Theta_4|>\gamma$, $|x-\Theta_3|>|x-\Theta_2|$ и (17) имеем:

$$\int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}}.$$

Аналогичными рассуждениями получаем ту же оценку и для остальных интегралов в (19).

3. В случае $l=4$, $|\Theta_2-\Theta_3|=\delta$ возможна оценка получше.

Достаточно оценить интегралы:

$$\int\limits_{\Delta_1} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} \tag{20}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}. \tag{21}$$

Оценка остальных интегралов в (19) аналогична оценке (20) интеграла. В силу неравенств $|x-\Theta_3|>\delta$, $|x-\Theta_4|>\delta$ для всех $x\in\Delta_1$ и (16)

$$\int\limits_{\Delta_1}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}<\frac{1}{\delta\sqrt{|a_1|}}\int\limits_{\Delta_1}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)(x-\Theta_2)|}}\ll\frac{\ln h}{\delta\sqrt{|a_1|}}.$$

Оценим (21):

$$\int\limits_{\Delta_2}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}=\int\limits_{\Delta'}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}+\int\limits_{\Delta_2''}\frac{dx}{\sqrt{|S(x)|}},$$

где

$$\Delta_2'=\left(\Theta_2+\frac{1}{h^{n+\varepsilon}},\ \Theta_2+\frac{\delta}{2}\right),$$

$$\Delta_2''=\left(\Theta_2+\frac{\delta}{2},\ \Theta_3-\frac{1}{h^{n+\varepsilon}}\right).$$

Ввиду неравенств $|x-\Theta_3|>\frac{\delta}{2}$, $|x-\Theta_4|>\frac{\delta}{2}$ для всех $x\in\Delta_2'$ и (16):

$$\int\limits_{\Delta_2'}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}<\frac{2}{\delta\sqrt{|a_1|}}\int\limits_{\Delta_2'}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)(x-\Theta_2)|}}\ll\frac{\ln h}{\delta\sqrt{|a_1|}}.$$

Пользуясь тем, что $|x-\Theta_1|>\frac{\delta}{2}$, $|x-\Theta_4|>|x-\Theta_3|$ для всех $x\in\Delta_2''$ и (17) получаем:

$$\int\limits_{\Delta_2''}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}<\frac{2}{\sqrt{\delta}\cdot\sqrt{|a_1|}}\int\limits_{\Delta_2''}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_2)(x-\Theta_3)^2}}\ll\frac{\ln h}{\delta\sqrt{|a_1|}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Delta_2}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\ll\frac{\ln h}{\delta\sqrt{|a_1|}}.$$

В силу всего вышесказанного:

$$\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\ll\frac{\ln h}{\delta\sqrt{|a_1|}}.$$

III. Пусть $S_l(x)$ ($l=3$, 4) имеет одну пару комплексных сопряженных корней, т. е. $\alpha_{s+1}=\bar{\alpha}_s$, $\sigma_s>0$ ($1\leqslant s\leqslant 3$).

Нам будут полезны следующие три тривиальные неравенства:

$$|(x-\alpha_s)(x-\alpha_{s+1})|\geqslant(x-\Theta_s)^2, \tag{22}$$

$$|(x-\alpha_s)(x-\alpha_{s+1})|\geqslant\sigma_s^2, \tag{23}$$

$$|(x-\alpha_s)(x-\alpha_{s+1})|\geqslant\sigma_s|x-\Theta_s|. \tag{24}$$

1. Пусть $l=3$. Положим, для определенности, что $\alpha_s=\alpha_1$, $\alpha_{s+1}=\alpha_2=\bar{\alpha}_1$, $\alpha_3=\Theta_3$, $\sigma_1>0$.

a) Если $|\Theta_1-\Theta_3|=\delta\geqslant\delta_1$, то ввиду (22), (17)

$$\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|S_3(x)|}}\leqslant\frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|}}\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)^2(x-\Theta_3)|}}\ll\frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta}}$$

b) Для случая $\delta<\sigma_1$, пользуясь (24), (16), получаем:

$$\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|S_3(x)|}}\leqslant\frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\sigma_1}}\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)(x-\Theta_3)|}}\ll\frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\sigma_1}}.$$

2. Пусть $l=4$.

2.1. Разберем случай $s=2$. Тогда $\alpha_1=\Theta_1$, $\alpha_2=\Theta_2+\sigma_2 i$, $\sigma_2>0$, $\alpha_3=\bar{\alpha}_2$, $\alpha_4=\Theta_4$.

a) Положим, что $\sigma_2\leqslant\gamma$. Оценим

$$\int\limits_{\Delta_1}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}.$$

В силу (22)

$$\int\limits_{\Delta_1}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{|a_1|}}\int\limits_{\Delta_1}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)(x-\Theta_2)^2(x-\Theta_4)|}}.$$

Если $|\Theta_1-\Theta_2|=\delta$, то $|x-\Theta_4|>\gamma$ для всех $x\in\Delta_1$. А отсюда ввиду (17)

$$\int\limits_{\Delta_1}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{|a_1|\gamma}}\int\limits_{\Delta_1}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)(x-\Theta_2)^2|}}\ll\frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}}.$$

В случае $|\Theta_1-\Theta_2|=\gamma$ имеем $|x-\Theta_4|\geqslant\delta$, и легко получить ту же оценку. Все остальные интервалы в (19) оцениваем, пользуясь аналогичными соображениями. А из этого следует, что

$$\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\ll\frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}}.$$

b) Пусть $\gamma\leqslant\sigma_2\leqslant\delta$. Тогда в силу (24)

$$\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{|a_1|\sigma_2}}\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)(x-\Theta_2)(x-\Theta_4)|}}.\tag{25}$$

Если $\Theta_1=\Theta_2$ или $\Theta_2=\Theta_4$, то так как в этом случае $|\Theta_1-\Theta_4|=\delta$ ввиду (17) получаем

$$\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\ll\frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\sigma_2\delta}}.\tag{26}$$

В случае $\Theta_1<\Theta_2<\Theta_4$ интеграл, стоящий в правой части (25) оцениваем так, как полином $S_3(x)$ с действительными корнями. Справедлива оценка (26).

c) Если $\sigma_2>\delta$, то ввиду (23) и (16)

$$\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\ll\frac{\ln h}{\sigma_2}.$$

2.2. Разберем $S_4(x)$ и дадим оценку интеграла, когда $s=1$ или $s=3$. Возьмем для определенности, что $s=1$, т. е.

$$\alpha_1=\Theta_1+\sigma_1 i,\ \sigma_1>0,\ \alpha_2=\bar{\alpha}_1,\ \alpha_3=\Theta_3,\ \alpha_4=\Theta_4.$$

a) $\sigma_1\leqslant\gamma$. Тогда в силу (22), (17)

$$\int\limits_{\Delta_2}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{|a_1|}}\int\limits_{\Delta_2}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)^2(x-\Theta_3)(x-\Theta_4)|}}\ll$$

$$\ll\frac{1}{\sqrt{|a_1|\delta}}\int\limits_{\Delta_2}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)^2(x-\Theta_3)|}}\ll\frac{1}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}}\ln h,$$

лишь только $|x-\Theta_4|>\delta$ для всех $x\in\Delta_2$.

Если $|x-\Theta_4|>\gamma$ для $x\in\Delta_2$, то

$$\int\limits_{\Delta_2}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\ll\frac{1}{\sqrt{|a_1|\gamma}}\int\limits_{\Delta_2}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)^2(x-\Theta_3)|}}\ll\frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}}.$$

$$\int\limits_{\Delta_0}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}$$

оцениваем аналогично случаю $|x-\Theta_4|>\delta$. Множество Δ_1 — пусто.

Переходим к оценке интеграла

$$\int\limits_{\Delta_3}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}.\tag{27}$$

Если $|\Theta_1-\Theta_3|=\delta$, то в силу (22), (16) и того, что $|x-\Theta_1|>\delta$ для всех $x\in\Delta_3$

$$\int\limits_{\Delta_3}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\ll\frac{1}{\sqrt{|a_1|}}\int\limits_{\Delta_3}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)^2(x-\Theta_3)(x-\Theta_4)|}}<$$

$$<\frac{1}{\delta\sqrt{|a_1|}}\int\limits_{\Delta_3}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_3)(x-\Theta_4)|}}\ll\frac{1}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}}\ln h.$$

В случае $|\Theta_1-\Theta_3|=\gamma$ представим (27) как сумму двух интегралов:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}=\int\limits_{\Delta_3'}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}+\int\limits_{\Delta_3''}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}},$$

где

$$\Delta_3'=\left(\Theta_3+\frac{1}{h^{n+\varepsilon}},\ \Theta_3+\frac{\delta}{2}\right),\quad \Delta_3''=\left(\Theta_3+\frac{\delta}{2},\ \Theta_4-\frac{1}{h^{n+\varepsilon}}\right).$$

Так как $|x-\Theta_4|\geqslant\frac{\delta}{2}$ для всех $x\in\Delta_3'$, имеем

$$\int\limits_{\Delta_3'}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}<\frac{2}{\sqrt{\delta|a_1|}}\int\limits_{\Delta_3'}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)^2(x-\Theta_3)|}}\ll\frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}}.$$

Для $x\in\Delta_3''$ $|x-\Theta_1|>\frac{\delta}{2}$, а отсюда

$$\int\limits_{\Delta_3''}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}<\frac{2}{\delta\sqrt{|a_1|}}\int\limits_{\Delta_3''}\frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_3)(x-\Theta_4)|}}\ll\frac{\ln h}{\delta\sqrt{|a_1|}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Delta_3}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\ll\frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}}.$$

Интеграл по множеству Δ_4 можем оценить аналогично интегралу

$$\int\limits_{\Delta_3''}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}.$$

В силу (19) имеем:

$$\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\ll\frac{\ln h}{\sqrt{|a_1|\delta\gamma}}$$

b) $\gamma<\sigma_1\leqslant\delta$. Оценку

$$\int\limits_{\Omega}\frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}\ll\frac{1}{\sqrt{\sigma_1\delta|a_1|}}\ln h$$

получаем аналогично 2.1.*в*)

c) $\sigma_1 > \delta$. Ввиду (23) и (16)

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} \ll \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{|a_1|}} \ln h.$$

Если ближайший к Θ_1 действительный корень находится на расстоянии δ от Θ_1, $\sigma_1 < \delta$, то можем получить лучшую, чем доказанная, оценку.

Имеем: $\alpha_1 = \Theta_1 + \sigma_1 i$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$, $\alpha_3 = \Theta_3$, $\alpha_4 = \Theta_4$, $|\Theta_1 - \Theta_3| = \delta$, $|\Theta_3 - \Theta_4| = \gamma$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} = \int\limits_{\Delta_2'} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} + \int\limits_{\Delta_2''} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}},$$

где

$$\Delta_2' = \left(\Theta_1 + \frac{1}{h^{n+\varepsilon}},\ \Theta_1 + \frac{\delta}{2}\right),\quad \Delta_2'' = \left(\Theta_1 + \frac{\delta}{2},\ \Theta_3 - \frac{1}{h^{n+\varepsilon}}\right).$$

Так как $|x - \Theta_4| > \frac{\delta}{2}$ для всех $x \in \Delta_1'$, то в силу (22), (17):

$$\int\limits_{\Delta_2'} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} \ll \frac{1}{\sqrt{|a_1|\delta}} \int\limits_{\Delta_2'} \frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_1)^2 (x-\Theta_3)|}} \ll \frac{\ln h}{\delta\sqrt{|a_1|}}$$

Для $x \in \Delta_2''$ $|x - \Theta_1| > \frac{\delta}{2}$. Пользуясь (16), получаем:

$$\int\limits_{\Delta_2''} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} \ll \frac{1}{\delta\sqrt{|a_1|}} \int\limits_{\Delta_2''} \frac{dx}{\sqrt{|(x-\Theta_3)(x-\Theta_4)|}} \ll \frac{\ln h}{\delta\sqrt{|a_1|}}$$

Отсюда

$$\int\limits_{\Delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} \ll \frac{\ln h}{\delta\sqrt{|a_1|}}.$$

Такой же интеграл по множеству Δ_0 оцениваем так, как

$$\int\limits_{\Delta_2'} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}},$$

$$\int\limits_{\Delta_3} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} \quad \int\limits_{\Delta_4} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}$$

— так, как

$$\int\limits_{\Delta_2''} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}}.$$

В силу (19)

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} \ll \frac{\ln h}{\delta\sqrt{|a_1|}}.$$

В случае $s = 3$ рассуждения и оценки интегралов совпадают со случаем $s = 1$.

IV. Пусть $S_4(x)$ не имеет вещественных корней, т. е.

$$\alpha_1 = \Theta_1 + \sigma_1 i,\ \sigma_1 > 0,\ \alpha_1 = \bar{\alpha}_2,\ \alpha_3 = \Theta_3 + \sigma_3 i,\ \sigma_3 > 0,\ \alpha_3 = \bar{\alpha}_4.$$

a) Если $\max(\sigma_1, \sigma_3) \leqslant \delta$, то в силу (22) и (18)

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} \ll \frac{\ln h}{\delta}$$

b) Разберем случай $\max(\sigma_1, \sigma_3) > \delta$.

Положим, для определенности, что $\max(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1$. Тогда, пользуясь (23), (22), получаем:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{|S_4(x)|}} \leqslant \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{|a_1|}} \int\limits_{\Omega} \frac{dx}{|x-\Theta_3|} \leqslant \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{|a_1|}} \ln h.$$

В силу (14) I—IV доказаны.

V. Чтобы доказать неравенство

$$I \leqslant \sqrt{\frac{H}{|a_1|}} \leqslant \frac{h}{\sqrt{|a_1|}},$$

достаточно сравнить лемму 1 с I—IV леммы 2 и воспользоваться неравенством

$$H \leqslant h^2.$$

Доказательство теоремы.

Пусть T_{vl} — прямоугольник:

$$x \in \Delta' = (v+c,\ v+1-c),$$

$$l \leqslant y < l+1,\ \ 0 < c < \frac{1}{2},\ \ v\,(v+1) > 0,\ \ l\,(l+1) > 0,$$

$$\min(|v|,\ |v+1|) \geqslant \rho,\ \ \min(|l|,\ |l+1|) \geqslant \rho,$$

ρ — любое фиксированное число. Ту часть плоскости xOy, где $|x| \geqslant \rho + c$, $|y| \geqslant \rho$ можем разбить на счетное число прямоугольников T_{vl}. Если утверждение теоремы справедливо для любого прямоугольника, то оно справедливо и для всех $|x| \geqslant \rho + c$, $|y| \geqslant \rho$. Устремив ρ, c к нулю, получим справедливость теоремы для почти всех (x, y).

Обозначим через $Q_h(O)$ — меру множества тех $(x, y) \in T_{vl}$, для которых (2) выполняется хоть одним полиномом высоты h из класса O. Пусть q_P — мера множества тех $(x, y) \in T_{vl}$, для которых (2) выполняется фиксированным полиномом P. Если $\sigma_P(x_0)$ означает линейную меру множества точек y на прямой $x = x_0$, удовлетворяющих условиям:

$$l \leqslant y < l+1,\ \ |P(x_0, y)| < h^{-n+1-\varepsilon},$$

то, очевидно,

$$q_P = \int\limits_{v+c}^{v+1-c} \sigma_P(x)\,dx.$$

Кроме тривиальной оценки $\sigma_p(x) \leqslant 1$ нам потребуется еще одна оценка, доказываемая ниже.

Пусть y_1 и y_2 — корни полинома $P_1(y)$, ω — любое вещественное число. Положим для определенности

$$\min(|\omega - y_1|,\ |\omega - y_2|) = |\omega - y_1|.$$

Умножая неравенство

$$|y_1 - y_2| \leqslant 2\,|\omega - y_2|$$

на $|a_{122}x_0 + a_{223}|$, получаем

$$\sqrt{|D(x_0)|} \leqslant 2\,|a_{122}x_0 + a_{223}| \cdot |\omega - y_2|. \tag{28}$$

Это неравенство верно для всех (x, y), кроме тех, которые лежат на прямой $a_{122}x+a_{223}=0$. Умножив (28) на $|\omega-y_1|$ имеем:

$$|\omega-y_1|\sqrt{|D(x_0)|}\leqslant 2|P_1(\omega)|.$$

Отсюда

$$\min(|\omega-y_1|, |\omega-y_2|)\leqslant\frac{2|P_1(\omega)|}{\sqrt{|D(x_0)|}},$$

в предположении, что $D(x_0)\neq 0$. Совершенно аналогичным образом это верно и в случае, когда $\min(|\omega-y_1|, |\omega-y_2|=|\omega-y_2|$. Следовательно, (29) всегда справедливо, если только $D(x_0)\neq 0$, $a_{122}x_0+a_{223}\neq 0$. Из (29) заключаем, что

$$\sigma_P(x_0)\ll\frac{h^{-n+1-\varepsilon}}{\sqrt{|D(x_0)|}}\quad D(x_0)\neq 0,\ a_{122}x_0+a_{223}\neq 0. \tag{30}$$

Обозначим через $\alpha_j=\Theta_j+i\sigma_j$ — корни полинома $D(x)$ $(1\leqslant j\leqslant 4)$. Пусть, как и раньше, $\Delta=(v, v+1)$, а l — число Θ_j, принадлежащих Δ. Положим, для определенности, что $\Theta_i\in\Delta$, где $1\leqslant i\leqslant l$. Пусть Ω'_* — множество тех $x\in\Delta'$, для которых

$$\min_{1\leqslant i\leqslant l}|x-\Theta_i|>h^{-n-\varepsilon},\quad a_{122}x+a_{223}\neq 0.$$

Если $\Omega'_{**}=\Delta'-\Omega'_*$, то

$$m\Omega'_{**}\leqslant 8h^{-n-\varepsilon}.$$

Используя на множестве Ω'_{**} оценку $\sigma_P(x)\leqslant 1$, а на Ω'_* — (30) получаем:

$$q_P\leqslant m\Omega'_{**}+\int\limits_{\Omega'_*}\sigma_P(x)\,dx\leqslant 8h^{-n-\varepsilon}+8h^{-n+1-\varepsilon}\int\limits_{\Omega'_*}\frac{dx}{\sqrt{|D(x)|}} \tag{31}$$

Так как полином $D(x)$ и множество Ω'_* удовлетворяют условиям леммы 2, то справедливы все утверждения леммы 2 с $D(x)$ вместо $R(x)$, где δ, как и в лемме 2, наибольшее среди чисел $|\Theta_1-\Theta_{i+1}|$, а γ следующее за ним по величине $\gamma\leqslant\delta$.

Если $l\leqslant 2$, то так как [3]

$$\sum_{\max(|a_{111}|,|a_{112}|,|a_{122}|)=h}\frac{1}{\sqrt{|d_1|}}\ll h, \tag{33}$$

$$\sum_{\max(|a_{111}|,|a_{112}|,|a_{122}|)<h}\frac{1}{\sqrt{|d_1|}}\ll h^2, \tag{34}$$

имеем

$$\bar\sigma_1=\sum_{\substack{P\in B_{n_1}\\ \|P\|=h,\ l\leqslant 2}}q_P\ll h \tag{35}$$

Разберем случай $l=3$. В силу определения класса B_n хоть один из $|a_{111}|$, $|a_{333}|$ не равен ни нулю, ни высоте полинома. Положим, что таким коэффициентом является a_{333}. $\Bigl($Если $0<|a_{111}|<h$, $|a_{333}|=h$, то можем взять вместо $D(x)$ — полином $D^*(x)=x^4\,D\left(\frac{1}{x}\right)$.$\Bigr)$

Пусть все корни $D(x)$ — действительные числа. Положим, для определенности, что $\Theta_2=\Theta_1+\delta$, $\Theta_3=\Theta_1+\delta+\gamma$, $\Theta_1>0$. Тогда при фиксированных всех a_{ijl} $(1\leqslant i,\ j,\ l\leqslant 3)$, кроме a_{333}, коэффициенты d_1, d_2, d_3 — фиксированные числа. Полином $D''(x)$ содержит корень Θ^*, расположенный между Θ_1 и Θ_3. Так как

$$D''(x)=12d_1\,x^2+6d_2\,x+2d_3,$$

то Θ^* — число, независящее от a_{333}, и

$$\Theta^*-2\delta\leqslant\Theta_i\leqslant\Theta^*+2\delta,\qquad i=1,\ 2,\ 3.$$

По формуле Вьета

$$\Theta_4=-\frac{d_2}{d_1}-3\Theta_1-2\delta-\gamma.$$

Отсюда

$$-\frac{d_2}{d_1}-3\Theta^*-c_1\delta<\Theta_4<-\frac{d_2}{d_1}-3\Theta^*+c_2\delta,$$

где $c_1>0$, $c_2>0$ не зависят от h.

В силу (1) a_{333} входит в d_4 и d_5:

$$d_4=2a_{123}\cdot a_{233}-4a_{122}\cdot a_{333}-4a_{223}\cdot a_{133},$$

$$d_5=a_{233}^2-4a_{223}\cdot a_{333}.$$

Из определения класса B_n следует, что $a_{122}\neq 0$.

Ввиду формулы Вьета

$$d_4=-d_1\Bigl(\Theta_1\Theta_2\Theta_3+\Theta_4(\Theta_1\Theta_2+\Theta_1\Theta_3+\Theta_2\Theta_3)\Bigr).$$

Так как $\Theta_i\in[v,\ v+1)$, то d_4 может приобрести $\leqslant\max(|d_1|,\ |d_2|)\,\delta+1$ различных значений при фиксированных всех коэффициентах, кроме a_{333}. А отсюда a_{333} может приобрести

$$\leqslant t=\frac{\max(|d_1|,\ |d_2|)\,\delta}{|a_{122}|}=\frac{\max(|d_1|,\ |d_2|)\cdot C}{|a_{122}|}$$

различных значений, если $t\geqslant 1$ и $\leqslant 1$, если $t<1$.

$l=3$, а отсюда следует, что либо $|d_2|\asymp|d_1|$, либо $|d_2|\asymp|d_5|$, либо $|d_1|\asymp|d_5|$, $|d_2|\ll|d_1|$. В предпоследнем случае будем пользоваться оценкой:

$$\int\limits_{\Omega_*'}\frac{dx}{\sqrt{|D(x)|}}\asymp\int\limits_{\Omega''}\frac{du}{\sqrt{|D^*(u)|}}\leqslant\frac{\ln h}{\sqrt{|d_5^*|\,C}},$$

где $u=\frac{1}{x}$, а Ω_*'' — множество значений, которые пробегает u, когда x пробегает Ω_*'.

Если $l=3$, $\alpha_2=\bar{\alpha}_1$, $\sigma_1>0$, $\Theta_1=\Theta_2>0$, $\Theta_3=\Theta_1+\delta$, $\Theta_3<\Theta_4$, $\max(\sigma_1, \delta)\ll\frac{1}{\ln h}$ то покажем, что опять $D''(x)$ имеет корень Θ^*, удовлетворяющий неравенству $\Theta_1<|\Theta^*|<\Theta_1+C$. Действительно,

$$D''(x)=2d_1[2(x-\Theta_1)(x-\Theta_3)+2(x-\Theta_1)(x-\Theta_4)+(x-\Theta_3)(x-\Theta_4)+$$
$$+(x-\Theta_1)^2+\sigma_1^2].$$

Обозначив $\rho=x-\Theta_1$, $\Theta_4-\Theta_1=A$, где при $h>h_0$ можем считать, что $A>c_3>0$, c_3 — константа, не завищая от h. Из уравнения $D''(x)=0$ получаем

$$6\rho^2-(3\delta+3A)\rho+\delta A+\sigma_1^2=0,$$

$$\rho_{1,2}=\frac{3\delta+3A\pm\sqrt{(3\delta+3A)^2-24\delta A-24\sigma_1^2}}{12}$$

или

$$\rho_1=\frac{2\delta+2\sigma_1^2\cdot\frac{1}{A}}{3+3\frac{\delta}{A}+\sqrt{3\left(1+\frac{\delta}{A}\right)^2-24\frac{\delta}{A}-24\frac{\sigma_1^2}{A^2}}}$$

При $h>h_0$

$$0<\rho_1\leqslant\max(\delta, \sigma_1)=C.$$

Далее все рассуждения аналогичны случаю $l=3$, Θ_1, Θ_2, Θ_3 — действительные числа.

Разберем случай, когда a_{333} может приобрести одно значение. Пользуясь (33), (34) и оценкой

$$\int\limits_{\Omega_*'}\frac{dx}{\sqrt{|D(x)|}}\ll\frac{h\ln h}{\sqrt{|d_1|}},$$

получаем

$$\sigma_2^*=\sum{}'q_P\ll h^{-1-\varepsilon}+h^{-n+1-\varepsilon}\cdot h\sum{}''\frac{\ln h}{\sqrt{|d_1|}}\cdot h^{n-5}+$$
$$+h^{-n+1-\varepsilon}h\ln h\sum{}^{(1)}\frac{1}{\sqrt{|d_1|}}h^{n-4}\ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

где первая сумма берется по всем $P(x, y)\in B_n$, удовлетворяющим условиям $\|P\|=h$, $l=3$, $t<1$, вторая сумма-по всем таким $P(x, y)$, удовлетворяющим дополнительному условию $\max(|a_{111}|, |a_{112}|, |a_{122}|)<h$, а третья сумма — условию $\max(|a_{111}|, |a_{112}|, |a_{122}|)=h$.

В случае $t\geqslant 1$ разобьем все полиномы $P\in B_n$ на классы $B_{sn}^*\subset B_n$, где классу B_{sn}^* принадлежат те $P(x, y)$, для которых

$$\frac{1}{h^{(s+1)\varepsilon_1}}<\sqrt{C}\leqslant\frac{1}{h^{s\varepsilon_1}}. \tag{36}$$

Здесь $0<\varepsilon_1<\frac{\varepsilon}{2}$ фиксированное число, $s=0, 1, \ldots\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\right]+2$. В силу леммы 2

$$\bigcup_{s=0}^{\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\right]+2}B_{sn}^*=B_n^{**},$$

где $B_n^{**}\subset B_n$ — класс $P(x, y)$, удовлетворяющих условию $t\geqslant 1$.

Ввиду (31), леммы 2 и (38)

$$q_P \ll h^{-n-\varepsilon} + \frac{h^{-n+1-\varepsilon} \cdot \ln h}{\sqrt{|d_1| C}} \ll h^{-n-\varepsilon} + \frac{h^{-n+1-\varepsilon} \ln h}{\sqrt{|d_1|}} \cdot h^{(s+1)\varepsilon_1} \qquad (37)$$

Оценим $Q_h(B^*_{sn})$ для $s = 1, 2 \ldots, \left[\frac{1}{\varepsilon_1}\right]+2$.

$$Q_h(B^*_{sn}) \leqslant \sum_{\substack{P \in B^*_{sn}, \\ \|P\|=h}} q_P \ll h^{-1-\varepsilon} + \left(\sum_{|a_{113}|<h} \frac{\sqrt{|d_1| C}}{|a_{112}|} \cdot h^{(s+1)\varepsilon_1} \cdot h^{n-3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{|d_1| C}}{h} \cdot h^{(s+1)\varepsilon_1} \cdot h^{n-2} \right) \cdot h^{-n+1-\varepsilon} \ll h$$

ибо $\sqrt{|d_1|} \leqslant h$, а из (36)

$$Ch^{(s+1)\varepsilon_1} \leqslant \frac{h^{(s+1)\varepsilon_1}}{h^{2s\varepsilon_1}} \leqslant 1.$$

Для полиномов $P(x, y)$ из класса B^*_{0n} выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{C}} < h^{\varepsilon_1},$$

а так как $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, то ввиду леммы 2

$$q_P \ll h^{-h-\varepsilon} + \frac{h^{-n+1-\varepsilon} \ln h}{\sqrt{|d_1|}} h^{-(\varepsilon-\varepsilon_1)}.$$

Отсюда

$$Q_h(B^*_{on}) \ll h^{-1}$$

Следовательно,

$$\bar{\sigma}_2^{**} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\right]+2} Q_h(B^*_{sn}) \ll h \qquad \bar{\sigma}_2 = \sum_{\substack{P \in B_{3n} \\ \|P\|=h,\ l=3}} q_P \leqslant \sigma_2^* + \sigma_2^{**} \ll h$$

Ввиду (3) и (4)

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 3} (\gamma_1, |\sigma_i|) \gg \frac{1}{h^6}.$$

А отсюда, взяв вместо $\sqrt{C}$ — величину, соответствующую указанной в лемме 2, аналогичными рассуждениями получаем, что

$$\bar{\sigma}_3 = \sum_{\substack{P \in B_n \\ \|P\|=h,\ l=4}} q_P \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

Ввиду неравенства

$$Q_h(B_n) \leqslant \sum_{l=1}^{3} \bar{\sigma}_i$$

имеем:

$$Q_h(B_n) \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Применяя лемму Бореля — Кантелли на плоскости, получаем утверждение теоремы.

Выражаю благодарность профессору И. Кубилюс за ценные советы, высказанные при написании данной работы.

Каунасский Политехнический институт

Поступило в редакцию 29.VIII.1969

Литература

1. В. Г Спринджук, Проблема Малера в метрической теории Издат. „Наука и техника", Минск, 1967, 150—153.
2. Khintchine, Zur metrischen Teorie der Diopkantischen Approximationen, Math. Zeitschr., 24 (1926), 707—714.
3. В. Г Спринджук, О теоремах А. Я. Хинчина и И. П. Кубилюса, Лит. матем. сб. **II**, № 1 (1962), 147—152.
4. Р. Слесорайтене, Аналог теоремы Малера-Спринджука для полиномов второй степени от двух переменных, Лит. матем. сб., IX, № 3 (1969).

MALERIO-SPRINDŽUKO TEOREMOS ANALOGAS KAI KURIEMS TREČIO LAIPSNIO DVIEJŲ KINTAMŲJŲ POLINOMAMS. I

R. Sliesoraitienė

(*Reziumė*)

Tegul

$$P(x, y)=a_{111}x^3+a_{112}x^2y+a_{122}xy^2+a_{222}y^3+$$
$$+a_{113}x^2+a_{123}xy+a_{223}y^2+a_{133}x+a_{233}y+a_{333}$$

— polinomas su sveikais koeficientais, $h=\max\limits_{1\le i,\, l\le 3}|a_{ijl}|$. Jei $x=x_0$ fiksuotas skaičius, tai $D(x_0)$ pažymėkime polinomo $P(x_0,y)$ diskriminantą.

Tegul B_n klasė tų $P(x, y)$, turinčių n fiksuotų nenulinių koeficientų, kuriems

a) $a_{222}=0$,

b) $a_{111}\cdot a_{112}\cdot a_{122}\neq 0$, $d_1\neq 0$,

c) bent vienas iš $|a_{113}|$, $|a_{333}|$ nelygus nei nuliui, nei h,

d) polinomas $D(x)$ neturi kartotinių šaknų.

Galioja teorema.

Beveik visiems (x, y) nelygybė

$$|P(x, y)|<h^{-n+1-\varepsilon}$$

turi tik baigtinį sprendinių skaičių klasės B_n polinomais. Čia $\varepsilon>0$ — fiksuotas skaičius.

THE ANALOQUE OF THE MAHLER-SPRINDŽUK'S THEOREM FOR SOME POLYNOMIALS IN (X, Y) OF THIRD DEGREE. I

R. Sliesoraitienė

(*Summary*)

Let

$$P(x, y)=a_{111}x^3+a_{112}x^2y+a_{122}xy^2+a_{222}y^3+a_{113}x^2+a_{123}xy+a_{223}y^2+$$
$$+a_{133}x+a_{233}y+a_{333}$$

be a polynomial with integral coefficients. Write

$$D(x_0)=d_1x_0^4+d_2x_0^3+d_3x_0^2+d_4x_0+d_5$$

for the discriminant of $P(x_0, y)$. Assume

a) $a_{222}=0$,

b) $a_{111}\cdot a_{112}\cdot a_{122}\neq 0$, $d_1\neq 0$,

c) at least one of $|a_{111}|$, $|a_{333}|$

is equal neither zero, nor h.

d) the discriminant of $D(x)$ is not equal zero. If $h=\max\limits_{1\leqslant i,j,\ l\leqslant 3}|a_{ijl}|$, n is the number of non-zero coefficients among $a_{ijl}(1\leqslant i,j,\ l\leqslant 3)$, $\varepsilon<0$ is a fixed number,
then for almost all (x, y) the inequality

$$|P(x,\ y)|<h^{-n+1-\varepsilon}$$

has only finitely many solutions in such polynomials.