1970

УДК–513.7

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТАХ ПРОСТРАНСТВА ОПОРНЫХ ЛИНЕАРОВ

Ю. Шинкунас

Введение

Б. Л. Лаптевым было введено понятие геометрии пространства опорных элементов с заданным фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом, а также разработана теория дифференцирования Ли в пространстве опорных элементов. Если опорным элементом является произвольный тензор определенного веса, то пространство опорных элементов называется пространством опорных тензорных элементов, в котором Б. Л. Лаптевым введено понятие аффинной связности, введены нормальные координаты, обобщающие нормальные координаты точечных пространств (см. [3], [12]), изучены их свойства, определена операция расширения и построена теория дифференциальных инвариантов (см. [4], [5]).

Общая теория связностей в различных аспектах для произвольных пространств опорных элементов была развита В. И. Близникасом ([1], [2]). На основе этих работ А. П. Урбонасу [8] удалось построить операцию расширения в пространстве опорных элементов, которая является обобщением операции расширения в пространстве опорных тензорных элементов, и доказать ряд теорем о замене и приведении (в случае плоской линейной связности) для дифференциальных инвариантов пространства опорных элементов.

В настоящей статье определяется линеарная связность в пространстве опорных линеаров [9] и для этой связности рассматриваются дифференциальные инварианты. Доказывается ряд теорем о замене и приведении для общей линеарной связности, которые являются обобщением аналогичных теорем, полученных Б. Л. Лаптевым [5] и А. П. Урбонасом [8].

Основные результаты этой статьи докладывались автором на IX республиканской конференции математиков Литовской ССР [10], на III-ей Прибалтийской геометрической конференции [11], а также на Вильнюсском и Казанском геометрических семинарах.

§ 1. Тензорные и линеарные связности на дифференцируемом многообразии

Будем рассматривать n-мерное дифференцируемое многообразие X_n, локальные координаты x^α, которого являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы

$$\omega^\alpha = 0, \tag{1.1}$$

где $\omega^1, \ldots, \omega^n$ – линейно независимые пфаффовые формы и имеют следующую структуру [6]:

$$D\omega^\alpha = \omega^\gamma \wedge \omega^\alpha_\gamma,$$

$$D\omega^\alpha_\gamma = \omega^\varepsilon_\gamma \wedge \omega^\alpha_\varepsilon + \omega^\varepsilon \wedge \omega^\alpha_{\gamma\varepsilon},$$

$$D\omega^\alpha_{\gamma_1 \ldots \gamma_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!\,(a-s)!}\, \omega^\varepsilon{}_{(\gamma_1 \ldots \gamma_s} \wedge \omega^\alpha_{\gamma_{s+1} \ldots \gamma_a)\,\varepsilon} + \omega^\varepsilon \wedge \omega^\alpha_{\gamma_1 \ldots \gamma_a \varepsilon}$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2, \qquad a,\ b,\ c = 1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Линейная (векторная) связность на X_n задается формами $[\omega^\alpha,\ \tilde\omega^\alpha_\beta\ (\tilde\omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\omega^\gamma)$, где

$$\nabla\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} - \omega^\alpha_{\gamma\beta} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta\varepsilon}\omega^\varepsilon. \tag{1.2}$$

При помощи этой связности можно определить инвариантное дифференцирование векторных полей. Например, если дано векторное поле u^α, дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$du^\alpha + u^\gamma\omega^\alpha_\gamma = u^\alpha_\gamma\omega^\gamma, \tag{1.3}$$

то инвариантный дифференциал δ определится следующими равенствами:

$$\delta u^\alpha \equiv du^\alpha + u^\gamma\tilde\omega^\alpha_\gamma = (u^\alpha_\varepsilon + \Gamma^\alpha_{\varepsilon\gamma}u^\gamma)\,\omega^\varepsilon. \tag{1.4}$$

Величины

$$\overset{\circ}{\nabla}{}^\varepsilon u^\alpha = u^\alpha_\varepsilon + \Gamma^\alpha_{\varepsilon\gamma}u^\gamma \tag{1.5}$$

называются инвариантной неголономной производной векторного поля u^α и, как нетрудно проверить, являются тензором.

С этой векторной связностью ассоциируется специальная линейная тензорная связность, определенная формами [2]:

$$\tilde\omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_q \beta_1 \ldots \beta_p}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_q \gamma_1 \ldots \gamma_p} = -\sum_{s=1}^{q} \delta^{\alpha_1}_{\varepsilon_1} \ldots \delta^{\alpha_s}_{\tau} \ldots \delta^{\alpha_q}_{\varepsilon_q}\delta^{\beta_1}_{\gamma_1} \ldots \delta^{\beta_p}_{\gamma_p}\omega^{\tau}_{\varepsilon_s} +$$

$$+\sum_{s=1}^{p} \delta^{\alpha_1}_{\varepsilon_1} \ldots \delta^{\alpha_q}_{\varepsilon_q}\delta^{\beta_1}_{\gamma_1} \ldots \delta^{\tau}_{\gamma_s} \ldots \delta^{\beta_p}_{\gamma_p}\omega^{\beta_s}_{\tau} + \Gamma^{\alpha_1 \ldots \alpha_q \beta_1 \ldots \beta_p}_{\tau\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_q \gamma_1 \ldots \gamma_p}\omega^\tau, \tag{1.6}$$

где

$$\Gamma^{\alpha_1 \ldots \alpha_q \beta_1 \ldots \beta_p}_{\tau\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_q \gamma_1 \ldots \gamma_p} = -\sum_{s=1}^{q} \delta^{\alpha_1}_{\varepsilon_1} \ldots \delta^{\alpha_s}_{\delta} \ldots \delta^{\alpha_q}_{\varepsilon_q}\delta^{\beta_1}_{\gamma_1} \ldots \delta^{\beta_p}_{\gamma_p}\Gamma^{\sigma}_{\tau\varepsilon_s} +$$

$$+\sum_{s=1}^{p} \delta^{\alpha_1}_{\varepsilon_1} \ldots \delta^{\alpha_q}_{\varepsilon_q}\delta^{\beta_1}_{\gamma_1} \ldots \delta^{\sigma}_{\gamma_s} \ldots \delta^{\beta_p}_{\gamma_p}\Gamma^{\beta_s}_{\tau\sigma}.$$

Из (1.2) и (1.6) следует, что

$$\nabla\Gamma^{\alpha_1 \ldots \alpha_q \beta_1 \ldots \beta_p}_{\tau\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_q \gamma_1 \ldots \gamma_p} - \omega^{\alpha_1 \ldots \alpha_q \beta_1 \ldots \beta_p}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_q \gamma_1 \ldots \gamma_p \tau} = 0\ (\mathrm{mod}\ \omega^\alpha). \tag{1.7}$$

При помощи специальной тензорной связности инвариантный дифференциал $(p+q)$-валентного тензорного поля $T^{\alpha_1 \cdots \alpha_q}_{\gamma_1 \cdots \gamma_p}$ определяется равенствами:

$$\delta T^{\alpha_1 \cdots \alpha_q}_{\gamma_1 \cdots \gamma_p} = dT^{\alpha_1 \cdots \alpha_q}_{\gamma_1 \cdots \gamma_p} + T^{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_q}_{\beta_1 \cdots \beta_p} \bar{\omega}^{\alpha_1 \cdots \alpha_q \beta_1 \cdots \beta_p}_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_q \gamma_1 \cdots \gamma_p} \tag{1.8}$$

Говорят, что на дифференцируемом многообразии X_n задан произвольный объект линейной тензорной связности $L^{\alpha_1 \cdots \alpha_q \beta_1 \cdots \beta_p}_{\tau\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_q \gamma_1 \cdots \gamma_p}$ ($p+q$-той валентности), если величины $L^{\alpha_1 \cdots \alpha_q \beta_1 \cdots \beta_p}_{\tau\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_q \gamma_1 \cdots \gamma_p}$ являются решением системы дифференциальных уравнений (1.7).

Если на X_n дано поле линеара [7] $\overset{i}{u}{}^\alpha$, дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$d\overset{i}{u}{}^\alpha + \overset{k}{u}{}^\gamma \overset{i}{\underset{k}{\omega}}{}^\alpha_\gamma = \overset{i}{u}{}^\alpha_\gamma \omega^\gamma, \tag{1,9}$$

$$(\overset{i}{\underset{j}{\omega}}{}^\alpha_\gamma = \delta^i_j \omega^\alpha_\gamma + c^i_j \delta^\alpha_\gamma \omega^\varepsilon_\varepsilon;$$

$i, j, k = 1, 2, \quad N$;

$\| c^i_j \|$ — типовая матрица линеара),

то инвариантный дифференциал, определенный при помощи векторной связности, имеет вид:

$$\delta\overset{i}{u}{}^\alpha = d\overset{i}{u}{}^\alpha + \overset{k}{u}{}^\gamma \overset{i}{\underset{k}{\bar{\omega}}}{}^\alpha_\gamma, \tag{1.10}$$

где

$$\overset{i}{\underset{k}{\bar{\omega}}}{}^\alpha_\gamma = \delta^i_k \bar{\omega}^\alpha_\gamma + c^i_k \delta^\alpha_\gamma \bar{\omega}^\varepsilon_\varepsilon \tag{1.11}$$

или

$$\overset{i}{\underset{k}{\bar{\omega}}}{}^\alpha_\gamma = \overset{i}{\underset{k}{\omega}}{}^\alpha_\gamma + \overset{i}{\underset{k}{\Gamma}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma} \omega^\varepsilon$$

$$(\overset{i}{\underset{k}{\Gamma}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma} = \delta^i_k \Gamma^\alpha_{\varepsilon\gamma} + \delta^\alpha_\gamma c^i_k \Gamma^\sigma_{\varepsilon\sigma}). \tag{1.12}$$

Формы $\overset{i}{\underset{k}{\bar{\omega}}}{}^\alpha_\gamma$ назовем формами специальной линеарной связности (по аналогии с тензорной связностью). Они имеют следующую структуру:

$$D\overset{i}{\underset{j}{\bar{\omega}}}{}^\alpha_\varepsilon = \overset{k}{\underset{j}{\bar{\omega}}}{}^\gamma_\varepsilon \wedge \overset{i}{\underset{k}{\bar{\omega}}}{}^\alpha_\gamma + \overset{i}{\underset{j}{R}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon\tau} \omega^\tau \wedge \omega^\gamma, \tag{1.13}$$

где

$$\overset{i}{\underset{j}{R}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon\tau} = \delta^i_j R^\alpha_{\gamma\varepsilon\tau} + c^i_j \delta^\alpha_\varepsilon R^\sigma_{\gamma\sigma\tau}$$

($R^\alpha_{\gamma\varepsilon\tau}$ — тензор кривизны векторной связности $\Gamma^\alpha_{\gamma\varepsilon}$). Объект $\overset{i}{\underset{j}{R}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon\tau}$ назовем линеаром кривизны специальной линеарной связности.

Будем говорить, что на многообразии X_n задано поле объекта произвольной линеарной связности $\overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$, если величины $\overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$d\overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} - \overset{i}{\underset{k}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\sigma}\overset{k}{\underset{j}{\omega}}{}^{\sigma}_{\varepsilon} + \overset{k}{\underset{j}{L}}{}^{\sigma}_{\gamma\varepsilon}\overset{i}{\underset{[k]}{\omega}}{}^{\alpha}_{\sigma} - \overset{i}{\underset{j}{\omega}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma} = \overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau}\,\omega^{\tau}. \tag{1.14}$$

Линеар кривизны для произвольной линеарной связности имеет вид:

$$\overset{i}{\underset{j}{R}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau} = 2\,(\overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau} - \overset{k}{\underset{j}{L}}{}^{\sigma}_{[\gamma|\varepsilon|}\,\overset{i}{\underset{|k|}{L}}{}^{\alpha}_{\tau]\sigma}). \tag{1.15}$$

Из уравнений (1.14) видно, что величины

$$L^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} = \frac{1}{N}\left(\overset{i}{\underset{i}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} - \frac{c\delta^{\alpha}_{\varepsilon}}{N+cn}\,\overset{i}{\underset{i}{L}}{}^{\sigma}_{\gamma\sigma}\right) \quad (c = sp\,\|c^i_j\|)$$

образуют объект аффинной связности.

Для линеарного поля $\overset{i}{u}{}^{\alpha}$ можно рассматривать два типа инвариантных неголономных производных: а) производную, определенную при помощи объекта линеарной связности $\overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ по формуле:

$$\nabla_{\gamma}\overset{i}{u}{}^{\alpha} = \overset{i}{u}{}^{\alpha}_{\gamma} + \overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\overset{j}{u}{}^{\varepsilon}; \tag{1.16}$$

б) производную, определенную при помощи объекта индуцированной аффинной связности $L^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ по формуле:

$$\mathring{\nabla}_{\gamma}\overset{i}{u}{}^{\alpha} = \overset{i}{u}{}^{\alpha}_{\gamma} + \overset{i}{u}{}^{\varepsilon}L^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} + c^i_k\overset{k}{u}{}^{\alpha}L^{\varepsilon}_{\gamma\varepsilon}. \tag{1.17}$$

Нетрудно проверить, что

$$\nabla_{\gamma}\overset{i}{u}{}^{\alpha} - \mathring{\nabla}_{\gamma}\overset{i}{u}{}^{\alpha} = \overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\overset{j}{u}{}^{\varepsilon}, \tag{1.18}$$

где

$$\overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} = \overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} - \delta^i_j L^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} - c^i_j\delta^{\alpha}_{\varepsilon}L^{\sigma}_{\gamma\sigma}. \tag{1.19}$$

Из уравнений (1.2) и (1.14) следует, что $\overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ является линеаром, который в общем случае отличен от нуля. Обращение в нуль линеара $\overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ приводит к совпадению инвариантной производной $\nabla_{\gamma}\overset{i}{u}{}^{\alpha}$ с инвариантной производной $\mathring{\nabla}_{\gamma}\overset{i}{u}{}^{\alpha}$. Поэтому линеар $\overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ будем называть линеаром неаффинности.

§ 2. Общая линеарная связность в пространстве опорных линеаров

В пространстве опорных линеаров $L_{n,\nu}$ (см. [9]) общую линеарную связность определим формами ω^{α}, $\overset{i}{\Theta}{}^{\alpha}$ и

$$\overset{i}{\underset{j}{\tilde{\omega}}}{}^{\alpha}_{\gamma} = \overset{i}{\underset{j}{\omega}}{}^{\alpha}_{\gamma} + \overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\omega^{\varepsilon} + \overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\overset{k}{\Theta}{}^{\varepsilon}, \tag{2.1}$$

где

$$d\overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}-\overset{i}{\underset{k}{L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\tau}\overset{k}{\underset{j}{\omega}}{}^{\tau}_{\gamma}-\overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\tau\gamma}\omega^{\tau}_{\varepsilon}+\overset{k}{\underset{j}{L}}{}^{\tau}_{\varepsilon\gamma}\overset{i}{\underset{k}{\omega}}{}^{\alpha}_{\tau}-\overset{i}{\underset{j}{\omega}}{}^{\alpha}_{\gamma,\varepsilon}-\overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\sigma}\overset{k}{\Theta}{}^{\sigma}_{\varepsilon}=\overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma\tau}\omega^{\tau}+\overset{i}{\underset{jk}{L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma\tau}\overset{k}{\Theta}{}^{\tau}, \tag{2.2}$$

$$d\overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}-\overset{i}{\underset{lk}{C}}{}^{\alpha}_{\tau\varepsilon}\overset{l}{\underset{j}{\omega}}{}^{\tau}_{\gamma}-\overset{i}{\underset{jl}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\tau}\overset{l}{\underset{k}{\omega}}{}^{\tau}_{\varepsilon}+\overset{l}{\underset{jk}{C}}{}^{\tau}_{\gamma\varepsilon}\overset{i}{\underset{l}{\omega}}{}^{\alpha}_{\tau}=\overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau}\omega^{\tau}+\overset{i}{\underset{jkl}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau}\overset{l}{\Theta}{}^{\tau}. \tag{2.3}$$

Связность, определенная формами (2.1), будет инвариантна относительно перенормировки опорного линеара $\overset{i}{v}{}^{\alpha}$:

$$\overset{i}{\bar{v}}{}^{\alpha}=\lambda\overset{i}{v}{}^{\alpha}\ (\lambda-\text{скаляр}),$$

тогда и только тогда, когда

$$\overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}(x,\ \lambda v)=\overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}(x,\ v),\qquad \overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}(x,\ \lambda v)=\lambda^{-1}\overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}(x,\ v), \tag{2.4}$$

причем

$$\overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\overset{k}{v}{}^{\varepsilon}=0. \tag{2.5}$$

Если положить

$$\overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^{\alpha}=d\overset{i}{v}{}^{\alpha}+\overset{k}{v}{}^{\gamma}\overset{i}{\underset{k}{\bar{\omega}}}{}^{\alpha}_{\gamma}, \tag{2.6}$$

то

$$\overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^{\alpha}=\overset{i}{\underset{j}{E}}{}^{\alpha}_{\gamma}\overset{j}{\Theta}{}^{\gamma}+\overset{i}{E}{}^{\alpha}_{\gamma}\omega^{\gamma}, \tag{2.7}$$

где

$$\overset{i}{\underset{j}{E}}{}^{\alpha}_{\gamma}=\delta^{i}_{j}\delta^{\alpha}_{\gamma}+\overset{i}{\underset{kj}{C}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\overset{k}{v}{}^{\varepsilon}, \tag{2.8}$$

$$\overset{i}{E}{}^{\alpha}_{\gamma}=\overset{j}{v}{}^{\varepsilon}\overset{i}{\underset{j}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Потребуем, чтобы с равенствами (2.5) одновременно выполнялись и равенства

$$\overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\overset{j}{v}{}^{\gamma}=0. \tag{2.10}$$

При выполнении условий (2.10) имеем, что $\overset{i}{\underset{j}{E}}{}^{\alpha}_{\gamma}=\delta^{i}_{j}\delta^{\alpha}_{\gamma}$, а величины $\overset{i}{E}{}^{\alpha}_{\gamma}$ являются компонентами объекта линейной связности, удовлетворяющей дифференциальным уравнениям

$$d\overset{i}{E}{}^{\alpha}_{\gamma}-\overset{i}{E}{}^{\alpha}_{\varepsilon}\omega^{\varepsilon}_{\gamma}+\overset{j}{E}{}^{\varepsilon}_{\gamma}\overset{i}{\underset{j}{\omega}}{}^{\alpha}_{\varepsilon}-\overset{i}{\Theta}{}^{\alpha}_{\gamma}=\overset{i}{E}{}^{\alpha}_{\gamma,\varepsilon}\,\omega^{\varepsilon}+\overset{i}{\underset{j}{E}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\overset{j}{\Theta}{}^{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

$$(\overset{i}{\Theta}{}^{\alpha}_{\gamma}=\overset{i}{\underset{j}{\omega}}{}^{\alpha}_{\varepsilon,\gamma}\,\overset{j}{v}{}^{\varepsilon}).$$

Имея в виду (2.7) и (2.10), формы $\overset{i}{\underset{j}{\bar{\omega}}}{}^{\alpha}_{\gamma}$ можно представить в виде:

$$\overset{i}{\underset{j}{\bar{\omega}}}{}^{\alpha}_{\gamma}=\overset{i}{\underset{j}{\omega}}{}^{\alpha}_{\gamma}+\overset{i}{\underset{j}{\bar{L}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\omega^{\varepsilon}+\overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\overset{k}{\bar{\Theta}}{}^{\varepsilon}, \tag{2.12}$$

где

$$\underset{j}{\overset{i}{\tilde L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}=\underset{j}{\overset{i}{L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}-\underset{jk}{\overset{i}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\sigma}\overset{k}{E}{}^{\sigma}_{\varepsilon}. \tag{2.13}$$

Из уравнений (2.2), (2.3) и (2.11) следует, что величины $\underset{j}{\overset{i}{\tilde L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$d\underset{j}{\overset{i}{\tilde L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}-\underset{k}{\overset{i}{\tilde L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\tau}\underset{j}{\overset{k}{\omega}}{}^{\tau}_{\gamma}-\underset{j}{\overset{i}{\tilde L}}{}^{\alpha}_{\tau\gamma}\omega^{\tau}_{\varepsilon}+\underset{j}{\overset{k}{\tilde L}}{}^{\tau}_{\varepsilon\gamma}\underset{k}{\overset{i}{\omega}}{}^{\alpha}_{\tau}-\underset{j}{\overset{i}{\omega}}{}^{\alpha}_{\gamma,\varepsilon}=$$

$$=\underset{j}{\overset{i}{\tilde L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma\tau}\omega^{\tau}+\underset{jk}{\overset{i}{\tilde L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma\tau}\overset{k}{\tilde\Theta}{}^{\tau}. \tag{2.14}$$

Если $N+cn\neq 0$, то из равенств (2.12) единственным образом можно определить аффинную связность по следующей формуле:

$$\tilde\omega^{\alpha}_{\beta}=\frac{1}{N}\left(\underset{i}{\overset{i}{\omega}}{}^{\alpha}_{\beta}-\frac{c\delta^{\alpha}_{\beta}}{N+cn}\underset{i}{\overset{i}{\omega}}{}^{\varepsilon}_{\varepsilon}\right) \tag{2.15}$$

или

$$\tilde\omega^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\alpha}_{\beta}+L^{\alpha}_{\varepsilon\beta}\omega^{\varepsilon}+\underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\overset{j}{\tilde\Theta}{}^{\gamma}, \tag{2.16}$$

где

$$L^{\alpha}_{\varepsilon\beta}=\frac{1}{N}\left(\underset{i}{\overset{i}{\tilde L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\beta}-\frac{c\delta^{\alpha}_{\beta}}{N+cn}\underset{i}{\overset{i}{\tilde L}}{}^{\sigma}_{\varepsilon\sigma}\right), \tag{2.17}$$

$$\underset{i}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{N}\left(\underset{ji}{\overset{j}{C}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}-\frac{c\delta^{\alpha}_{\beta}}{N+cn}\underset{ji}{\overset{j}{C}}{}^{\sigma}_{\sigma\gamma}\right). \tag{2.18}$$

Линеары

$$\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}=\underset{j}{\overset{i}{\tilde L}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}-\delta^{i}_{j}L^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}-c^{i}_{j}\delta^{\alpha}_{\gamma}L^{\sigma}_{\varepsilon\sigma} \tag{2.19}$$

$$\underset{jk}{\overset{i}{M}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}=\underset{jk}{\overset{i}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}-\delta^{i}_{j}\underset{k}{C}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}-c^{i}_{j}\delta^{\alpha}_{\gamma}\underset{k}{C}{}^{\sigma}_{\sigma\varepsilon} \tag{2.20}$$

в общем случае отличны от нуля, и их будем называть соответственно первым и вторым линеарами неаффинности.

Структурные уравнения пространства опорных линеаров линеарной связности имеют вид:

$$D\omega^{\alpha}=\omega^{\gamma}\wedge\tilde\omega^{\alpha}_{\gamma}+\frac{1}{2}R^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\omega^{\varepsilon}\wedge\omega^{\gamma}+\underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\overset{j}{\tilde\Theta}{}^{\varepsilon}\wedge\omega^{\gamma}, \tag{2.21}$$

$$D\underset{j}{\overset{i}{\tilde\omega}}{}^{\alpha}_{\gamma}=\underset{j}{\overset{k}{\tilde\omega}}{}^{\varepsilon}_{\gamma}\wedge\underset{k}{\overset{i}{\tilde\omega}}{}^{\alpha}_{\varepsilon}+\frac{1}{2}\underset{j}{\overset{i}{R}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma\tau}\omega^{\tau}\wedge\omega^{\varepsilon}+$$

$$+\underset{jk}{\overset{i}{P}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau}\omega^{\tau}\wedge\overset{k}{\tilde\Theta}{}^{\varepsilon}+\frac{1}{2}\underset{jkl}{\overset{i}{S}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau}\overset{l}{\tilde\Theta}{}^{\tau}\wedge\overset{k}{\tilde\Theta}{}^{\varepsilon}, \tag{2.22}$$

$$D\overset{i}{\bar{\Theta}}{}^{\alpha}=\overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^{\gamma}\wedge\overset{i}{\underset{k}{\tilde{\omega}}}{}^{\alpha}_{\gamma}+\frac{1}{2}\overset{i}{R}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\omega^{\varepsilon}\wedge\omega^{\gamma}+$$

$$+\overset{i}{\underset{j}{P}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\omega^{\gamma}\wedge\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^{\varepsilon}+\frac{1}{2}\overset{i}{\underset{jk}{S}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^{\gamma}\wedge\overset{j}{\Theta}{}^{\varepsilon},\tag{2.23}$$

где

$$R^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}=-2L^{\alpha}_{[\gamma\varepsilon]},\tag{2.24}$$

$$\overset{i}{\underset{j}{R}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau}=2\,(\overset{i}{\underset{j}{\bar{L}}}{}^{\alpha}_{[\varepsilon|\gamma|\tau]}-\overset{i}{\underset{jk}{\tilde{L}}}{}^{\alpha}_{[\varepsilon|\gamma\sigma|}\overset{k}{\tilde{E}}{}^{\sigma}_{\tau]}-\overset{k}{\underset{j}{\tilde{L}}}{}^{\sigma}_{[\tau|\gamma|}\overset{i}{\underset{k|}{\bar{L}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon]\sigma})+\overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\sigma}\overset{k}{R}{}^{\sigma}_{\varepsilon\tau},\tag{2.25}$$

$$\overset{l}{\underset{jk}{P}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau}=\overset{l}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau}-\overset{l}{\underset{jlk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\sigma}\overset{l}{E}{}^{\sigma}_{\tau}-\overset{l}{\tilde{L}}{}^{\sigma}_{\tau\gamma}\overset{i}{\underset{lk}{C}}{}^{\alpha}_{\sigma\varepsilon}+\overset{i}{\underset{l}{\tilde{L}}}{}^{\alpha}_{\tau\sigma}\overset{l}{\underset{jk}{C}}{}^{\sigma}_{\gamma\varepsilon}-$$

$$-\overset{l}{\underset{k}{\tilde{L}}}{}^{\sigma}_{\tau\varepsilon}\overset{i}{\underset{jl}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\sigma}-\overset{i}{\underset{jk}{\tilde{L}}}{}^{\alpha}_{\tau\gamma\varepsilon}+\overset{i}{\underset{jl}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\sigma}\overset{l}{\underset{k}{P}}{}^{\sigma}_{\tau\varepsilon},\tag{2.26}$$

$$\overset{i}{\underset{jkl}{S}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau}=2\left(\overset{i}{\underset{j\{kl}{C}}{}^{\alpha}_{|\gamma|\varepsilon\tau\}}-\overset{p}{\underset{j\{l}{C}}{}^{\sigma}_{|\gamma|\tau}\overset{i}{\underset{|p|k}{C}}{}^{\alpha}_{|\sigma|\varepsilon\}}\right),\tag{2.27}$$

$$\overset{i}{R}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}=2\,(\overset{i}{E}{}^{\alpha}_{[\gamma\varepsilon]}-\overset{i}{\underset{j}{E}}{}^{\alpha}_{[\gamma|\tau|}\overset{j}{E}{}^{\tau}_{\varepsilon]}),\tag{2.28}$$

$$\overset{i}{\underset{jk}{S}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}=2\overset{i}{\underset{\{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\}},\tag{2.29}$$

$$\overset{i}{\underset{j}{P}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}=\overset{i}{\underset{j}{\bar{L}}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}-\overset{i}{\underset{j}{E}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}.\tag{2.30}$$

Скобки { } означают альтернирование по двум парам индексов, например,

$$\overset{p}{\underset{j\{k}{C}}{}^{\sigma}_{|\gamma|\tau}\overset{l}{\underset{|p|l}{C}}{}^{\alpha}_{|\sigma|\varepsilon\}}=\frac{1}{2}\,(\overset{}{\underset{jk}{C}}{}^{\sigma}_{\gamma\tau}\overset{l}{\underset{pl}{C}}{}^{\alpha}_{\sigma\varepsilon}-\overset{\rightarrow p}{\underset{jl}{C}}{}^{\sigma}_{\gamma\varepsilon}\overset{l}{\underset{pk}{C}}{}^{\alpha}_{\sigma\tau}).$$

$R^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ будем называть тензором кручения, $\underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ — линеаром кручения пространства $L_{n,\sigma}$, линеар $\overset{l}{\underset{j}{R}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma\tau}$ — первым картановым линеаром кривизны, $\overset{i}{\underset{jkl}{S}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma\tau}$ — вторым картановым линеаром кривизны и $\overset{i}{\underset{jk}{P}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\tau}$ — третьим картановым линеаром кривизны. Линеары $\overset{i}{R}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$, $\overset{i}{\underset{jk}{S}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ и $\overset{i}{\underset{j}{P}}{}^{\alpha}_{\gamma}$ назовем соответственно первым, вторым и третьим линеарами дополнительной кривизны.

Дифференцируя внешним образом (2.16), получаем, что формы $\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta}$ имеют следующую структуру:

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta}=\tilde{\omega}^{\varepsilon}_{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\alpha}_{\varepsilon}+\frac{1}{2}R^{\alpha}_{\varepsilon\beta\tau}\omega^{\tau}\wedge\omega^{\varepsilon}+\underset{k}{P}{}^{\alpha}_{\beta\tau\varepsilon}\omega^{\varepsilon}\wedge\overset{k}{\bar{\Theta}}{}^{\tau}+$$

$$+\frac{1}{2}\underset{kl}{S}{}^{\alpha}_{\beta\varepsilon\tau}\overset{l}{\bar{\Theta}}{}^{\tau}\wedge\overset{k}{\bar{\Theta}}{}^{\varepsilon},\tag{2.31}$$

где $R^{\alpha}_{\varepsilon\beta\tau}$, $\underset{kl}{S}{}^{\alpha}_{\beta\varepsilon\tau}$, $\underset{k}{P}{}^{\alpha}_{\varepsilon\beta\tau}$ являются соответственно первым картановым тензором кривизны, вторым картановым и третьим картановым линеарами кривизны пространства опорных линеаров аффинной связности, индуцированной при помощи общей линеарной связности, и равны:

$$R^{\alpha}_{\varepsilon\beta\gamma}=2\,(L^{\alpha}_{[\varepsilon|\beta|\gamma]}-\underset{j}{L}{}^{\alpha}_{[\varepsilon|\beta\tau|}\overset{j}{E}{}^{\tau}_{\gamma]}-L^{\alpha}_{[\varepsilon|\rho|}L^{\rho}_{\gamma]\beta})+\underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\beta\sigma}\overset{j}{R}{}^{\sigma}_{\varepsilon\gamma},\tag{2.32}$$

$$\underset{j}{P}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}=\underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}-\underset{jk}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\tau}\overset{k}{E}{}^{\tau}_{\varepsilon}-\underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\sigma\gamma}L^{\sigma}_{\varepsilon\beta}+\underset{j}{C}{}^{\sigma}_{\beta\gamma}L^{\alpha}_{\varepsilon\beta}-$$

$$-\underset{k}{C}{}^{\alpha}_{\beta\sigma}\underset{j}{\overset{k}{\tilde{L}}}{}^{\sigma}_{\varepsilon\gamma}-\underset{j}{L}{}^{\alpha}_{\varepsilon\beta\gamma}+\underset{k}{C}{}^{\alpha}_{\beta\sigma}\underset{j}{\overset{k}{P}}{}^{\sigma}_{\varepsilon\gamma},\tag{2.33}$$

$$\underset{jk}{S}{}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}=2\left(\underset{\{jk}{C}{}^{\alpha}_{|\beta|\gamma\varepsilon\}}-\underset{\{j}{C}{}^{\alpha}_{|\sigma|\gamma}\underset{k}{C}{}^{\sigma}_{|\beta|\varepsilon\}}\right).\tag{2.34}$$

§ 3. Инвариантные производные и тождества Риччи

Если дано поле линеара, определенное дифференциальными уравнениями

$$d\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}+\underset{j}{\overset{k}{T}}{}^{\varepsilon}_{\gamma}\underset{k}{\overset{i}{\omega}}{}^{\alpha}_{\varepsilon}-\underset{k}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\varepsilon}\underset{j}{\overset{k}{\omega}}{}^{\varepsilon}_{\gamma}=\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma,\varepsilon}\omega^{\varepsilon}+\underset{jk}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\overset{k}{\Theta}{}^{\varepsilon},\tag{3.1}$$

то аппарат инвариантного дифференцирования получим заменой в этих уравнениях $\underset{j}{\overset{i}{\omega}}{}^{\alpha}_{\gamma}$ и $\overset{k}{\Theta}{}^{\varepsilon}$ их выражениями через $\underset{j}{\overset{i}{\bar{\omega}}}{}^{\alpha}_{\gamma}$ и $\overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^{\varepsilon}$. Таким образом получаем, что инвариантный дифференциал двухиндексного линеара определяется равенствами:

$$\delta\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}=\nabla_{\varepsilon}\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}\omega^{\varepsilon}+\underset{k}{\nabla}_{\varepsilon}\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}\overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^{\varepsilon},\tag{3.2}$$

где величины

$$\nabla_{\varepsilon}\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}\equiv\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma,\varepsilon}-\underset{jk}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma\sigma}\overset{k}{E}{}^{\sigma}_{\varepsilon}+\underset{j}{\overset{k}{T}}{}^{\sigma}_{\gamma}\underset{k}{\overset{i}{\tilde{L}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\sigma}-\underset{k}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\sigma}\underset{j}{\overset{k}{\tilde{L}}}{}^{\sigma}_{\varepsilon\gamma},\tag{3.3}$$

$$\underset{k}{\nabla}_{\varepsilon}\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}\equiv\underset{jk}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}-\underset{l}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\sigma}\underset{jk}{\overset{l}{C}}{}^{\sigma}_{\gamma\varepsilon}+\underset{j}{\overset{l}{T}}{}^{\sigma}_{\gamma}\underset{lk}{\overset{i}{C}}{}^{\alpha}_{\sigma\varepsilon}\tag{3.4}$$

будем называть соответственно неголономными инвариантными производными линеара первого и второго рода. Аналогично можно определить инвариантный дифференциал любого линеарного поля. Используя уравнения (2.14), (2.11) и частичное продолжение (3.1), легко показать, что $\nabla_{\varepsilon}\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}$ и $\underset{k}{\nabla}_{\varepsilon}\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}$ являются линеарами.

Величины

$$\overset{E}{\partial}_{\varepsilon}\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}\equiv\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma,\varepsilon}-\underset{jk}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma\sigma}\overset{k}{E}{}^{\sigma}_{\varepsilon}\tag{3.5}$$

$$\underset{k}{\partial}_{\varepsilon}\underset{j}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}\equiv\underset{jk}{\overset{i}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\tag{3.6}$$

назовем первой и второй базисными неголономными производными линеара $\overset{i}{\underset{j}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}$. Нетрудно проверить, что

$$\overset{E}{\partial}_{[\sigma}\overset{E}{\partial}_{\varepsilon]}\overset{i}{\underset{j}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma} = -\partial_\tau \overset{i}{\underset{k}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}\cdot \overset{k}{\underset{j}{R}}{}^{\tau}_{\varepsilon\sigma}. \tag{3.7}$$

Равенства (3.7) показывают, что повторное базисное дифференцирование не перестановочно. Аналогичная формула справедлива и для любого дифференциально-геометрического объекта.

Инвариантное дифференцирование можно было бы определить заменой в уравнениях (3.1) форм $\overset{i}{\underset{j}{\omega}}{}^{\alpha}_{\gamma}$ их выражениями через формы $\tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma}$. Полученный таким путем инвариантный дифференциал обозначим через $\overset{\circ}{\delta}$, а инвариантные производные первого и второго рода — через $\overset{\circ}{\nabla}_\varepsilon$ и $\underset{k}{\overset{\circ}{\nabla}}_\varepsilon$, соответственно. Имеют место соотношения:

$$\nabla_\varepsilon \overset{i}{\underset{j}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma} = \overset{\circ}{\nabla}_\varepsilon \overset{i}{\underset{j}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma} + \overset{k}{\underset{j}{T}}{}^{\sigma}_{\gamma}\overset{i}{\underset{k}{N}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\sigma} - \overset{i}{\underset{k}{T}}{}^{\alpha}_{\sigma}\overset{k}{\underset{j}{N}}{}^{\sigma}_{\varepsilon\gamma}, \tag{3.8}$$

$$\underset{k}{\nabla}_\varepsilon \overset{i}{\underset{j}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma} = \underset{k}{\overset{\circ}{\nabla}}_\varepsilon \overset{i}{\underset{j}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma} + \overset{l}{\underset{j}{T}}{}^{\sigma}_{\gamma}\overset{i}{\underset{lk}{M}}{}^{\alpha}_{\sigma\varepsilon} - \overset{i}{\underset{l}{T}}{}^{\alpha}_{\sigma}\overset{l}{\underset{jk}{M}}{}^{\sigma}_{\gamma\varepsilon}. \tag{3.9}$$

Заметим, что

$$\nabla_\varepsilon \overset{i}{v}{}^{\alpha} = 0, \qquad \underset{k}{\nabla}_\varepsilon \overset{i}{v}{}^{\alpha} = \delta^i_k \delta^\alpha_\varepsilon. \tag{3.10}$$

Определение. Будем говорить, что линеар $\overset{i_1 \dots i_p}{\underset{j_1 \dots j_q}{T}}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\gamma_1 \dots \gamma_q}$ вдоль кривой на X_n переносится параллельно с помощью линеарной связности, если вдоль этой кривой равны нулю его первая и вторая инвариантные производные, т. е.

$$\nabla_\varepsilon \overset{i_1 \dots i_p}{\underset{j_1 \dots j_q}{T}}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\gamma_1 \dots \gamma_q} = 0, \qquad \underset{k}{\nabla}_\varepsilon \overset{i_1 \dots i_p}{\underset{j_1 \dots j_q}{T}}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\gamma_1 \dots \gamma_q} = 0.$$

Аналогично можно определить параллельное перенесение линеара вдоль кривой на X_n при помощи аффинной связности, индуцированной линеарной связностью.

Получение тождеств Риччи для линеара любой валентности в принципе ничем не отличается от случая одноиндексного линеара, поэтому получим тождества Риччи только для одноиндексного линеара.] Пусть в пространстве $L_{n,v}$ с линеарной связностью, определенной формами (2.12), дано поле линеара $\overset{i}{T}{}^{\alpha}$, инвариантные производные которого имеют вид:

$$\nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^{\alpha} = \overset{E}{\partial}_\varepsilon \overset{i}{T}{}^{\alpha} + \overset{j}{T}{}^{\gamma}\overset{i}{\underset{j}{\bar{L}}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\gamma} \tag{3.11}$$

и

$$\underset{j}{\nabla}_\varepsilon \overset{i}{T}{}^{\alpha} = \underset{j}{\partial}_\varepsilon \overset{i}{T}{}^{\alpha} + \overset{k}{T}{}^{\gamma}\overset{i}{\underset{kj}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}. \tag{3.12}$$

Дифференцируя равенства (3.11) и (3.12), в силу соотношений (2.3) и (2.14), получаем:

$$d(\nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha) - \nabla_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha \omega_\varepsilon^\gamma + \nabla_\varepsilon \overset{j}{T}{}^\gamma \underset{j}{\overset{i}{\omega}}{}_\gamma^\alpha = (\nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha)_\gamma \omega^\gamma + (\nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha_j)_\gamma \overset{j}{\Theta}{}^\gamma, \qquad (3.13)$$

$$d(\nabla_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha) - \underset{k}{\nabla}_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha \underset{j}{\overset{k}{\omega}}{}_\gamma^\varepsilon + \underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{k}{T}{}^\varepsilon \underset{k}{\overset{i}{\omega}}{}_\varepsilon^\alpha = (\underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha)_\varepsilon \omega^\varepsilon + (\underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha)_{k\varepsilon} \overset{k}{\Theta}{}^\varepsilon. \qquad (3.14)$$

Если в уравнениях (3.13) (3.14) формы ω_γ^α и $\underset{j}{\overset{i}{\omega}}{}_\gamma^\alpha$ заменить формами $\tilde{\omega}_\gamma^\alpha$ и $\underset{j}{\overset{i}{\tilde{\omega}}}{}_\gamma^\alpha$, то получим:

$$d(\nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha) - \nabla_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha \tilde{\omega}_\varepsilon^\gamma + \nabla_\varepsilon \overset{j}{T}{}^\gamma \underset{j}{\overset{i}{\tilde{\omega}}}{}_\gamma^\alpha = \nabla_\gamma (\nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha)\, \omega^\gamma + \underset{j}{\nabla}_\gamma (\nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha)\, \overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^\gamma, \qquad (3.15)$$

$$d(\underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha) - \underset{k}{\nabla}_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha \underset{j}{\overset{k}{\tilde{\omega}}}{}_\gamma^\varepsilon + \underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{k}{T}{}^\varepsilon \underset{k}{\overset{i}{\tilde{\omega}}}{}_\varepsilon^\alpha = \nabla_\varepsilon (\underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha)\, \omega^\varepsilon + \underset{k}{\nabla}_\varepsilon (\underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha)\, \overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^\varepsilon, \qquad (3.16)$$

где

$$\nabla_\gamma \nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha, \qquad \underset{j}{\nabla}_\gamma \nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha, \qquad \nabla_\varepsilon \underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha$$

и $\underset{k}{\nabla}_\varepsilon \underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha$ – вторые неголономные инвариантные производные линеара $\overset{i}{T}{}^\alpha$

Продолжение системы дифференциальных уравнений:

$$d \overset{i}{T}{}^\alpha + \overset{j}{T}{}^\gamma \underset{j}{\overset{i}{\tilde{\omega}}}{}_\gamma^\alpha = \nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha \omega^\varepsilon + \underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha \overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^\gamma$$

приводит к уравнениям:

$$d(\nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha) - \nabla_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha \tilde{\omega}_\varepsilon^\gamma + \nabla_\varepsilon \overset{j}{T}{}^\gamma \underset{j}{\overset{i}{\tilde{\omega}}}{}_\gamma^\alpha = \overset{i}{U}{}^\alpha_{\varepsilon,\gamma} \omega^\gamma + \underset{j}{\overset{i}{U}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma} \overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^\gamma, \qquad (3.17)$$

$$d(\underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha) - \underset{k}{\nabla}_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha \underset{j}{\overset{k}{\tilde{\omega}}}{}_\gamma^\varepsilon + \underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{k}{T}{}^\varepsilon \underset{k}{\overset{i}{\tilde{\omega}}}{}_\varepsilon^\alpha = \underset{j}{\overset{i}{V}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma} \omega^\varepsilon + \underset{jk}{\overset{i}{V}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon} \overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^\varepsilon, \qquad (3.18)$$

где

$$\overset{i}{U}{}^\alpha_{[\varepsilon,\gamma]} = \frac{1}{2} \overset{j}{T}{}^\sigma \underset{j}{\overset{i}{R}}{}^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma} - \nabla_\sigma \overset{i}{T}{}^\alpha R^\sigma_{\varepsilon,\ \gamma} - \frac{1}{2} \underset{j}{\nabla}_\sigma \overset{i}{T}{}^\alpha \overset{j}{R}{}^\sigma_{\varepsilon,\gamma}, \qquad (3.19)$$

$$\underset{\{jk}{\overset{i}{V}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon\}} = \frac{1}{2} \overset{l}{T}{}^\sigma \underset{ljk}{\overset{i}{S}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon} - \frac{1}{2} \underset{l}{\nabla}_\sigma \overset{i}{T}{}^\alpha \underset{jk}{\overset{l}{S}}{}^\sigma_{\gamma\varepsilon}, \qquad (3.20)$$

$$\underset{j}{\overset{i}{V}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma} - \underset{j}{\overset{i}{U}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma} = \overset{k}{T}{}^\sigma \underset{kj}{\overset{i}{P}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon} + \nabla_\sigma \overset{i}{T}{}^\alpha \underset{j}{C}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma} - \underset{k}{\nabla}_\sigma \overset{i}{T}{}^\alpha \overset{k}{P}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma}. \qquad (3.21)$$

Так как левые части уравнений (3.15), (3.16) и (3.17), (3.18) одинаковые, то

$$\overset{i}{U}{}^\alpha_{\varepsilon,\gamma} = \nabla_\gamma \nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha, \qquad \underset{j}{\overset{i}{U}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma} = \underset{j}{\nabla}_\gamma \nabla_\varepsilon \overset{i}{T}{}^\alpha, \qquad \underset{j}{\overset{i}{V}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma} = \nabla_\varepsilon \underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha,$$

$$\underset{jk}{\overset{i}{V}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon} = \underset{k}{\nabla}_\varepsilon \underset{j}{\nabla}_\gamma \overset{i}{T}{}^\alpha,$$

и соотношения (3.19) – (3.21) являются обобщенными тождествами Риччи для вторых инвариантных неголономных производных линеара $\overset{i}{T}{}^\alpha$. Эти тождества имеют вид:

а) первая группа –

$$2\nabla_{[\gamma}\nabla_{\varepsilon]}\overset{i}{T}{}^\alpha=\overset{j}{T}{}^\sigma\underset{j}{\overset{i}{R}}{}^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma}-2\nabla_\sigma\overset{i}{T}{}^\alpha R^\sigma_{\varepsilon\gamma}-\underset{j}{\nabla}_\sigma\overset{i}{T}{}^\alpha\overset{j}{R}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma},\tag{3.22}$$

б) вторая группа –

$$2\underset{\{k}{\nabla}_\varepsilon\underset{j}{\nabla}_{\gamma\}}\overset{i}{T}{}^\alpha=\overset{l}{T}{}^\sigma\underset{ljk}{\overset{i}{S}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}-\underset{l}{\nabla}_\sigma\overset{i}{T}{}^\alpha\underset{jk}{\overset{j}{S}}{}^\sigma_{\gamma\varepsilon},\tag{3.23}$$

в) третья группа –

$$\nabla_\varepsilon\underset{j}{\nabla}_\gamma\overset{i}{T}{}^\alpha-\underset{j}{\nabla}_\gamma\nabla_\varepsilon\overset{i}{T}{}^\alpha=\overset{k}{T}{}^\sigma\underset{kj}{\overset{i}{P}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}-\nabla_\sigma\overset{l}{T}{}^\alpha\underset{j}{C}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma}-\underset{k}{\nabla}_\sigma\overset{i}{T}{}^\alpha\underset{j}{\overset{k}{P}}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma}.\tag{3.24}$$

Уравнения (3.22) – (3.24) можно переписать в другом виде, подставляя в них значение второй инвариантной производной из (3.12):

$$2\nabla_{[\gamma}\nabla_{\varepsilon]}\overset{i}{T}{}^\alpha=\overset{j}{T}{}^\sigma\underset{j}{\overset{i}{K}}{}^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma}-\nabla_\sigma\overset{i}{T}{}^\sigma R^\sigma_{\varepsilon,\gamma}-\underset{j}{\partial}_\sigma\overset{i}{T}{}^\sigma\overset{j}{R}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma},\tag{3.25}$$

$$2\underset{\{k}{\nabla}_\varepsilon\underset{j}{\nabla}_{\gamma\}}\overset{i}{T}{}^\alpha=\overset{l}{T}{}^\sigma\underset{ljk}{\overset{i}{\sigma}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}-\underset{l}{\partial}_\sigma\overset{i}{T}{}^\alpha\underset{jk}{\overset{l}{S}}{}^\sigma_{\gamma\varepsilon},\tag{3.26}$$

$$\nabla_\varepsilon\underset{j}{\nabla}_\gamma\overset{i}{T}{}^\alpha-\underset{j}{\nabla}_\gamma\nabla_\varepsilon\overset{i}{T}{}^\alpha=\overset{k}{T}{}^\sigma\underset{kj}{\overset{i}{Q}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}-\nabla_\sigma\overset{i}{T}{}^\alpha C^\sigma_{\varepsilon\gamma}-\underset{k}{\partial}_\sigma\overset{i}{T}{}^\alpha\underset{j}{\overset{k}{P}}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma},\tag{3.27}$$

где

$$\underset{j}{\overset{i}{K}}{}^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma}=\underset{j}{\overset{i}{R}}{}^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma}-\underset{jk}{\overset{i}{C}}{}^\alpha_{\sigma\tau}\overset{k}{R}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma},\tag{3.28}$$

$$\underset{ljk}{\overset{i}{\sigma}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}=\underset{ljk}{\overset{i}{S}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}-\underset{lp}{\overset{i}{C}}{}^\alpha_{\sigma\tau}\underset{jk}{\overset{p}{S}}{}^\tau_{\gamma\varepsilon},\tag{3.29}$$

$$\underset{kj}{\overset{i}{Q}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}=\underset{kj}{\overset{i}{P}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}-\underset{kp}{\overset{i}{C}}{}^\alpha_{\sigma\tau}\underset{j}{\overset{p}{P}}{}^\tau_{\varepsilon\gamma}.\tag{3.30}$$

Величины $\underset{j}{\overset{i}{K}}{}^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma}$, $\underset{ljk}{\overset{i}{\sigma}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}$ и $\underset{kj}{\overset{i}{Q}}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}$ будем называть соответственно первым, вторым и третьим линеарами кривизны линеарной связности.

Аналогично можно получить тождества Риччи для инвариантных производных $\mathring{\nabla}$. Они имеют вид:

а) первая группа –

$$2\mathring{\nabla}_{[\gamma}\mathring{\nabla}_{\varepsilon]}\overset{i}{T}{}^\alpha=\overset{l}{T}{}^\sigma R^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma}+c^i_k\overset{k}{T}{}^\alpha R^\sigma_{\varepsilon\sigma\gamma}-\mathring{\nabla}_\sigma\overset{l}{T}{}^\alpha R^\sigma_{\varepsilon\gamma}-\underset{j}{\mathring{\nabla}}_\sigma\overset{i}{T}{}^\alpha\overset{j}{R}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma},\tag{3.31}$$

б) вторая группа –

$$2\underset{\{k}{\mathring{\nabla}}{}^{\varepsilon}\underset{j}{\mathring{\nabla}}_{\gamma\}}\overset{l}{T}{}^\alpha=\overset{l}{T}{}^\sigma\underset{jk}{S}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}+c^l_l\overset{l}{T}{}^\alpha\underset{jk}{S}{}^\sigma_{\sigma\gamma\varepsilon}-\underset{l}{\mathring{\nabla}}_\sigma\overset{l}{T}{}^\alpha\underset{jk}{\overset{l}{S}}{}^\sigma_{\gamma\varepsilon},\tag{3.32}$$

в) третья группа —

$$\nabla_\varepsilon \nabla_\gamma \underset{j}{\overset{i}{T}}{}^\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\varepsilon \underset{j}{\overset{i}{T}}{}^\alpha = \overset{i}{T}{}^\sigma \underset{j}{P}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon} + c^i_k \overset{k}{T}{}^\alpha \underset{j}{P}{}^\sigma_{\sigma\gamma\varepsilon} -$$

$$- \mathring{\nabla}_\sigma \overset{i}{T}{}^\alpha \underset{j}{C}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma} - \underset{k}{\mathring{\nabla}_\sigma} \overset{i}{T}{}^\alpha \underset{j}{\overset{k}{P}}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma}. \tag{3.33}$$

Подставляя в (3.31)—(3.33) значение $\mathring{\nabla}_\gamma \underset{j}{\overset{i}{T}}{}^\alpha$, получаем:

$$2\mathring{\nabla}_{[\gamma}\mathring{\nabla}_{\varepsilon]} \overset{i}{T}{}^\alpha = \overset{i}{T}{}^\sigma K^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma} + c^i_k \overset{k}{T}{}^\alpha K^\sigma_{\varepsilon\sigma\gamma} - \mathring{\nabla}_\sigma \overset{i}{T}{}^\alpha R^\sigma_{\varepsilon\gamma} - \underset{j}{\partial_\sigma} \overset{i}{T}{}^\alpha \overset{j}{R}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma}, \tag{3.34}$$

$$2 \underset{\{k}{\mathring{\nabla}_\varepsilon} \underset{j\}}{\mathring{\nabla}_\gamma} \overset{i}{T}{}^\alpha = \overset{i}{T}{}^\sigma \underset{ik}{\sigma}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon} + c^i_j \overset{l}{T}{}^\alpha \underset{jk}{\sigma}{}^\sigma_{\sigma\gamma\varepsilon} - \underset{l}{\partial_\sigma} \overset{i}{T}{}^\alpha \underset{jk}{\overset{l}{S}}{}^\sigma_{\gamma\varepsilon}, \tag{3.35}$$

$$\mathring{\nabla}_\varepsilon \mathring{\nabla}_\gamma \underset{j}{\overset{i}{T}}{}^\alpha - \mathring{\nabla}_\gamma \mathring{\nabla}_\varepsilon \underset{j}{\overset{i}{T}}{}^\alpha = \overset{i}{T}{}^\sigma \underset{j}{Q}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon} + c^i_k \overset{k}{T}{}^\sigma \underset{j}{Q}{}^\sigma_{\sigma\gamma\varepsilon} -$$

$$- \mathring{\nabla}_\sigma \overset{i}{T}{}^\alpha \underset{j}{C}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma} - \underset{k}{\partial_\sigma} \overset{i}{T}{}^\alpha \overset{k}{P}{}^\sigma_{\varepsilon\gamma}, \tag{3.36}$$

где

$$K^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma} = R^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma} - C^\alpha_{\sigma\tau} \overset{j}{R}{}^\tau_{\varepsilon\gamma}, \tag{3.37}$$

$$\underset{jk}{\sigma}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon} = \underset{jk}{S}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon} - \underset{l}{C}{}^\alpha_{\sigma\tau} \underset{jk}{\overset{l}{S}}{}^\tau_{\gamma\varepsilon}, \tag{3.38}$$

$$\underset{j}{Q}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon} = \underset{j}{P}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon} - \underset{l}{C}{}^\alpha_{\sigma\tau} \underset{j}{\overset{l}{P}}{}^\tau_{\varepsilon\gamma}. \tag{3.39}$$

Из (2.32) и (3.37) следует, что:

$$K^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma} = 2\,(\overset{E}{\partial}_{[\gamma} L^\alpha_{\varepsilon]\sigma} - L^\sigma_{[\varepsilon|\tau|} L^\tau_{\gamma]\sigma}). \tag{3.40}$$

Уравнения (3.28), в силу (2.19) и (2.25), можно записать в виде:

$$\underset{j}{\overset{i}{K}}{}^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma} = \delta^i_j K^\alpha_{\varepsilon\sigma\gamma} + c^i_j \delta^\alpha_\sigma K^\sigma_{\varepsilon:\gamma} + 2\,(\mathring{\nabla}_{[\gamma} \underset{|j|}{\overset{i}{N}}{}^\alpha_{\varepsilon]\sigma} -$$

$$- \underset{j}{\overset{k}{N}}{}^\tau_{[\gamma|\sigma|} \underset{|k|}{\overset{i}{N}}{}^\alpha_{\varepsilon]\tau}) + R^\rho_{\varepsilon\gamma} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^\alpha_{\rho\sigma}. \tag{3.41}$$

Подобные соотношения можно получить и для $\underset{jk}{\sigma}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}$, $\underset{j}{Q}{}^\alpha_{\sigma\gamma\varepsilon}$.

§ 4. Тождества Бианки

Тождества, которые являются аналогами тождеств Бианки, мы получим, дифференцируя внешним образом уравнения (2.21)—(2.23). Они имеют вид:

$$D\Omega^\alpha = \tilde{\omega}^\alpha_\varepsilon \wedge \Omega^\varepsilon + \omega^\varepsilon \wedge \Omega^\alpha_\varepsilon, \tag{4.1}$$

$$D\underset{j}{\overset{i}{\Omega}}{}^\alpha_\gamma = \underset{k}{\overset{i}{\tilde{\omega}}}{}^\alpha_\varepsilon \wedge \underset{j}{\overset{k}{\Omega}}{}^\varepsilon_\gamma + \underset{j}{\overset{k}{\tilde{\omega}}}{}^\varepsilon_\gamma \wedge \underset{k}{\overset{i}{\Omega}}{}^\alpha_\varepsilon, \tag{4.2}$$

$$D\overset{i}{\Omega}{}^\alpha = \underset{k}{\overset{i}{\tilde{\omega}}}{}^\alpha_\gamma \wedge \overset{k}{\Omega}{}^\gamma + \overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^\gamma \wedge \underset{k}{\overset{i}{\Omega}}{}^\alpha_\gamma, \tag{4.3}$$

где

$$\Omega^\alpha = \frac{1}{2} R^\alpha_{\gamma\varepsilon}\,\omega^\varepsilon \wedge \omega^\gamma + C^\alpha_{\gamma\varepsilon}\,\overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^\varepsilon \wedge \omega^\gamma, \tag{4.4}$$

$$\overset{i}{\underset{j}{\Omega}}{}^\alpha_\gamma = \frac{1}{2} \overset{i}{\underset{j}{R}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma\tau}\,\omega^\tau \wedge \omega^\varepsilon + \overset{i}{\underset{jk}{P}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon\tau}\,\omega^\tau \wedge \overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^\varepsilon + \frac{1}{2} \overset{i}{\underset{jkl}{S}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon\tau}\,\overset{l}{\tilde{\Theta}}{}^\tau \wedge \overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^\varepsilon, \tag{4.5}$$

$$\overset{i}{\Omega}{}^\alpha = \frac{1}{2} \overset{i}{R}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon}\,\omega^\varepsilon \wedge \omega^\gamma + \overset{i}{\underset{j}{P}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon}\,\omega^\gamma \wedge \overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^\varepsilon + \frac{1}{2} \overset{i}{\underset{jk}{S}}{}^\alpha_{\varepsilon\gamma}\,\overset{k}{\tilde{\Theta}}{}^\gamma \wedge \overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^\varepsilon, \tag{4.6}$$

причем

$$\Omega^\alpha_\varepsilon = \frac{1}{N}\left(\overset{i}{\underset{i}{\Omega}}{}^\alpha_\varepsilon - \frac{c\delta^\alpha_\varepsilon}{N+cn}\,\overset{i}{\underset{i}{\Omega}}{}^\gamma_\gamma \right). \tag{4.5'}$$

В равенствах (4.1) выполнив вычисления, подставляя выражения форм Ω^α из (4.4), Ω^α_γ из (4.5′), $\tilde{\omega}^\alpha_\varepsilon$ — из (2.16), разложив полученный результат по независимым внешним кубическим формам $\omega^\alpha \wedge \omega^\beta \wedge \omega^\gamma$, $\omega^\alpha \wedge \omega^\beta \wedge \overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^\gamma$, $\omega^\alpha \wedge \overset{i}{\tilde{\Theta}}{}^\beta \wedge \overset{j}{\tilde{\Theta}}{}^\gamma$ и приравнивая нулю коэффициенты при этих формах, получим следующие соотношения:

$$\frac{1}{2} R^\alpha_{[\beta\gamma\varepsilon]} + \mathring{\nabla}_{[\beta} R^\alpha_{\gamma\varepsilon]} - 2 R^\alpha_{\sigma[\beta} R^\sigma_{\gamma\varepsilon]} + \underset{j}{C}{}^\alpha_{[\beta|\sigma|} \overset{j}{R}{}^\sigma_{\gamma\varepsilon]} = 0, \tag{4.7}$$

$$\underset{j}{P}{}^\alpha_{[\gamma|\varepsilon|\tau]} + \underset{j}{\mathring{\nabla}}_\varepsilon R^\alpha_{\gamma\tau} + \nabla_{[\gamma} \underset{|j|}{C}{}^\alpha_{\tau]\varepsilon} - \underset{k}{C}{}^\alpha_{[\gamma|\sigma|} \overset{k}{\underset{|j|}{P}}{}^\sigma_{\tau]\varepsilon} - \underset{j}{C}{}^\alpha_{\sigma\varepsilon} R^\sigma_{\gamma\tau} = 0, \tag{4.8}$$

$$\underset{\{k}{\nabla}_\beta \underset{j\cdot\cdot}{C}{}^\alpha_{|\gamma|\sigma\}} + \frac{1}{2} \underset{l}{C}{}^\alpha_{\gamma\tau} \overset{l}{\underset{jk}{S}}{}^\tau_{\sigma\beta} - \underset{\{k}{C}{}^\alpha_{|\tau|\beta} \underset{|j|}{C}{}^\tau_{|\gamma|\sigma\}} - \frac{1}{2} \underset{jk}{S}{}^\alpha_{|\gamma|\bar{\sigma\beta}} = 0. \tag{4.9}$$

В равенства (4.7) вместо $R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}$ подставляя его выражение через $K^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}$, получаем:

$$K^\alpha_{[\beta\gamma\varepsilon]} + 2\,(\mathring{\nabla}_{[\beta} R^\alpha_{\gamma\varepsilon]} - 2 R^\alpha_{\sigma[\beta} R^\sigma_{\gamma\varepsilon]}) = 0\,. \tag{4.10}$$

Если аффинная связность без кручения, то тождество (4.10) получает такой же вид, как и в случае точечных пространств аффинной связности, т. е:

$$\mathrm{K}^\alpha_{[\beta\gamma\varepsilon]} = 0. \tag{4.11}$$

Выполнив аналогичные вычисления, из (4.2) получаем:

$$\nabla_{[\sigma} \overset{i}{\underset{|j|}{R}}{}^\alpha_{\tau|\gamma|\varepsilon]} + 2 \overset{i}{\underset{j}{R}}{}^\alpha_{[\tau|\gamma\rho|} R^\rho_{\varepsilon\sigma]} - \overset{i}{\underset{jk}{P}}{}^\alpha_{\gamma\rho[\tau} \overset{k}{R}{}^\rho_{\varepsilon\sigma]} = 0, \tag{4.12}$$

$$\underset{k}{\nabla}_\sigma \overset{i}{\underset{j}{R}}{}^\alpha_{\tau\gamma\varepsilon} + \overset{i}{\underset{j}{R}}{}_{[\tau}{}^\alpha{}_{|\gamma\rho|} \underset{|k|}{C}{}^\rho_{\varepsilon]\sigma} + 2\nabla_{[\varepsilon} \overset{i}{\underset{|jk}{P}}{}^\alpha_{\gamma\sigma|\tau]} + 2 \overset{i}{\underset{jk}{P}}{}^\alpha_{\gamma\sigma\rho} R^\rho_{\tau\varepsilon} +$$

$$+ 2 \overset{i}{\underset{jl}{P}}{}^\alpha_{\gamma\rho[\tau} \overset{l}{\underset{|k|}{P}}{}^\rho_{\varepsilon]\sigma} + \overset{i}{\underset{jkl}{P}}{}^\alpha_{\gamma\sigma\rho} \overset{l}{R}{}^\rho_{\tau\sigma} = 0, \tag{4.13}$$

$$\underset{\{p}{\nabla}_\sigma \overset{i}{\underset{jk}{P}}{}^\alpha_{|\gamma|\varepsilon\}\tau} + \overset{i}{\underset{l\{k}{P}}{}^\alpha_{|\gamma|\varepsilon|\rho|} \underset{p}{C}{}^\rho_{|\tau|\sigma\}} + \frac{1}{2} \overset{i}{\underset{jq}{P}}{}^\alpha_{\gamma\rho\tau} \overset{q}{\underset{kp}{S}}{}^\rho_{\varepsilon\sigma} -$$

$$- \overset{i}{\underset{j\{k\,|q}{S}}{}^\alpha{}_{\gamma|\varepsilon|\rho|} \overset{q}{\underset{p}{P}}{}^\rho_{|\tau|\sigma\}} - \frac{1}{2} \nabla_\tau \overset{i}{\underset{jkp}{S}}{}^\alpha_{\gamma\varepsilon\sigma} = 0, \tag{4.14}$$

$$\underset{\{p}{\nabla}_\sigma \overset{i}{\underset{|j|kl}{S}}{}^\alpha_{|\gamma|\varepsilon\tau\}} + \overset{i}{\underset{j\{k|q|}{S}}{}^\alpha_{|\gamma|\varepsilon|\mu|} \overset{q}{\underset{lp}{S}}{}^\mu_{\tau\sigma\}} = 0. \tag{4.15}$$

Из (4.3), в силу (4.5), (4.6) следуют тождества:

$$\nabla_{[\sigma}\overset{l}{R}{}^{\alpha}_{\tau\varepsilon]}+2\overset{i}{R}{}^{\alpha}_{[\tau|\rho|}R^{\rho}_{\varepsilon\sigma]}-\overset{l}{\underset{k}{P}}{}^{\alpha}_{[\tau|\rho|}\overset{k}{R}{}^{\rho}_{\varepsilon\sigma]}=0, \tag{4.16}$$

$$\frac{1}{2}\underset{k}{\nabla}_{\sigma}\overset{l}{R}{}^{\alpha}_{\tau\varepsilon}+\frac{1}{2}\overset{l}{R}{}^{\alpha}_{[\tau|\rho|}\underset{|k|}{C}{}^{\rho}_{\varepsilon]\sigma}+\nabla_{[\varepsilon}\overset{l}{\underset{|k|}{P}}{}^{\alpha}_{\tau]\sigma}+\overset{l}{\underset{k}{P}}{}^{\alpha}_{\rho\sigma}R^{\rho}_{\tau\varepsilon}+$$

$$+\overset{l}{\underset{l}{P}}{}^{\alpha}_{[\tau|\rho|}\overset{l}{\underset{|k|}{P}}{}^{\rho}_{\varepsilon]\sigma}+\frac{1}{2}\overset{i}{\underset{kl}{S}}{}^{\alpha}_{\sigma\rho}\overset{l}{R}{}^{\rho}_{\tau\varepsilon}-\frac{1}{2}\overset{l}{\underset{k}{R}}{}^{\alpha}_{\tau\sigma\varepsilon}=0, \tag{4.17}$$

$$\underset{\{p}{\nabla}_{\sigma}\overset{i}{\underset{k}{P}}{}^{\alpha}_{|\tau|\varepsilon\}}+\overset{l}{\underset{\{k}{P}}{}^{\alpha}_{|\rho|\varepsilon}\underset{p}{C}{}^{\rho}_{|\tau|\sigma\}}+\frac{1}{2}\overset{l}{\underset{l}{P}}{}^{\alpha}_{\tau\mu}\overset{l}{\underset{kp}{S}}{}^{\mu}_{\varepsilon\sigma}-\overset{i}{\underset{\{k|l|}{S}}{}^{\alpha}_{\varepsilon|\rho|}\overset{l}{\underset{p}{P}}{}^{\rho}_{|\tau|\sigma\}}-$$

$$\frac{1}{2}\nabla_{\tau}\overset{l}{\underset{kp}{S}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\sigma}-\overset{l}{\underset{kp}{P}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\sigma\tau}=0, \tag{4.18}$$

$$\underset{\{p}{\nabla}_{\sigma}\overset{i}{\underset{kl}{S}}{}^{\alpha}_{\varepsilon\tau\}}+\overset{i}{\underset{\{k|q|}{S}}{}^{\alpha}_{\varepsilon|\rho|}\overset{q}{\underset{lp}{S}}{}^{\rho}_{\tau\sigma\}}-\overset{i}{\underset{pkl}{S}}{}^{\alpha}_{\sigma\varepsilon\tau}=0. \tag{4.19}$$

§ 5. Нормальные координаты

Будем рассматривать пространство опорных линеаров с общей линеарной связностью, определенной формами (2.12).

Определение 1. Однопараметрическое семейство элементов

$$\begin{cases} x^{\alpha}=x^{\alpha}(t), \\ \overset{i}{v}{}^{\alpha}=\overset{i}{v}{}^{\alpha}(t) \end{cases} \tag{5.1}$$

в пространстве $L_{n,\nu}$ с общей линеарной связностью будем называть параметризованной кривой.

Определение 2. Кривые σ назовем путями, если вдоль них касательный вектор $\frac{dx^{\alpha}}{dt}$ переносится параллельно при помощи связности индуцированной линеарной связностью, при условии параллельного переноса опорного линеара $\overset{i}{v}{}^{\alpha}$ в смысле общей линеарной связности.

Уравнения, характеризующие пути, имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2}+L^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\frac{dx^{\varepsilon}}{dt}\frac{dx^{\gamma}}{dt}=0, \\ \frac{d\overset{i}{v}{}^{\alpha}}{dt}+\overset{i}{E}{}^{\alpha}_{\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{dt}=0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Форма уравнений путей (5.2) инвариантна относительно линейного преобразования параметра $t=a\bar{t}+b$ (a, b — константы).

При определенных условиях, наложенных на функции $\overset{i}{\underset{j}{\bar{L}}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ (мы предполагаем их выполненными в некоторой области пространства опорных линеаров), для каждого элемента $(a^{\alpha}, \overset{i}{p}{}^{\gamma})$ существует в этой области, и притом единственный, путь, удовлетворяющий следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} &(x^{\alpha})_{t=0}=a^{\alpha}, \\ &(\overset{i}{v}{}^{\alpha})_{t=0}=\overset{i}{p}{}^{\alpha}, \\ &\left(\frac{dx^{\alpha}}{dt}\right)_{t=0}=b^{\alpha}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Это утверждение следует из общей теоремы Коши – Ковалевской о существовании решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение системы (5.2), удовлетворяющее условиям (5.3), можно получить в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням t. Для этого будем дифференцировать (5.2) последовательно по t. Получается последовательность уравнений, которым будет удовлетворять любое решение системы (5.2):

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^3x^\alpha}{dt^3}+L^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt}\frac{dx^\varepsilon}{dt}=0,\\ \frac{d^4x^\alpha}{dt^4}+L^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon\tau}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt}\frac{dx^\varepsilon}{dt}\frac{dx^\tau}{dt}=0,\\ \qquad\cdots\\ \frac{d^ax^\alpha}{dt^a}+L^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a}\frac{dx^{\beta_1}}{dt}\cdots\frac{dx^{\beta_a}}{dt}=0,\\ \frac{d^2\overset{i}{v}{}^\alpha}{dt^2}+\overset{i}{E}{}^\alpha_{\beta_1\beta_2}\frac{dx^{\beta_1}}{dt}\frac{dx^{\beta_2}}{dt}=0,\\ \qquad\cdots\\ \frac{d^b\overset{i}{v}{}^\alpha}{dt^b}+\overset{i}{E}{}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_b}\frac{dx^{\beta_1}}{dt}\cdots\frac{dx^{\beta_b}}{dt}=0, \end{array}\right. \tag{5.4}$$

где

$$L^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_{a+1}}=\overset{E}{\partial}_{(\beta_1}L^\alpha_{\beta_2\ldots\beta_{a+1})}-aL^\alpha_{\gamma(\beta_1\ldots\beta_{a-1}}L^\gamma_{\beta_a\beta_{a+1})}-\underset{i}{\partial}_\gamma L^\alpha_{(\beta_1\ldots\beta_a}\overset{i}{E}{}^\gamma_{\beta_{a+1})}$$
$$(a=2,\ 3,\ \ldots), \tag{5.5}$$

$$\overset{i}{E}{}^\gamma_{\beta_1\ldots\beta_{b+1}}=\overset{E}{\partial}_{(\beta_1}\overset{i}{E}{}^\gamma_{\beta_2\ldots\beta_{b+1})}-b\overset{i}{E}{}^\gamma_{\varepsilon(\beta_1\ldots\beta_{b-1}}L^\varepsilon_{\beta_b\beta_{b+1})}-\underset{j}{\partial}_\varepsilon\overset{i}{E}{}^\gamma_{(\beta_1\ldots\beta_b}\overset{j}{E}{}^\varepsilon_{\beta_{b+1})}$$
$$(b=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{5.6}$$

Используя начальные условия (5.3) и продолжения путей (5.4), решение системы (5.2) получаем в виде:

$$x^\alpha=a^\alpha+b^\alpha t-\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s!}[\overset{\circ}{L}{}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}b^{\beta_1}\ldots b^{\beta_s}]t^s,$$

$$\overset{i}{v}{}^\alpha=\overset{i}{p}{}^\alpha-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}(\overset{\circ i}{E}{}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}b^{\beta_1}\ldots b^{\beta_s})t^s, \tag{5.7}$$

где

$$\overset{\circ}{L}{}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}=L^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}|_{t=0},$$

$$\overset{\circ i}{E}{}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}=\overset{j}{E}_{\beta_1\ldots\beta_s}|_{t=0}.$$

Если выполнить преобразование координат $x\to y$, определенное формулами

$$x^\alpha=a^\alpha+y^\alpha-\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s!}\overset{\circ}{L}{}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_s}y^{\beta_1}\ldots y^{\beta_s}, \tag{5.8}$$

то в новой системе координат (y) уравнения (5.7), удовлетворяющие начальным условиям (5.3), примут вид:

$$y^\alpha=b^\alpha t. \tag{5.9}$$

Определение 3. Система координат (y) называется нормальной системой координат, соответствующей данной системе координат (x) и данному элементу $(a^\alpha, \overset{i}{p}{}^\gamma)$, если в этой системе координат уравнения путей (σ), проходящих при $t=0$ через данный элемент $(a^\alpha, \overset{i}{p}{}^\gamma)$, имеют вид (5.9), где b^α не равны одновременно нулю, и если

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right)_0 = \delta^\alpha_\beta. \tag{5.10}$$

В пространстве опорных линеаров нормальные координаты имеют свойства, аналогичные свойствам в точечных пространствах аффинной связности (см. [3]) и в пространствах опорных тензорных элементов аффинной ссвязности (см. [5]).

§ 6. Расширения. Нормальные тензоры

Определение 4. Первым расширением дифференциально-геометрического объекта $\Omega^a(x, v)$ назовем величину, полученную при помощи следующей операции:

$$(\Omega^a_{,\alpha})_a = (\check{\Omega},^a_\alpha - \underset{j}{\partial_\sigma}\check{\Omega}^a \overset{j}{\check{E}}{}^\sigma_\alpha)_0. \tag{6.1}$$

Значек „ ˇ “ показывает, что компоненты объекта рассматриваются в нормальной системе координат, а значек a — что рассматривается значение дифференциально-геометрического объекта, вычисленное в элементе $(a^\alpha, \overset{i}{p}{}^\gamma)$. Используя базисную производную, равенство (6.1) можно записать в виде:

$$(\Omega^a_{,\alpha})_a = (\overset{E}{\partial}_\alpha \check{\Omega}^a)_0. \tag{6.1'}$$

Определение 5. k-ую базисную производную от компонент дифференциально-геометрического объекта в нормальной системе координат (y), вычисленную в точке, которой эта система соответствует, будем называть компонентами в системе (x) k-го нормального расширения объекта Ω^a в этой точке и обозначим

$$(\Omega^a_{,\alpha_1 \ldots \alpha_k})_a = (\overset{E}{\partial}_{\alpha_k} \ldots \overset{E}{\partial}_{\alpha_1} \check{\Omega}^a)_0. \tag{6.2}$$

Следует отметить, что компоненты расширения не симметричны по индексам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

А. П. Урбонас [8] показал, что в пространстве опорных элементов k-ое расширение тензора является тензором. Аналогично можно показать, что в пространстве опорных линеаров k-ое расширение линеара является линеаром, ибо в начальном элементе нормальных координат линеар превращается в систему тензоров. Легко показать, что k-ое расширение объекта аффинной (проективной) связности является тензором, а k-ое расширение объекта линеарной связности — линеаром.

Определение 6. Нормальным тензором k-го порядка назовем k-ое расширение дифференциально-геометрического объекта $\mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma} \equiv L^\alpha_{(\beta\gamma)}$ и обозначим

$$A^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k} = \mathcal{L}^\alpha_{\beta\gamma,\ldots\varepsilon_1} \tag{6.3}$$

Теорема 1. *В нормальной системе координат, соответствующей некоторому опорному элементу, коэффициенты связности $\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ обращаются в этом элементе в нуль.*

Действительно, в нормальной системе координат первая группа уравнений путей примет вид:

$$\frac{d^2y^\alpha}{dt^2}+\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dy^\beta}{dt}\frac{dy^\gamma}{dt}=0. \tag{6.4}$$

Решение этой системы уравнений, проходящее через точку $(a^\alpha, \overset{i}{p}{}^\gamma)$, должно иметь вид:

$$y^\alpha=b^\alpha t. \tag{6.5}$$

Подставляя из (6.5) значение y^α в (6.4), вдоль пути получим уравнение

$$\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma}b^\beta b^\gamma=0. \tag{6.6}$$

В виду произвольности b^α в точке $(a^\alpha, \overset{i}{p}{}^\gamma)$, имеем:

$$(\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0=0. \tag{6.7}$$

Важным следствием (6.7) является совпадение в случае аффинной связности без кручения (чтобы аффинная связность, полученная из линеарной, была без кручения, на коэффициенты $\underset{j}{\overset{i}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$ накладываются требования, которые мы предполагаем выполненными) первой инвариантной производной, определенной при помощи этой связности, линеара (тензора) с его первым расширением.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Нормальные тензоры полностью определяют $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$.*

Действительно, разложив $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ в ряд вблизи точки $t=0$, имеем:

$$\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma}=(\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0+\left\{(\partial_{\alpha_1}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0y^{\alpha_1}+(\underset{i}{\partial}_{\alpha_1}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0\right\}\Delta\overset{i}{v}{}^{\alpha_1}\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2!}\left\{(\partial_{\alpha_1\alpha_2}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0\,y^{\alpha_1}y^{\alpha_2}+2\,(\underset{i}{\partial}_{\alpha_2}\partial_{\alpha_1}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0\,y^{\alpha_1}\Delta\overset{i}{v}{}^{\alpha_2}+\right.$$

$$\left.+(\underset{i}{\partial}_{\alpha_1}\underset{j}{\partial}_{\alpha_2}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0\,\Delta\overset{i}{v}{}^{\alpha_1}\Delta\overset{j}{v}{}^{\alpha_2}\right\}+\frac{1}{3!}\left\{(\partial_{\alpha_3}\partial_{\alpha_2}\partial_{\alpha_1}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0\,y^{\alpha_3}y^{\alpha_2}y^{\alpha_1}+\right.$$

$$+3\,(\underset{i}{\partial}_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\partial_{\alpha_3}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0\,y^{\alpha_2}y^{\alpha_3}\Delta\overset{i}{v}{}^{\alpha_1}+3\,(\underset{i}{\partial}_{\alpha_1}\underset{j}{\partial}_{\alpha_2}\partial_{\alpha_3}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0\,y^{\alpha_3}\Delta\overset{i}{v}{}^{\alpha_1}\Delta\overset{j}{v}{}^{\alpha_2}+$$

$$\left.+(\underset{i}{\partial}_{\alpha_1}\underset{j}{\partial}_{\alpha_2}\underset{k}{\partial}_{\alpha_3}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0\,\Delta\overset{i}{v}{}^{\alpha_1}\Delta\overset{j}{v}{}^{\alpha_2}\Delta\overset{k}{v}{}^{\alpha_3}\right\}+ \tag{6.9}$$

где

$$\Delta\overset{i}{v}{}^{\alpha}=\overset{i}{v}{}^{\alpha}-\overset{i}{p}{}^{\alpha},$$

$$\partial_{\alpha_k}\qquad\partial_{\alpha_1}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}=\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma,\,\alpha_1\alpha_2}\;\dots$$

Подставляя в (6.9) значение $\Delta \overset{i}{v}{}^{\alpha}$, найденное из (5.7), получаем:

$$\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \{(\partial_{\alpha_1} \breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0 - (\underset{i}{\partial}_{\beta_1} \breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma} \overset{i}{\breve{E}}{}^{\beta_1}_{\alpha_1})_0\} y^{\alpha_1} + \frac{1}{2!} \{(\partial_{\alpha_2} \partial_{\alpha_1} \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma})_0 -$$

$$- 2 (\partial_{\alpha_1} \underset{i}{\partial}_{\beta_2} \breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma} \overset{i}{\breve{E}}{}^{\beta_2}_{\alpha_2})_0 - (\underset{i}{\partial}_{\beta_1} \breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma} \overset{i}{\breve{E}}{}^{\beta_1}_{\alpha_1 \alpha_2})_0 +$$

$$+ (\underset{i}{\partial}_{\beta_1} \underset{j}{\partial}_{\beta_2} \breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma} \overset{i}{\breve{E}}{}^{\beta_1}_{\alpha_1} \overset{j}{\breve{E}}{}^{\beta_2}_{\alpha_2})_0\} y^{\alpha_1} y^{\alpha_2} + \tag{6.10}$$

Если воспользоваться определением нормальных тензорөв, то ряд (6.10) можно записать в форме:

$$\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma} = (A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon})_0 y^{\varepsilon} + \frac{1}{2!} (A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2})_0 y^{\varepsilon_1} y^{\varepsilon_2} +$$

$$+ \frac{1}{3!} (A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3})_0 y^{\varepsilon_1} y^{\varepsilon_2} y^{\varepsilon_3} + \tag{6.11}$$

Таким образом, коэффициенты аффинной связности $\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ будут вдоль, путей определены, если в начальном опорном элементе нормальной системы координат заданы значения тензоров

$$A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon_1}, \qquad A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2}, \qquad A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3},$$

таких, чтобы ряд (6.11) сходился и удовлетворялись тождества, которые получаются приравниванием нулю коэффициентов при произведениях y-ков если разложение $\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ из (6.11) внести в соотношение

$$\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma} y^{\beta} y^{\gamma} = 0, \tag{6.12}$$

полученное из (6.5) и (6.6). Получается следующая последовательность тождеств для нормальных тензоров:

$$A^{\alpha}_{(\beta\gamma\varepsilon_1)} = A^{\alpha}_{(\beta\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2)} = \qquad = A^{\alpha}_{(\beta\gamma\varepsilon_1 \qquad \varepsilon_k)} = \qquad 0. \tag{6.13}$$

Кроме того, из определения нормальных тензоров видно, что:

$$A^{\alpha}_{[\beta\gamma]\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k} = 0$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \qquad (6.14$$

§ 7. О дифференциальных инвариантах пространств опорных линеаров линеарной связности

1. Теорема о замене

Введем следующие обозначения:

а) оператор $\overset{E}{\partial}_{\varepsilon_k} \qquad \overset{E}{\partial}_{\varepsilon_1}$ обозначим через $\overset{E}{\partial}_{\varepsilon k}$

б) оператор $\mathring{\nabla}_{\varepsilon_k} \ldots \mathring{\nabla}_{\varepsilon_1}$ обозначим через $\mathring{\nabla}_{\varepsilon k}$

в) серию индексов $0,\ \alpha_1,\ (\alpha_2\alpha_1),\ \ldots,\ (\alpha_k\alpha_{k-1} \qquad \alpha_1), \qquad$ — через $<\alpha>$;

г) серию индексов $0,\ \alpha_1,\ (\alpha_2\alpha_1), \qquad (\alpha_k\alpha_{k-1} \ldots \alpha_1)$ — через $<\alpha_k>$;

д) тождественные операторы обозначим через $\overset{E}{\partial}_0$ и $\mathring{\nabla}_0$, т. е., например,

$$\overset{E}{\partial}_0 \Omega^{\alpha} = \Omega^{\alpha}, \qquad \mathring{\nabla}_0 \overset{i}{\underset{j}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma} = \overset{i}{\underset{j}{T}}{}^{\alpha}_{\gamma}.$$

Используя вышевведенную символику, ряд

$$\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma},\quad \overset{E}{\partial}_{\alpha_1}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma},\quad \overset{E}{\partial}_{\alpha_2}\overset{E}{\partial}_{\alpha_1},\quad \overset{E}{\partial}_{\alpha_k}\quad \overset{E}{\partial}_{\alpha_1}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

например, можем записать в виде

$$\overset{E}{\partial}_{<\alpha>}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Теорема о замене I. *Пусть* $\underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}$ *— компоненты линеарного дифференциального инварианта, аргументами которого служат*

$$\overset{E}{\partial}_{<\sigma>}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma};\quad \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}(\underset{i}{\partial_{\varepsilon}}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\quad \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\quad \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}(\underset{k}{\partial_{\tau}}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}),$$

т. е.

$$\underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}=\underset{(j)}{\overset{(i)}{\Phi}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}\{\overset{E}{\partial}_{<\sigma>}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma};\quad \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}(\underset{i}{\partial_{\varepsilon}}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\quad \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\quad \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}(\underset{k}{\partial_{\tau}}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon})\},\tag{7.1}$$

тогда он может быть выражен следующим образом:

$$\underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}=\underset{(j)}{\overset{(i)}{\Phi}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}\{A^{\alpha}_{\beta\gamma<\sigma>};\quad \underset{i}{\partial_{\varepsilon}}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma,,<\sigma>};\quad \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>};\quad \underset{k}{\partial_{\tau}}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>}\},\tag{7.2}$$

где аргументами служат только тензоры и линеары.

Доказательство. Выразим компоненты функции $\underset{(j)}{\overset{(i)}{\Phi}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}$ через ее компоненты в нормальной системе координат, соответствующей данному элементу $(a^{\alpha},\overset{i}{p}{}^{\gamma})$

$$(\underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)})_a=(B^{i_1}_{k_1})_0\quad (B^{i_p}_{k_p})_0(B^{l_1}_{j_1})_0\quad (B^{l_q}_{j_q})_0\left(\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{\sigma_1}}\right)_0\quad \left(\frac{\partial x^{\alpha_p}}{\partial y^{\sigma_p}}\right)_0\times$$

$$\times\left(\frac{\partial y^{\tau_1}}{\partial x^{\gamma_1}}\right)_0\quad \left(\frac{\partial y^{\tau_q}}{\partial x^{\gamma_q}}\right)_0(\underset{(l)}{\overset{(k)}{\check{T}}}{}^{(\sigma)}_{(\tau)})_0=(\underset{(j)}{\overset{i}{\check{T}}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)})_0,\tag{7.3}$$

ибо

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\beta}}\right)_0=\delta^{\alpha}_{\beta},\quad (B^i_j)_0=\delta^i_j.\tag{7.4}$$

Следовательно, справедливо равенство:

$$(\underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)})_a=\underset{(j)}{\overset{(i)}{\Phi}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}\{\overset{E}{\partial}_{<\sigma>}\check{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma};\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}(\underset{i}{\partial_{\varepsilon}}\check{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}\underset{j}{\overset{i}{\check{N}}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}(\underset{k}{\partial_{\tau}}\underset{j}{\overset{i}{\check{N}}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon})\}_0.\tag{7.5}$$

Если учесть соотношения] (6.2), (6.3), (6.7) и (7.4), а также линеарную природу величин $\underset{i}{\partial_{\varepsilon}}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $\underset{k}{\partial_{\tau}}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$, из равенств (7.5) получим:

$$\underset{(j)}{\overset{(i)}{\Phi}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}\{\overset{E}{\partial}_{<\sigma>}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma};\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}(\underset{i}{\partial_{\varepsilon}}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>}(\underset{k}{\partial_{\tau}}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon})\}_a=$$

$$\underset{(j)}{\overset{(i)}{\Phi}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}\{A^{\alpha}_{\beta\gamma<\sigma>};\ \underset{i}{\partial_{\varepsilon}}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma,,<\sigma>};\ \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>};\underset{k}{\partial_{\tau}}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>}\}_a.\tag{7.6}$$

Так как выбранный опорный элемент произвольный, то последнее равенство и доказывает теорему.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема о замене II. *Если* $\overset{(I)}{\underset{(J)}{T}}{}^{\{\alpha\}}_{\{\gamma\}}$ *— компоненты линеарного дифференциального инварианта, аргументами которого служат*

$$\overset{E}{\partial}_{<\sigma>} L^{\alpha}_{\beta\gamma};\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>} (\underset{i}{\partial_{\varepsilon}} L^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>} \overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>} (\underset{k}{\partial_{\tau}} \overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon});$$

$$\overset{E}{\partial}_{<\sigma>} \underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma};\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>} (\underset{k}{\partial_{\tau}} \underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}),$$

то эти аргументы можно заменить соответственно следующими аргументами:

$$A^{\alpha}_{\beta\varepsilon<\sigma>} + R^{\alpha}_{\beta\gamma,,<\sigma>};\ \underset{i}{\partial_{\varepsilon}} \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma,,<\sigma>} + \underset{i}{\partial_{\varepsilon}} R^{\alpha}_{\beta\gamma,,<\sigma>};$$

$$\overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>};\ \underset{k}{\partial_{\tau}} \overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>};\ C^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>};\ \underset{k}{\partial_{\tau}} \underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>}.$$

Теорема о замене III. *Если* $\overset{(I)}{\underset{(J)}{T}}{}^{\{\alpha\}}_{\{\gamma\}}$ *— компоненты линеарного дифференциального инварианта, аргументами которого служат*

$$\overset{E}{\partial}_{<\sigma>} \overset{i}{\underset{j}{\check{L}}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>} (\underset{k}{\partial_{\tau}} \overset{i}{\underset{j}{\check{L}}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon});\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>} \overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{E}{\partial}_{<\sigma>} (\underset{l}{\partial_{\tau}} \overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}),$$

то эти аргументы можно заменить следующими аргументами:

$$\delta^{i}_{j} (A^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>} + R^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>}) + c^{i}_{j}\delta^{\alpha}_{\varepsilon} (A^{\tau}_{\gamma\tau<\sigma>} + R^{\tau}_{\gamma\tau,,<\sigma>}) + \overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>};$$

$$\delta^{i}_{j} (\underset{k}{\partial_{\tau}} \mathcal{L}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>} + \underset{k}{\partial_{\tau}} R^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>}) + c^{i}_{j}\delta^{\alpha}_{\varepsilon} (\underset{k}{\partial_{\tau}} \mathcal{L}^{\rho}_{\gamma\rho,,<\sigma>} + \underset{k}{\partial_{\tau}} R^{\rho}_{\gamma\rho,,<\sigma>}) +$$

$$+ \underset{k}{\partial_{\tau}} \overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>};\ \overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>};\ \underset{l}{\partial_{\tau}} \overset{i}{\underset{jk}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\sigma>}.$$

При доказательстве теорем II и III надо было использовать следующие равенства:

$$L^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\gamma} \tag{7.7}$$

и

$$\overset{i}{\underset{j}{\check{L}}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} = \delta^{i}_{j} L^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} + c^{i}_{j}\delta^{\alpha}_{\varepsilon} L^{\sigma}_{\gamma\sigma} + \overset{i}{\underset{j}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}. \tag{7.8}$$

2. Связь между тензором кривизны и нормальными тензорами

Рассмотрим случай аффинной связности без кручения. Записав (3.40) в нормальной системе координат и вычислив в начальном элементе, получим:

$$(K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon})_{a} = 2\,(\overset{E}{\partial}_{[\varepsilon} \check{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta]\gamma})_{0}, \tag{7.9}$$

т. е.

$$K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = 2A^{\alpha}_{[\beta|\gamma|\varepsilon]}. \tag{7.10}$$

Отсюда, применив тождество $A^{\alpha}_{(\beta\gamma\varepsilon)} = 0$, находим:

$$A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = \frac{2}{3} K^{\alpha}_{(\beta\gamma)\varepsilon} \tag{7.11}$$

или, в силу (4.10),

$$A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = \frac{1}{3}\,(2K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} + K^{\alpha}_{\gamma\beta\varepsilon}). \tag{7.12}$$

Вычисляя инвариантные производные последовательно возрастающего порядка от левой и правой частей равенств (7.10) и (7.11), получаем:

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\alpha_s} \quad {}_{\alpha_1} K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = 2\overset{\circ}{\nabla}_{\alpha_s} \quad {}_{\alpha_1} A^{\alpha}_{[\beta|\gamma|\varepsilon]}, \tag{7.13}$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\alpha_s} \quad {}_{\alpha_1} A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = \frac{2}{3}\overset{\circ}{\nabla}_{\alpha_s} \quad {}_{\alpha_1} K^{\alpha}_{(\beta\gamma)\varepsilon}. \tag{7.14}$$

Равенства (7.10), (7.13) показывают, что компоненты тензора кривизны и его инвариантных производных s-го порядка выражаются линейно через компоненты нормального тензора и через его инвариантные производные s-го порядка. Из равенств (7.11) и (7.14) видно, что справедливо и обратное предложение.

Применяя к равенствам (3.40) в нормальных координатах оператор $\overset{E}{\partial}_{\varepsilon_1}$ и вычисляя результат в начальном элементе, находим:

$$K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon,,\varepsilon_1} = 2A^{\alpha}_{[\beta|\gamma|\varepsilon]\varepsilon_1}. \tag{7.15}$$

Если к равенствам (3.40) в нормальных координатах применить оператор $\overset{E}{\partial}_{\varepsilon_1}$ и вычислить результат в начальном элементе, то получим:

$$K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon,,\varepsilon_1\varepsilon_2} = 2\,(A^{\alpha}_{[\beta|\gamma|\varepsilon]\varepsilon_1\varepsilon_2} - A^{\alpha}_{[\beta|\sigma\varepsilon_1|}A^{\sigma}_{\varepsilon]\gamma\varepsilon_2} - A^{\alpha}_{[\beta|\sigma\varepsilon_2}A^{\sigma}_{\varepsilon]\gamma\varepsilon_1}). \tag{7.16}$$

Аналогично, для s-го расширения тензора $K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}$ получаем:

$$\frac{1}{2}K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon,,\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s} = A^{\alpha}_{[\beta|\gamma|\varepsilon]\varepsilon_1\ldots\varepsilon_s} - P^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon\varepsilon_1\ldots\varepsilon_s}(A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon},\ A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon\varepsilon_1},$$

$$A^{\alpha}_{\beta\varepsilon\varepsilon_1\ldots\varepsilon_s}), \tag{7.17}$$

где P — полином от указанных аргументов. Таким образом, s-ое расширение тензора $K^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ может быть выражено в виде полинома от нормальных тензоров до порядка $s+1$.

Найдем теперь из равенств (7.17) выражение для $s+1$-го расширения нормального тензора. При $s=1$ имеем:

$$K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon,,\varepsilon_1} = A^{\alpha}_{\gamma\beta\varepsilon\varepsilon_1} - A^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\beta\varepsilon_1}.$$

Используя второе тождество (6.13) и применяя равенство

$$\overset{E}{\partial}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \overset{E}{\partial}_{\varepsilon_2\varepsilon_1}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma} - \underset{i}{\partial_{\sigma}}\breve{\mathcal{L}}^{\alpha}_{\beta\gamma}\overset{i}{\breve{R}}{}^{\sigma}_{\varepsilon_2\varepsilon_1}, \tag{7.18}$$

которое в начальном элементе примет вид:

$$A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon_2\varepsilon_1} = A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2} - P^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon_2\varepsilon_1}(\overset{i}{v}{}^{\sigma};\ \underset{j}{\partial_{\tau}}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma};\ A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};\ \overset{i}{N}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{i}{N}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,\varepsilon_1}), \tag{7.19}$$

получаем

$$A^{\alpha}_{\beta\lambda\gamma\varepsilon_1} = \frac{1}{6}(5K^{\alpha}_{\beta\lambda\gamma,,\varepsilon_1} + 4K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon_1,,\lambda} + 3K^{\alpha}_{\varepsilon_1\beta\lambda,,\gamma} + 2K^{\alpha}_{\lambda\varepsilon_1\gamma,,\beta} +$$

$$+ K^{\alpha}_{\gamma\lambda\varepsilon_1,,\beta}) + \Pi^{\alpha}_{\beta\lambda\gamma\varepsilon_1}(\overset{i}{v}{}^{\sigma};\ A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};\ \underset{j}{\partial_{\tau}}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma};\ \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,\varepsilon_1}); \tag{7.20}$$

$P^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon_2\varepsilon_1}$, $\Pi^{\alpha}_{\beta\lambda\gamma\varepsilon_1}$ — полиномы от указанных совокупностей аргументов.

Простым подсчетом устанавливается равенство:

$$\underset{i}{\partial_{\sigma}}(\overset{E}{\partial}_{\alpha}f) = \overset{E}{\partial}_{\alpha}(\partial_{\sigma}f) - \underset{j}{\partial_{\gamma}}f\cdot\underset{i}{\partial_{\sigma}}\overset{j}{E}{}^{\gamma}_{\alpha}, \tag{7.21}$$

которое показывает, что операции $\underset{i}{\partial_\sigma}$ и $\overset{E}{\partial_\alpha}$ в общем случае не перестановочны.

Используя равенство (7.21), из равенства (7.18), после кратного базисного дифференцирования и подсчета результатов в начальном элементе, получаем:

$$A^{\alpha}_{\beta\gamma[\varepsilon_1\varepsilon_2]\gamma_1\ \cdots\ \gamma_n}=\overset{*}{P}(\overset{i}{v}{}^{\sigma};\ A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon<\gamma_n>};\ \underset{i}{\partial_\sigma}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma,,<\gamma_n>};$$

$$\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\gamma_{n+1}>}), \tag{7.22}$$

$$A^{\alpha}_{\beta\gamma\gamma_1\ \cdots\ \gamma_n[\varepsilon_1\varepsilon_2]}=\overset{**}{P}(\overset{i}{v}{}^{\tau};\ A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};\ \underset{i}{\partial_\sigma}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma,,<\gamma_n>};\ \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\gamma(n-1)>};$$

$$\underset{k}{\partial_\tau}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\gamma_{n-1}>}). \tag{7.23}$$

Воспользовавшись методом О. Веблена (см. [3], стр. 123), в силу (6.13), (7.22), (7.23), из (7.17) находим:

$$A^{\alpha}_{\beta\lambda\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_{s+1}}=\frac{1}{k}\{(k-1)K^{\alpha}_{\beta\lambda\varepsilon_1,,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{s+1}}+(k-2)K^{\alpha}_{\beta\varepsilon_1\varepsilon_2,,\lambda\ \cdots\ \varepsilon_{s+1}}+\cdots\}+$$

$$+\overset{*}{\Pi}{}^{\alpha}_{\beta\lambda\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_{s+1}}(\overset{l}{v}{}^{\sigma};\ A^{\alpha}_{\beta\lambda\varepsilon_1<\gamma_{s-1}>};\ \underset{l}{\partial_\sigma}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma,,<\varepsilon_{s-1}>};$$

$$\underset{j}{\overset{l}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\varepsilon_s>};\ \underset{k}{\partial_\sigma}\overset{i}{N}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\varepsilon_{s-2}>}), \tag{7.24}$$

где $\overset{*}{\Pi}$ – полином от указанных аргументов, $k=\frac{(s+2)(s+3)}{2}$, а индексы $K^{\alpha}_{\beta\lambda\varepsilon_1,,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{s+1}}$ упорядочены по схеме О. Веблена. Применяя последнюю формулу реккурентно, получим:

$$A^{\alpha}_{\beta\lambda\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{s+1}}=P^{\alpha}_{\beta\lambda\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_{s+1}}(\overset{l}{v}{}^{\sigma};\ K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon,,<\varepsilon_s>};\ \underset{i}{\partial_\sigma}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma,,<\varepsilon_{s-1}>};$$

$$\underset{j}{\overset{l}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\varepsilon_s>};\ \underset{k}{\partial_\sigma}\underset{j}{\overset{l}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon,,<\varepsilon_{s-2}>}), \tag{7.25}$$

где P – полином.

Имеет место следующая

Теорема IV. А. *s-ое расширение какого либо линеара (тензора) является полиномом от следующих аргументов:*

$$\overset{l}{v}{}^{\sigma};$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_s>}\underset{(j)}{\overset{(l)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s-2}>}K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s-3}>}(\underset{l}{\partial_\sigma}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s-2}}\underset{j}{\overset{l}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s-4}>}(\underset{k}{\partial_\sigma}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}).$$

Б. *Нормальный тензор s-го порядка* $A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_s}$ *является полиномом от следующих величин:*

$$\overset{l}{v}{}^{\sigma};$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s-1}>}K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s-2}>}(\underset{l}{\partial_\sigma}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s-1}>}\underset{j}{\overset{l}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s-3}>}(\underset{k}{\partial_\sigma}\underset{j}{\overset{l}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma})$$

(*инвариантные производные вычислены с помощью* $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$).

Теорему докажем методом математической индукции.

Так как инвариантная производная линеара (тензора), определенная с помощью $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, совпадает с его первым расширением, то отсюда и из формулы (7.12) вытекает справедливость теоремы для $s=1$. Допустим теперь, что теорема справедлива для $s \leqslant N$ и докажем, что она имеет место и для $s=N+1$.

Инвариантная производная линеара $\underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}$, определенная с помощью $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, имеет вид:

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\varepsilon} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)} = \overset{E}{\partial}_{\varepsilon} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)} + \overset{A}{\overline{\left| \mathcal{L}^{\bullet}_{\varepsilon *} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)} \right|}}, \tag{7.26}$$

где

$$\overset{A}{\overline{\left| \mathcal{L}^{\bullet}_{\varepsilon *} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)} \right|}} = \sum_{s=1}^{p} \mathcal{L}^{\alpha_s}_{\varepsilon\tau} \underset{(j)}{\overset{i_p}{T}}{}^{\alpha_1 \cdots \tau \cdots \alpha_p}_{(\gamma)} - \sum_{s=1}^{q} \mathcal{L}^{\tau}_{\varepsilon\gamma_s} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{\gamma_1 \cdots \tau \cdots \gamma_q} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} c^{i_s}_{k} \underset{(j)}{\overset{i_1 \cdots k \cdots i_p}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)} \mathcal{L}^{\sigma}_{\varepsilon\sigma} - \sum_{s=1}^{q} c^{k}_{j_s} \underset{j_1 \cdots k \cdots j_q}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)} \mathcal{L}^{\sigma}_{\varepsilon\sigma}.$$

Записав (7.26) в нормальных координатах, соответствующих рассматриваемому опорному элементу, и продифференцировав N раз способом $\overset{E}{\partial}$, имеем

$$\overset{E}{\partial}_{\varepsilon_N \cdots \varepsilon_1} (\overset{\circ}{\nabla}_{\varepsilon} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}) = \overset{E}{\partial}_{\varepsilon_N \cdots \varepsilon_1 \varepsilon} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)} + \overset{E}{\partial}_{\varepsilon_N \cdots \varepsilon_1} \overset{A}{\overline{\left| \mathcal{L}^{\bullet}_{\varepsilon *} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)} \right|}} +$$

$$+ \underset{(j)}{\overset{(i)}{Q}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)\varepsilon_N \cdots \varepsilon_1 \varepsilon} (\overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{N-1}>} \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma};\ \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{N-1}>} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)};\ \overset{A}{\overline{\left| \mathcal{L}^{\bullet}_{\varepsilon *} \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_N>} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)} \right|}}), \tag{7.27}$$

где Q — полином.

Вычисляя значения левой и правой частей равенства (7.27) в начальном элементе нормальной системы координат и имея в виду соотношения (6.3), (6.7), (7.4) и то, что расширение линеара является линеаром, получем:

$$\underset{\varepsilon(j)}{\overset{\circ}{\nabla}} \overset{(i)}{T}{}^{(\alpha)}_{(\gamma),, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_N} = \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma),, \varepsilon\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_N} + \underset{(j)}{\overset{(i)}{Q}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)\varepsilon\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_N} (A^{\alpha}_{\beta\gamma <\varepsilon_N>};$$

$$\underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma),, <\varepsilon_{N-1}>}). \tag{7.28}$$

Так как по предложению при $s \leqslant N$ теорема верна, то величины

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma),, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_N} \quad \text{и} \quad \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma),, <\varepsilon_{N-1}>}$$

можно выразить в виде полиномов от следующих аргументов:

$$\overset{i}{v}{}^{\sigma};$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N+1}>} \underset{(j)}{\overset{(i)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-2}>} K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-3}>} (\partial_{\sigma} \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-2}>} \overset{i}{N}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-4}>} (\partial_{\underset{k}{\sigma}} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}).$$

В то же время из части Б теоремы следует, что нормальные тензоры $A^{\alpha}_{\beta\gamma<\varepsilon_N>}$ выражаются в виде полиномов от аргументов

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-1}>} K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-2}>} (\underset{l}{\partial_\sigma} \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-1}>} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{>\varepsilon_{N-3}>} (\underset{k}{\partial_\sigma} \underset{j}{N}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon})$$

Учитывая это, из равенств (7.28) получаем:

$$\underset{(j)}{\overset{(l)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma),\,\varepsilon_1\ \ldots\ \varepsilon_{N+1}} = \underset{(j)}{\overset{(l)}{Q}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)\varepsilon_1\ \ldots\ \varepsilon_{N+1}} \{\overset{i}{v}{}^{\sigma};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N+1}>} \underset{(j)}{\overset{(l)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-1}>} K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{>\varepsilon_{N-2}>} (\underset{l}{\partial_\sigma} \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-1}} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-3}>} (\underset{k}{\partial_\sigma} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon})\}, \qquad (7.29)$$

где $\underset{(j)}{\overset{(l)}{Q}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)\varepsilon_1\ \ldots\ \varepsilon_{N+1}}$ — полином.

Применяя формулу (7.29) к аргументам правой части (7.25), получаем:

$$A^{\alpha}_{\beta\lambda\varepsilon_1\ \ldots\ \varepsilon_{N+1}} = \bar{P}^{\alpha}_{\beta\lambda\varepsilon_1\ldots\ \varepsilon_{N+1}} \{\overset{i}{v}{}^{\sigma};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_N>} K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-1}>} (\underset{i}{\partial_\sigma} \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_N>} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{N-2}>} (\underset{k}{\partial_\sigma} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon})\}. \qquad (7.30)$$

Формулы (7.29) и (7.30) показывают, что теорема верна и при $s=N+1$. Значит, теорема верна при любом s.

3. Теоремы приведения

Теорема приведения I. *Каждый дифференциальный (скалярный, тензорный или линеарный) инвариант пространства опорных линеаров с линеарной связностью, аргументами которого служат величины*

$$v^{\sigma};$$

$$\overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_k>} \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma};\quad \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_l>} (\underset{l}{\partial_\sigma} \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_m>} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_p>} (\underset{k}{\partial^\sigma} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}),$$

является алгебраическим инвариантом от следующих аргументов:

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_q>} K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{q_1}>} (\underset{i}{\partial_\sigma} \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{q_2}>} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{q_3}>} (\underset{k}{\partial_\sigma} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}),$$

где

$$q=max\,\{k-1;\ l-2;\ m-2;\ p-2\},$$
$$q_1=max\,\{k-2;\ l;\ m-3;\ p-3\},$$
$$q_2=max\,\{k-1;\ l-2;\ m;\ p-2\},$$
$$q_3=max\,\{k-3;\ l-4;\ m-4;\ p\}.$$

Справедливость теоремы непосредственно следует из теоремы о замене I и теоремы IV.

Теорема приведения II. *Каждый дифференциальный (скалярный, тензорный или линеарный) инвариант пространства опорных линеаров* *общей линеарной связности, зависящий, кроме* $\overset{i}{v}{}^{\sigma}$, *от следующих аргументов*:

$$\overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{r_1}>} L^{\alpha}_{\beta\gamma};\ \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{r_2}>} (\partial_{\sigma} L^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{E}{\partial}_{>\varepsilon_{r_3}>} \overset{i}{N}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};$$

$$\overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{r_4}>} (\underset{k}{\partial_{\sigma}} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon});\ \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{r_5}>} \underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{r_6}>} (\underset{k}{\partial_{\sigma}} \underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}),$$

является алгебраическим инвариантом от следующих аргументов, в которых первый тензор кривизны и инвариантное дифференцирование построены относительно объекта связности $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$:

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s_1}>} K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s_2}>} (\underset{i}{\partial_{\sigma}} \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s_3}>} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s_4}>} (\underset{k}{\partial_{\sigma}} \underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon});$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{r_5}>} \underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{r_6}>} (\underset{k}{\partial_{\sigma}} \underset{j}{C}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon});\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{r_1}>} R^{\alpha}_{\beta\gamma};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s}>} (\underset{i}{\partial_{\sigma}} R^{\alpha}_{\beta\gamma}),$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= \max\{r_1-1;\ r_2-2;\ r_3-2;\ r_4-2;\ r_5-2;\ r_6-2\},\\ s_2 &= \max\{r_1-2;\ r_2;\ r_3-3;\ r_4-3;\ r_5-3;\ r_6-3\},\\ s_3 &= \max\{r_1-1;\ r_2-2;\ r_3;\ r_4-2;\ r_5-2;\ r_6-2\},\\ s_4 &= \max\{r_1-3;\ r_2-4;\ r_3-4;\ r_4;\ r_5-4;\ r_6-4\},\\ s &= \max\{r_1-2,\ r_4\}. \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы о замене II и теоремы IV, если иметь в виду следующие замечания.

1. Инвариантная производная, определенная при помощи $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, отличается от инвариантной производной, построенной при помощи $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$, на полином, в который линейно входят компоненты тензора кручения. Действительно, из равенств (7.26), в силу (7.7), получаем:

$$\underset{L}{\overset{\circ}{\nabla}}_{\varepsilon} \underset{(j)}{\overset{i}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)} - \underset{L}{\overset{\circ}{\nabla}}_{\varepsilon} \underset{(j)}{\overset{(l)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)} = R^{\bullet}_{\varepsilon\bullet} \underset{(j)}{\overset{(l)}{T}}{}^{(\alpha)}_{(\gamma)}. \tag{7.31}$$

2. Первый тензор кривизны, соответствующий $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$, отличается от $K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}$, соответствующего $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, лишь на тензорное слагаемое, которое зависит от тензора кручения $R^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Действительно, применяя к равенству (3.40) теорему о замене II, имеем:

$$\mathrm{K}^{\sigma}_{\lambda\beta\mu} = 2\{A^{\sigma}_{[\lambda\ |\beta|\ \mu]} + R^{\sigma}_{\lambda\beta,,\mu} - R^{\sigma}_{[\lambda|\rho|} R^{\rho}_{\mu]\beta}\} \tag{7.32}$$

Из равенств (7.32), вычтя (7.10), получаем:

$$\mathrm{K}^{\alpha}_{\lambda\beta\mu} - K^{\alpha}_{\lambda\beta\mu} = 2\{R^{\alpha}_{\lambda\beta,,\mu} - R^{\alpha}_{[\lambda|\rho|} R^{\rho}_{\mu]\beta}\}, \tag{7.33}$$

т. е. разность этих тензоров является полиномом от $R^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $R^{\alpha}_{\beta\gamma,,\sigma}$.

Формулы (7.31) и (7.33) показывают, что инвариантные производные $\underset{L}{\overset{\circ}{\nabla}}_{\alpha}$ и тензор кривизны $\mathrm{K}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}$ могут быть получены из $\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\nabla}}_{\alpha}$ и $K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}$ путем добавления тензорных полиномов. Следовательно, рассматривая дифференциальные инварианты пространства опорных линеаров, можно опираться на компоненты связности $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

Теорема приведения III. *Каждый дифференциальный (скалярный. тензорный или линеарный) инвариант пространства опорных линеаров общей линеарной связности, зависящей, кроме* $\overset{i}{v}{}^{\sigma}$, *от следующих аргументов:*

$$\overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{r_1}>}\underset{j}{\overset{\underline{i}}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{r_2}>}(\underset{k}{\partial_\sigma}\underset{j}{\overset{\underline{i}}{L}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon});\ \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{r_3}>}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};$$

$$\overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{r_4}>}(\underset{k}{\partial_\sigma}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon});\ \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{r_5}>}\underset{jk}{\overset{i}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{E}{\partial}_{<\varepsilon_{r_6}>}(\underset{l}{\partial_\sigma}\underset{jk}{\overset{i}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}),$$

является алгебраическим инвариантом от следующих аргументов, в которых инвариантное дифференцирование построено относительно $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$:

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s_1}>}K^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s_2}>}(\underset{i}{\partial_\sigma}\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma});\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s_3}>}\overset{i}{N}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s_4}>}(\underset{k}{\partial_\sigma}\underset{j}{\overset{i}{N}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon});\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s_5}>}\underset{jk}{\overset{i}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{sr_6}>}(\underset{l}{\partial_\sigma}\underset{jk}{\overset{i}{C}}{}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon});$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{r_1}>}R^{\alpha}_{\beta\gamma};\ \overset{\circ}{\nabla}_{<\varepsilon_{s_5}>}(\underset{i}{\partial_\sigma}R^{\alpha}_{\beta\gamma}),$$

где

$$s_1=\max\{r_1-1;\ r_2-2;\ r_3-2;\ r_4-2;\ r_5-2;\ r_6-2\},$$
$$s_2=\max\{r_1-2;\ r_2;\ r_3-3;\ r_4-3;\ r_5-3;\ r_6-3\},$$
$$s_3=\max\{r_1;\ r_2-2;\ r_3;\ r_4-2;\ r_5-2;\ r_6-2\},$$
$$s_4=\max\{r_1-3;\ r_2;\ r_3-4;\ r_4;\ r_5-4;\ r_6-4\},$$
$$s_5=\max\{r_1-2;\ r_2\}.$$

Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы о замене III, теоремы IV и соотношений (3.41), (7.31), (3.8), при помощи которых можно установить связь между инвариантными производными ∇_ε и $\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\nabla}}_\varepsilon$, а также между $\overset{i}{K}{}^{\alpha}_{\gamma\beta\varepsilon}$ и $K^{\alpha}_{\gamma\beta\varepsilon}$.

В заключение выражаю благодарность В. И. Близникасу за советы и постоянное внимание к работе.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
6.III.1969

Литература

1. В. Близникас, Полный объект центро-проективной связности и объект кручения-кривизны пространства центральных копункторов, Лит. матем. сб., IV, № 4 (1964), 457–475.
2. В. Близникас, Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов, Лит. матем. сб., VI, № 2 (1966), 141–209.
3. О. Веблен, Инварианты дифференциальных квадратных форм, ИИЛ, М, 1948.
4. Б. Л. Лаптев, Производная Ли в пространстве опорных элементов, Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу, МГУ, 1956, вып. 10, 227–248.
5. Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов, Учен. записки Казанского гос. ун-та, **118**, кн. 4 (1958), 75–147.

6. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского мат. об-ва, 2 (1953), 275–382.
7. А. Е. Либер, О дифференциальных комитантах некоторых линейных объектов, Изв. высш. учебн. завед., матем., № 6 (19) (1960) 158–162.
8. А. Урбонас, О дифференциальных инвариантах пространства опорных элементов, Труды сем. кафедры геометрии, Казанский гос. ун-т, 1968, вып. 3, 115–133.
9. Ю. Шинкунас, О пространстве опорных линеаров, Лит. матем. сб., VI, № 3 (1966), 449–456.
10. Ю. Шинкунас, О линеарных связностях пространства опорных линеаров, Тезисы докладов III Прибалтийской геометрической конф., Паланга, 1968, 173.
11. Ю. Шинкунас, Нормальные координаты и расширения в пространстве опорных линеаров линеарной связности, Лит. матем. сб., VIII, № 4 (1968).
12. T. Y. Thomas, The theory of differential invariants of generalized spaces, Cambr. Univ Press, 1934.

APIE ATRAMINIŲ LINEARŲ ERDVĖS DIFERENCIALINIUS INVARIANTUS

J. Šinkūnas

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje nagrinėjama atraminių linearų erdvės [9] su specialiu sąryšiu, kuris apibrėžiamas formule (2.1), diferencialiniai invariatai. Sudaryta šio sąryšio kreivumo teorija ir įrodyta keletas vadinamųjų atraminių linearų erdvės pakeitimo ir redukcijos teoremų, kurios yra analogiškų teoremų, įrodytų B. Laptevo [5] ir A. Urbono [8], natūralus apibendrinimas.

SUR LES INVARIANTS D'ESPACE DES LINÉARS D'APPUIS

J. Šinkūnas

(*Résumé*)

Dans cet article on expose les invariants d'espace des linéars d'appuis avec connéxion spéciale qui est définie à l'aide de formule (2.1). On élabore la théorie de courbure-torsion et on démontre qelques théorèmes, qui sont la généralisation des théorèmes analogiques, obtenus par B. Laptev [5] et A. Urbonas [8].