X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970

УДК–512.25+519.3 : 30.115

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫМ ПРОЦЕССОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

В. БИСТРИЦКАС

Наиболее общая задача о „золотодобыче" в дискретном случае приводит к рассмотрению функционального уравнения

$$f(z,y)=\max\begin{bmatrix} A\colon & az+by+p_1 f(r_1 z, r_2 y), \\ B\colon & cz+dy+p_2 f(s_1 z, s_2 y), \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где параметры $|a|$, $|b|$, $|c|$, $|d|$, z, y, $p_i<\infty$, $i=1$, 2, удовлетворяют неравенствам $0\leqslant p_1 r_i$, $p_2 s_i<1$; z, y, $p_i\geqslant 0$. Решение уравнения (1) найдено автором в работе [3]. В данной работе при помощи принципа максимума исследуется непрерывный вариант упомянутого уравнения. В случае, когда $b=c=0$, $r_2=s_1=1$ и r_1, $s_2\leqslant 1$, непрерывный процесс методами вариационного исчисления исследован Р. Беллманом (см. [1], стр. 262).

§ 1. Формулировка задачи

Рассмотрим систему S, состояние которой в любой момент времени t описывается вектором (x_1, x_2), где $0\leqslant x_1$, $x_2<\infty$. С течением времени эта система управляется одним из двух допустимых управлений A и B. Используя управление A в интервале $(t_0, t_0+\delta)$, когда система S в момент времени t_0 находится в состоянии (z, y), с вероятностью p_1^δ получаем доход $az\delta+by\delta$ и система S переходит в состояние $(r_1^\delta z, r_2^\delta y)$, и с вероятностью $1-p_1^\delta$ дохода не получаем, и процесс управления прекращается. Аналогично приписываются доход $cz\delta+dy\delta$, вероятности p_2^δ, $1-p_2^\delta$, состояние перехода $(s_1^\delta z, s_2^\delta y)$ управлению B за интервал времени δ $(0\leqslant p_1$, $p_2<1)$.

Предположим, что в каждый момент времени $t=k\Delta$, $k=0,1, \ldots$ мы принимаем решение относительно того, какую долю следующего интервала длины Δ мы отводим соответственно для управлений A и B. Это влечет выбор доли $\varphi_1(k)$, которая означает, что в интервале длины $\varphi_1(k)\Delta$ используется управление A, а в интервале $(1-\varphi_1(k))\Delta$ – управление B.

Задача состоит в определении такой последовательности операции $\varphi_1(k)$, $k=0,1, \ldots$, которая максимизирует математическое ожидание дохода.

§ 2. Дискретный процесс управления

Обозначим $f_N(z, y)$ максимальное математическое ожидание дохода, когда процесс управления продолжается не более чем N интервалов времени Δ, и в начале процесса система находится в состоянии (z, y) и во всем интервале времени Δ используется только одно из допустимых управлений – либо A либо B.

Используя принцип динамического программирования, имеем, что

$$f_0(z,y)\equiv 0,$$

$$f_N(z,y)=\max\begin{bmatrix} p_1^\Delta\,[az\,\Delta+by\,\Delta+f_{N-1}(r_1^\Delta z, r_2^\Delta y)], \\ p_2^\Delta\,[cz\,\Delta+dy\,\Delta+f_{N-1}(s_1^\Delta z, s_2^\Delta y)] \end{bmatrix},$$

где $N\geqslant 1$. Переходя к пределу, когда $N\to\infty$, получаем уравнение

$$f(z,y)=\max\begin{bmatrix} p_1^\Delta\,[az\,\Delta+by\,\Delta+f(r_1^\Delta z, r_2^\Delta y)], \\ p_2^\Delta\,[cz\,\Delta+dy\,\Delta+f(s_1^\Delta z, s_2^\Delta y)] \end{bmatrix}, \tag{1a}$$

которое эквивалентно уравнению (1).

§ 3. Непрерывный процесс управления

В этом параграфе рассматривается непрерывный вариант дискретного процесса управления.

Обозначим $\big(x_1(t),\ x_2(t)\big)$ состояние системы S в момент времени t, когда процесс управления продолжается до времени t; $x_3(t)$ – вероятность того, что процесс управления продолжится до времени t; $x_0(t)$ – математическое ожидание дохода, полученного до момента времени t; $t=k\Delta$, $k=0, 1,\ldots$ Пренебрегая членами второго порядка малости по Δ, имеем, что

$$x_1(t+\Delta)=x_1(t)(r_1^{\varphi_1(t)}s_1^{\varphi_2(t)})^\Delta\approx x_1(t)\,[1+\varphi_1(t)\,\Delta\ln r_1+$$

$$+\varphi_2(t)\,\Delta\ln s_1],\qquad \varphi_2=1-\varphi_1;$$

$$x_2(t+\Delta)\approx x_2(t)\,[1+\varphi_1(t)\,\Delta\ln\, r_2+\varphi_2(t)\,\Delta\,\ \ln s_2],$$

$$x_3(t+\Delta)=x_3(t)\,\ (p_1^{\varphi_1(t)}p_2^{\varphi_2(t)})^\Delta\approx$$

$$\approx x_3(t)\,\ [1+\Delta\varphi_1(t)\,\ln p_1+\Delta\varphi_2(t)\ln p_2]$$

и

$$x_0(t+\Delta)\approx x_0(t)+x_3(t)\,\ \{[a\varphi_1(t)+c\varphi_2(t)]\,x_1\,(t)\,\Delta+[b\varphi_1(t)+d\varphi_2(t)]\times$$

$$\times\, x_2(t)\,\Delta\}.$$

Переходя к пределу, когда $\Delta\to 0$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_0}{dt}=x_3(t)\,\{\varphi_1(t)\,[a\,x_1(t)+b\,x_2(t)]+\varphi_2(t)\,[cx_1(t)+d\,x_2(t)]\},$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=[\varphi_1(t)\ln r_1+\varphi_2(t)\ln s_1]\,x_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt}&=[\varphi_1(t)\ln r_2+\varphi_2(t)\ln s_2]\,x_2(t), \\ \frac{dx_3}{dt}&=[\varphi_1(t)\ln p_1+\varphi_2(t)\ln p_2]\,x_3(t), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $\varphi_2(t)=1-\varphi_1(t)$ и

$$0\leqslant\varphi_1(t)\leqslant 1. \tag{3}$$

Таким образом, имеем следующую задачу оптимального управления со свободным правым концом фазовой траектории: среди всех допустимых управлений $\varphi_1(t)$, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 1$, для которых соответствующая траектория $x(t)=(x_1, x_2, x_3)$ системы (2) исходит из начальной точки $x(0)=(z, y, 1)$, найти такое, для которого функционал

$$\int_0^T x_3 [(a x_1 + b x_2)\varphi_1 + (c x_1 + d x_2)\varphi_2]\, dt \tag{4}$$

принимает наименьшее возможное значение.

§ 4. Синтез оптимального управления, когда $T=\infty$

В этом параграфе при помощи принципа максимума (см. [2], стр. 209) решается следующая задача оптимального управления: требуется найти такое допустимое управление $\varphi_1(t)=1-\varphi_2(t)$, чтобы интеграл

$$J=\int_0^\infty x_3 [(a x_1 + b x_2)\varphi_1(t) + (c x_1 + d x_2)\varphi_2(t)]\, dt \tag{5}$$

сходился и принимал наибольшее возможное значение, когда фазовые переменные удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -[v_1\varphi_1(t) + u_1\varphi_2(t)]\,x_1, & x_1(0)&=z;\\ \frac{dx_2}{dt} &= -[v_2\varphi_1(t) + u_2\varphi_2(t)]\,x_2, & x_2(0)&=y;\\ \frac{dx_3}{dt} &= -[q_1\varphi_1(t) + q_2\varphi_2(t)]\,x_3, & x_3(0)&=1, \end{aligned} \tag{6}$$

где $v_i=-\ln r_i$, $u_i=-\ln s_i$, $q_i=-\ln p_i$. Допустимым управлением мы будем называть всякую кусочно непрерывную функцию $\varphi_1(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяющую неравенству

$$0 \leqslant \varphi_1(t) \leqslant 1.$$

Так как

$$x_1(t)=z\, r_1^{\int_0^t \varphi_1 dt} \cdot s_1^{\int_0^t \varphi_2 dt}$$

$$x_2(t)=y\, r_2^{\int_0^t \varphi_1 dt} \cdot s_2^{\int_0^t \varphi_2 dt}$$

$$x_3(t)= p_1^{\int_0^t \varphi_1 dt} \cdot p_2^{\int_0^t \varphi_2 dt}$$

то

$$g_1(t)=x_1 \cdot x_3 = z\,(p_1 r_1)^{\int_0^t \varphi_1 dt} \cdot (p_2 s_1)^{\int_0^t \varphi_2 dt}$$

$$g_2(t)=x_2 \cdot x_3 = y\,(p_1 r_2)^{\int_0^t \varphi_1 dt} \cdot (p_2 s_2)^{\int_0^t \varphi_2 dt}$$

Очевидно, что при $0 \leqslant p_1 r_i,\ p_2 s_i < 1$ функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ монотонно стремятся к нулю, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} g_i(t)=0, \qquad i=1,2.$$

Ввиду признака Дирихле (см. [4], стр. 564), интеграл (5) сходится, когда $0 \leqslant p_1 r_i$; $p_2 s_i < 1$. Таким образом, в случае функционала (5), заданного несобственным интегралом, применяется принцип максимума (см. [2], стр. 209). Функция Гамильтона (см. [2], стр. 24) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$H(x, \psi, \varphi_1) = -\psi_1 x_1 (v_1\varphi_1 + u_1\varphi_2) - \psi_2 x_2 (v_2\varphi_1 + u_2\varphi_2) - \psi_3 x_3 (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) -$$
$$\psi_0 x_3 (ax_1 + bx_2)\varphi_1 - \psi_0 x_3 (cx_1 + dx_2)\varphi_2.$$

С помощью этой функции мы составим систему дифференциальных уравнений для вспомогательных неизвестных ψ_j, $j=0, 1, 2, 3$.

$$\frac{d\psi_0}{dt} \equiv 0;$$
$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_1 (v_1\varphi_1 + u_1\varphi_2) + \psi_0 x_3 (a\varphi_1 + c\varphi_2); \tag{7}$$
$$\frac{d\psi_2}{dt} = \psi_2 (\varphi_1 v_1 + \varphi_2 u_2) + \psi_0 x_3 (b\varphi_1 + d\varphi_2);$$
$$\frac{d\psi_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = \psi_3 (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) + \psi_0 (ax_1 + bx_2)\varphi_1 + \psi_0 (cx_1 + dx_2)\varphi_2.$$

Подставляя вместо φ_2 его выражение $1 - \varphi_1$, имеем, что

$$H = -u_1\psi_1 x_1 - u_2\psi_2 x_2 - q_2\psi_3 x_3 - \psi_0 x_3 (cx_1 + dx_2) +$$
$$+ [(u_1 - v_1)\psi_1 x_1 + (v_2 - u_2)\psi_2 x_2 +$$
$$+ (q_2 - q_1)\psi_3 x_3 + (c-a)\psi_0 x_3 x_1 + (d-b)\psi_0 x_3 x_2]\varphi_1(t) = k(t)\varphi_1(t) + l(t). \tag{8}$$

Обозначим через $\bar{\varphi}_1(t)$ управление, удовлетворяющее принципу максимума, и переходим к его исследованию.

Лемма 1. *Пусть*

$$k(t) = (u_1 - v_1)\psi_1 x_1 + (v_2 - u_2)\psi_2 x_2 + (q_2 - q_1)\psi_3 x_3 + (c-a)\psi_0 x_3 x_1 +$$
$$+ (d-b)\psi_0 x_3 x_2. \tag{9}$$

Тогда функция $k(t)$ имеет непрерывную производную и

$$k'(t) = \psi_0 x_3 (vx_1 - ux_2), \tag{10}$$

где

$$u = b(u_2 + q_2) - d(q_1 + v_2), \quad v = c(q_1 + v_1) - a(v_1 + q_2).$$

Доказательство. Согласно соотношению (8),

$$l(t) = -u_1\psi_1 x_1 - u_2\psi_2 x_2 - q_2\psi_3 x_3 - \psi_0 x_3 (cx_1 + dx_2). \tag{11}$$

Следовательно,

$$k(t) = -l(t) - v_1\psi_1 x_1 - v_2\psi_2 x_2 - q_1\psi_3 x_3 -$$
$$-\psi_0 x_3 (ax_1 + bx_2) = s(t) - l(t). \tag{12}$$

Теперь найдем производную функции $l(t)$

$$l'(t) = -u_1\psi_1' x_1 - u_1\psi_1 x_1' - u_2\psi_2' x_2 - u_2\psi_2 x_2' - q_2\psi_3' x_3 -$$
$$- q_2\psi_3 x_3' - \psi_0 x_3' (cx_1 + dx_2) - \psi_0 x_3 (cx_1' + dx_2').$$

Подставляя вместо x_i', ψ_i', $i=1, 2, 3$, их выражения (6) и (7), после элементарных упрощений получаем, что

$$l'(t) = \psi_0\varphi_1 x_3 (vx_1 - ux_2). \tag{13}$$

Аналогичным путем находим, что

$$s'(t)=\psi_0\varphi_2 x_3(ux_2-vx_1).$$

Отсюда и из равенств (12) и (13) следует, что

$$k'(t)=s'(t)-l'(t)=\psi_0 x_3(ux_2-vx_1)\varphi_2+\psi_0 x_3(ux_2-vx_1)\varphi_1.$$

Подставляя вместо функции φ_2 ее выражение $1-\varphi_1$, мы придем к формуле (10).

Непрерывность функции $k(t)$ и ее производной следует из непрерывности функций $\psi_i(t)$, $x_i(t)$ и их производных.

Лемма 2. *Если функция* $k(t)=0$ *при* $0\leqslant t\leqslant T$, $T>0$, *то*

$$ux_2=vx_1$$

управление $\bar{\varphi}_1(t)$ *имеет вид*:

$$\bar{\varphi}_1(t)=\frac{u_2-u_1}{u_2-u_1+v_1-v_2}=c, \qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{14}$$

Доказательство. Так как правый конец фазовой траектории $x(t)=(x_1, x_2, x_3)$ не имеет ограничений, то условие трансверсальности в правом конце оптимальной траектории (см. [2], стр. 59) дает, что

$$\psi_k(\infty)=0 \text{ при } k=1,\ 2,\ 3.$$

В силу принципа максимума (см. [2], стр. 25) вектор-функция $\psi(t)=(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ является ненулевой. Поэтому

$$\psi_0<0.$$

Далее, по предположению $k(t)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$, имеем, что

$$k'(t)=0 \text{ при } T>0.$$

Итак, используя лемму 1, получаем равенство $vx_1=ux_2$, ибо $x_3(t)\neq 0$.

Докажем соотношение (14). Если $k(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant T$, то согласно доказанному, точка (x_1, x_2) находится на прямой. Поэтому функции управления $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в интервале $[0, T]$ должны выбираться так, чтобы наклон $s=x_2/x_1$ оставался постоянным (см. [1], стр. 270). Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=\frac{x_2'}{x_1}-\frac{x_1'}{x_1}s=\frac{(v_2\varphi_1+u_2\varphi_2)x_2}{x_1}+$$
$$+(v_1\varphi_1+u_1\varphi_2)s=s[(v_1-v_2)\varphi_1+(u_1-u_2)\varphi_2]=0.$$

Так как $s\neq 0$ и $\varphi_1=1-\varphi_2$, то из последнего равенства получаем соотношение (14).

Лемма 3. *Для того чтобы управление*

$$\bar{\varphi}_1(t)=1 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant T\ (T>0) \tag{15}$$

необходимо и достаточно, чтобы $k(t)\,(>)\,0$, $0\leqslant t\leqslant T$, *и для того чтобы управление*

$$\varphi_1(t)=0 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant T \tag{16}$$

необходимо и достаточно, чтобы $k(t)\,(<)0$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Замечание. Знак $(>)$ означает, что строгое неравенство выполняется почти всюду.

Достаточность. Согласно соотношению (6)

$$H=k(t)\varphi_1(t)+l(t).$$

В силу принципа максимума (см. [2], стр. 25), функция H достигает максимального значения при управлении $\bar{\varphi}_1(t)$. Так как H является линейной по φ_1, то при $k(t)\,(>)\,0$ управление

$$\bar{\varphi}_1(t)=1, \text{ когда } 0\leqslant t\leqslant T.$$

Аналогично доказывается, что при $k(t)\,(<)\,0$, $0\leqslant t\leqslant T$, управление $\bar{\varphi}_1(t)$ равно нулю, когда $0\leqslant t\leqslant T$.

Необходимость. Из доказанного получаем, что если управление $\varphi_1(t)$ равно единице, когда $0\leqslant t\leqslant T$, то $k(t)\geqslant 0$ при $0\leqslant t\leqslant T$. Следовательно, ввиду леммы 2 имеем, что $k(t)\,(>)\,0$.

Остальная часть леммы доказывается аналогично.

Замечание. Для определенности предполагаем непрерывность справа допустимых управлений.

Лемма 4. *Пусть $v_1\geqslant v_2$, управление $\bar{\varphi}_1(t)=1$ в точке $t=0$ и $vz\leqslant uy$. Тогда управление $\bar{\varphi}_1(t)=1$ для всех $t\geqslant 0$ при u, $v\geqslant 0$.*

Доказательство. Из непрерывности справа функции $\bar{\varphi}_1(t)$ следует существование такого t^*, что

$$\bar{\varphi}_1(t)=1 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant t^* \tag{17}$$

и $t^*>0$. Таким образом, из системы дифференциальных уравнений (6) имеем, что

$$x_1(t)=z e^{-v_1 t}$$

и

$$x_2(t)=y e^{-v_2 t}$$

при $0\leqslant t\leqslant t^*$. Так как $v_1\geqslant v_2$, то

$$\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\geqslant\frac{y}{z}\,e^{(v_1-v_2)t}\geqslant\frac{y}{z}\,. \tag{18}$$

Последнее неравенство означает, что точка $\left(x_1(t),\ x_2(t)\right)$ находится выше или на прямой $vx_1=ux_2$. Поэтому, согласно лемме 1,

$$k'(t)\geqslant 0 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant t^*,$$

ибо $\psi_0<0$, $x_3>0$ и $ux_2\geqslant vx_1$. Кроме того, ввиду леммы 3,

$$k(t)\,(>) 0 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant t^*.$$

Последние два и (18) неравенства дают, что

$$k(t)\,(>)\,0 \text{ при } t\geqslant 0.$$

Отсюда при помощи леммы 3 получаем утверждение леммы.

Аналогично предыдущей лемме доказывается следующая.

Лемма 5. *Пусть $u_2\geqslant u_1$, управление $\bar{\varphi}_1(t)$ в точке $t=0$ равно нулю и $uy\leqslant vz$. Тогда управление $\bar{\varphi}_1(t)$ равно нулю для всех $t\geqslant 0$ при u, $v\geqslant 0$.*

Лемма 6. *Если $u>0$ и $x_1(0)=0$, то управление*

$$\bar{\varphi}_1(t)=0 \text{ для всех } t\geqslant 0. \tag{19}$$

Если $u<0$ и $x_1(0)=0$, то управление

$$\bar{\varphi}_1(t)=1 \text{ для всех } t\geqslant 0. \tag{20}$$

Доказательство. Докажем (19). Так как фазовая переменная x_1 удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению (2), то из $x_1(0)=0$ получаем, что

$$x_1(t)=0 \text{ для всех } t\geqslant 0.$$

Таким образом, точка $(0, x_2)$ не принадлежит прямой $ux_2=vx_1$ при $x_2>0$. Следовательно, ввиду лемм 2 и 3, управление $\bar{\varphi}_1(t)$ равно либо нулю, либо единице. Кроме того, в силу однородности функции $x_0(t)$ по x_2 из $\bar{\varphi}_1(0)=0$ следует, что $\varphi_1(t)=0$ для всех $t\geqslant 0$, и из $\bar{\varphi}_1(0)=1$ следует, что $\bar{\varphi}_1(t)=1$, $t\geqslant 0$.

Предположим противное, что $\bar{\varphi}_1(t)\equiv 1$. На основании соотношений (5) и (6)

$$I=\int_0^\infty by e^{-(q_1+v_2)t}\,dt=\frac{by}{v_2+q_1}.$$

Подставляя $\varphi_1(t)=0$, когда $t\geqslant 0$, по тем же самым равенствам (5) и (6) имеем, что

$$\bar{I}=\int_0^\infty dy\, e^{-(q_2+u_2)t}\,dt=\frac{dy}{q_2+u_2}$$

при $x_1(t)=0$. По предположению $u>0$ из последних двух соотношений получаем, что

$$\bar{I}-I=\frac{yu}{(v_2+q_1)(u_2+q_2)}>0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Те же самые рассуждения приводят к соотношению (20).

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 7. *Если $v>0$ и $x_2(0)=0$, то управление $\bar{\varphi}_1(t)$ равно единице для всех $t\geqslant 0$.*

Если $v<0$ и $x_2(0)=0$, то управление $\bar{\varphi}_1(t)$ равно нулю для всех $t\geqslant 0$.

Лемма 8. *Пусть $v\geqslant 0$ и $v_1\leqslant v_2$. Тогда, если управление $\bar{\varphi}_1(t)=1$ в точке $=0$, то*

$$\bar{\varphi}_1(t)=1 \text{ для всех } t\geqslant 0.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $vz\leqslant uy$. По предположению $\bar{\varphi}_1(0)=1$ и непрерывности справа функции $\bar{\varphi}_1(t)$ следует существование такого $\varepsilon>0$, что управление

$$\bar{\varphi}_1(t)=1 \text{ для } 0\leqslant t\leqslant\varepsilon.$$

Таким сбразом, согласно соответствующим леммам 3 и 1,

$$k(t)\ (>)\ 0 \text{ для } 0\leqslant t\leqslant\varepsilon$$

и

$$k'(t)=\psi_0 x_3(t)\,[vx_1(t)-ux_2(t)]. \tag{21}$$

Отсюда вытекает, что

$$k(t)\ (>)\ 0 \text{ для } 0\leqslant t\leqslant t_1=\inf\{t : ux_2\leqslant vx_1\}.$$

Следовательно, управление

$$\bar{\varphi}_1(t)=1 \text{ для } 0\leqslant t<t_1. \tag{22}$$

Используя систему (6), получаем, что

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y}{z}\ e^{-t(v_1-v_2)}\leqslant\frac{y}{z}\ ,\qquad \text{когда}\quad 0\leqslant t<t_1\ ,$$

ибо $v_1\leqslant v_2$. Если $v_1=v_2$, то в силу однородности функции $x_0(t)$ по x_1 и x_2, $\varphi_1(t)=1$ для всех $t\geqslant 0$. Если $v_1\leqslant v_2$, то существует такая точка t_0, что

$$vx_1(t_0)=ux_2(t_0)$$

и $vx_1(t)\leqslant ux_2(t)$ при $0\leqslant t\leqslant t_0$. Следовательно, из (22) имеем, что управление

$$\bar{\varphi}_1(t)=1\ \text{для}\ 0\leqslant t\leqslant t_0. \tag{23}$$

Приравниваем функцию $\varphi_1(t)$ единице для $0\leqslant t\leqslant T$. Тогда в силу (23) точка $(x_1,\ x_2)$ находится ниже прямой $ux_2=vx_1$ и

$$\lim_{T\to\infty}\frac{x_2(T)}{x_1(T)}=0.$$

Так как функция $k(t)=k(x,\ t)$ является непрерывной по x_2, то ввиду [лемм 7 и 3

$$k(t)=k(x,\ t)>0\ \text{для}\ x_2(T)<\delta;\ T\leqslant t\leqslant t_2=\inf\{t>T,\ x_2\geqslant\delta\},$$

где δ — достаточно малое число. Итак, последние два соотношения дают, что

$$k'(t)>0\ \text{для}\ t\geqslant T$$

при достаточно большом T. Кроме того, из равенства (21) выводим, что

$$k'(t)\leqslant 0,\ \text{когда}\ t\geqslant t_0.$$

Так как $k(t)\,(>)\,0$, $t<t_0$, то при помощи последних двух соотношений имеем

$$k(t)\,(>)\,0\ \text{для всех}\ t\geqslant 0.$$

Итак, на основании леммы 3 завершаем доказательство.

Заметим, что при $uy=vz$ лемма остается в силе.

Лемма 9. *Пусть $u>0$ и $u_1\geqslant u_2$. Тогда, если управление $\bar{\varphi}_1(t)$ равно нулю в точке $t=0$, то*

$$\bar{\varphi}_1(t)=0\ \textit{для всех}\ t\geqslant 0.$$

Лемма доказывается аналогично лемме 8.

Теорема. *Обозначим через $\varphi(x)$ синтез оптимального управления $\varphi_1(t)$. Тогда*

1) *Если $v,\ u>0$, где*

$$v=-a\ln(p_1r_1)+c\ln(p_2s_1),$$

$$u=-d\ln(p_1r_2)+b\ln(p_2s_2),$$

то функция $\varphi(x)$ имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{для}\quad x_2<q\,x_1\,,\\ 0 & \text{для}\quad x_2>q\,x_1\,,\end{cases} \tag{24}$$

где

$$q=\begin{cases}\dfrac{v}{u} & \text{при} \quad r_1\leqslant r_2, \quad s_1\geqslant s_2,\\ \dfrac{v\ln(p_2s_2)\ln(p_1r_2)}{u\ln(p_2s_1)\ln(p_1r_1)} & \text{при} \quad r_1\geqslant r_2, \quad s_1\leqslant s_2;\\ \dfrac{v\ln(p_1r_2)}{u\ln(p_1r_1)} & \text{при} \quad r_1\geqslant r_2, \quad s_1\geqslant s_2;\\ \dfrac{v\ln(p_2s_2)}{u\ln(p_2s_1)} & \text{при} \quad r_1\leqslant r_2, \quad s_1\leqslant s_2.\end{cases} \tag{25}$$

Если $x_2=qx_1$, *то в случае* $r_1\leqslant r_2$ *и* $s_1\geqslant s_2$ *функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\varphi(x)=\frac{\ln\left(\dfrac{s_2}{s_1}\right)}{\ln\left(\dfrac{s_2}{s_1}\cdot\dfrac{r_1}{r_2}\right)}, \tag{26}$$

а в остальных случаях функция $\varphi(x)$ *равна нулю.*

2) *Если* v, $u<0$, *то функции* φ и ψ, *параметры* r_i *и* s_i, p_1 *и* p_2, *a и c, b и d меняются местами в соотношениях* (24)–(26), *где функция* ψ – *синтез оптимального управления* $\varphi_2(t)$.

3) *Если* $u\leqslant 0$, $v\geqslant 0$, *то функция* $\varphi(x)$ *равна единице для всех* $x\geqslant 0$.

4) *Если* $u\geqslant 0$, $v\leqslant 0$, *то функция* $\varphi(x)$ *равна нулю для всех* $x\geqslant 0$.

Доказательство. Обозначим через $\bar\varphi(x)$ синтез управления $\bar\varphi_1(t)$. Покажем, что при $v_1\geqslant v_2$, $u>0$ функция

$$\bar\varphi(x)=\bar\varphi_1(t)=0, \text{ когда } ux_2>vx_1, \tag{28}$$

и $\bar\varphi(x)\neq 1$ в случае $ux_2\geqslant vx_1$. Так как наша задача управления является автономной, то равенство (28) достаточно показать для $t=0$. Допустим противное, что

$$\bar\varphi(x)=\bar\varphi_1(0)=1 \text{ для всех } ux_2\geqslant vx_1.$$

Тогда, согласно лемме 4, имеем, что $\varphi_1(t)=1$ для всех $t\geqslant 0$. Таким образом, интеграл (5) принимает вид:

$$I=\int_0^\infty x_3(t)\,[a\,x_1(t)+b\,x_2(t)]\,dt.$$

Подставляя решения дифференциальных уравнений (6), получаем, что

$$I=\int_0^\infty [aze^{-(q_1+v_1)t}+b\,y\,e^{-(q_1+v_2)t}]\,dt.$$

Следовательно,

$$I=\frac{az}{q_1+v_1}+\frac{by}{v_2+q_1}.$$

Нетрудно видеть, что значение интеграла (5) при $\varphi_2(t)=1$, $t\geqslant 0$,

$$\bar I=\frac{cz}{q_2+u_1}+\frac{dy}{q_2+u_2}$$

По предположению

$$\frac{dy}{u_2+q_2} > \frac{by}{v_2+q_1}, \qquad (y \neq 0).$$

Предыдущие два равенства дают, что

$$I < \bar{I} \quad \text{при} \quad z \to 0.$$

Отсюда вытекает, что предположение (29) не верно, т. е.

$$\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}_1(0) \neq 1 \quad \text{при} \quad ux_2 \geqslant vx_1. \tag{30}$$

Поэтому на основании лемм 2 и 3 имеем, что, либо $\bar{\varphi}_1(0)=0$, либо $\bar{\varphi}_1(0)=c$ при $ux_2=vx_1$. В силу тех же самых лемм из $\bar{\varphi}_1(0)=c$ следует равенство

$$ux_2(t) = vx_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon.$$

Итак, получаем соотношение (28).

Аналогично, используя леммы 5, 2 и 3, имеем, что если $u_2 \geqslant u_1$ и $v>0$, то

$$\bar{\varphi}(x) = 1, \quad \text{когда} \quad ux_2 < vx_1, \tag{31}$$

$$\bar{\varphi}(x) \neq 0, \quad \text{когда} \quad ux_2 \leqslant vx_1.$$

Теперь в силу лемм 2 и 3 имеем, что

$$\bar{\varphi}(x) = c, \quad \text{когда} \quad ux_2 = vx_1. \tag{32}$$

Так как осуществленный для системы уравнений (6) синтез является регулярным (см. [5], стр. 359), то

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(x).$$

Поэтому из соотношений (28), (31) и (32) получаем доказательство теоремы в случае, когда $r_1 \geqslant r_2$, $s_1 \geqslant s_2$, u, $v \geqslant 0$.

Во втором случае $v_1 \leqslant v_2$, $u_1 \geqslant u_2$ и v, $u>0$. Ввиду лемм 2 и 3 функция $\bar{\varphi}(x)$ принимает значения либо 1, либо 0, либо c. Так как функция $\bar{\varphi}(x)$ принимает значение c только на прямой $ux_2=vx_1$ и функция $x_0(t)$ является непрерывной, то в силу лемм 8 и 9 на границе между значениями 1 и 0 функции управления $\bar{\varphi}_1(t)$ удовлетворяется равенство

$$\int_0^\infty \left(yde^{-t(q_2+u_2)} + zce^{-t(q_2+u_1)}\right) dt = \int_0^\infty \left(ybe^{-t(q_1+v_2)} + zae^{-t(q_1+v_1)}\right) dt.$$

Таким образом, граница имеет вид прямой

$$y\left(\frac{d}{u_2+q_2} - \frac{b}{v_2+q_1}\right) = z\left(\frac{a}{v_1+q_1} - \frac{c}{u_1+q_2}\right)$$

плоскости (z, y) или

$$x_2 = \frac{v(u_2+q_2)(v_2+q_1)}{u(u_1+q_2)(v_1+q_1)}\, x_1$$

Заметим, что выше этой прямой $\bar{\varphi}(x)=0$, а ниже $\bar{\varphi}(x)=1$.

Рассмотрим случай, когда $v_1 \geqslant v_2$, $u_1 \geqslant u_2$ и u, $v>0$. Применяя лемму 9, имеем, что если управление $\bar{\varphi}_1(0)=0$, то

$$\bar{\varphi}_1(t) = 0 \text{ для всех } t \geqslant 0.$$

Если $\bar{\varphi}_1(t)=1$, когда $0 \leqslant t \leqslant \delta$, то

$$\frac{x_2(t)}{x_1(t)}=\frac{y}{z}\, e^{t(v_1-v_2)} \geqslant \frac{y}{z}$$

Следовательно, в достаточно малой области переключения управления $\bar{\varphi}_1(t)$ имеет место равенство

$$\int_0^s \left(aze^{-(q_1+v_1)t}+bye^{-(q_1+v_2)t}\right)dt + x_3(s)\int_s^\infty \left[cx_1(s)\,e^{-(q_1+u_1)(t-s)}+\right.$$

$$\left.+dx_2(s)\,e^{-(q_2+u_2)(t-s)}\right]dt=\int_0^\infty \left(cze^{-(q_1+u_1)t}+dye^{-(q_1+u_1)t}\right)dt,$$

ибо после $\bar{\varphi}_1(t)=1$ точка $\left(x_1(t),\ x_2(t)\right)$ переходит в область, где $\bar{\varphi}_1(t)=0$. Подставляя выражения

$$x_1(s)=ze^{-v_1 s}, \qquad x_2(s)=ye^{-v_2 s}, \qquad x_3(s)=e^{-q_1 s},$$

имеем, что

$$az\int_0^s e^{-(q_1+v_1)t}\,dt+by\int_0^s e^{-(q_1+v_2)t}\,dt+cze^{-(v_1-u_1+q_1-q_1)s}\int_0^\infty e^{-(q_1+u_1)t}\,dt+$$

$$+dye^{-(v_1-u_2+q_1-q_2)s}\int_s^\infty e^{-(q_2+u_2)t}\,dt=\int_0^\infty \left(cze^{-(q_1+u_1)t}+dye^{-(q_2+u_2)t}\right)dt.$$

Разлагаем левую часть полученного равенства по степеням s

$$azs+bys+\frac{cz\,(u_1-v_1+q_2-q_1)\,s}{u_1+q_1}-czs+\frac{dy\,(u_2+q_2-v_2-q_1)\,s}{u_2+q_2}-dys+o(s)=0.$$

Разделив обе стороны равенства на s и переходя к пределу, когда $s \to 0$, получаем, что

$$\frac{a\,(u_1+q_2)-c\,(q_1+v_1)}{u_1+q_2}\,z=\frac{b\,(u_2+q_2)-d\,(q_1+v_2)}{u_2+q_2}\,y.$$

Таким образом, область переключения является прямой

$$\frac{v\,(u_2+q_2)}{u\,(u_1+q_1)}\,x_1=x_2$$

и синтез управления $\bar{\varphi}(x)=0$ выше прямой переключения и $\bar{\varphi}(x)=1$ ниже этой прямой плоскости x_1, x_2,

Случаи $v_1 \leqslant v_2$, $u_1 \leqslant u_2$ и v, $u<0$ аналогичны соответствующим случаям $v_1 \geqslant v_2$, $u_1 \geqslant u_2$ и v, $u>0$.

Пусть $v \geqslant 0$ и $u \leqslant 0$. Тогда в силу лемм 6 и 7 имеем

$$\bar{\varphi}_1(t)=1 \text{ для всех } t \geqslant 0,$$

когда либо $x_1(0)=0$, либо $x_2(0)=0$.

Так, согласно равенству (8)

$$k(t)=\alpha(t)\,x_1+\beta(t)\,x_2+\gamma(t),$$

из леммы 3 получаем, что

$$k(t)=\alpha(t)\,z+\gamma(t)\,(>)\,0 \text{ при } t \geqslant 0,\ x_2(0)=0$$

для всех $z>0$. Следовательно,

$$\alpha(t),\ \gamma(t)\ (>)\ 0 \text{ при } t\geqslant 0.$$

Кроме того, приравнивая z нулю, имеем, что

$$\beta(t)\ (>)\ 0 \text{ для всех } t\geqslant 0.$$

Далее, с помощью леммы 3 при $v\geqslant 0$, $u\leqslant 0$ получаем, что управление $\bar{\varphi}(x)$ равно единице для всех $x\geqslant 0$.

Случай $v\leqslant 0$, $u\geqslant 0$ аналогичен предыдущему.

Нетрудно видеть, что во всех случаях синтез, осуществленный для системы уравнений (6), является регулярным (см. [5], стр. 263). Таким образом,

$$\varphi(x)=\bar{\varphi}(x)$$

(см. [5], стр. 359). Итак, теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
27.X.1969

Литература

1. Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, М., 1960.
2. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.
3. В. Б. Бистрицкас, Бесконечношаговый дихотомический процесс решения динамического программирования, Лит. матем. сб., X, 3 (1970), 445–452.
4. Г М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. II, М., 1966.
5. В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, „Наука", М., 1969.

OPTIMALUS TOLYDINIO DINAMINIO PROGRAMAVIMO PROCESO VALDYMAS BEGALINIAME LAIKO INTERVALE

V. BISTRICKAS

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama (1) funkcionalinės lygties tolydinis variantas. Gautas optimalaus valdymo uždavinys: reikia surasti tokią valdymo funkciją $\varphi_1(t)$, tenkinančią (3) nelygybę, kuri maksimizuotų (4) integralą, kai faziniai kintamieji (x_1, x_2, x_3) yra (2) diferencialinės lygčių sistemos sprendiniai. Atliekama optimalios valdymo funkcijos sintezė.

OPTIMAL CONTROL OF CONTINUOUS DYNAMIC PROGRAMMING PROCESSE'S IN THE INFINITE INTERVAL OF TIME

V. BISTRICKAS

(*Summary*)

A continuous version of the equation (1) is investigated. It leads to the optimum control problem: maximize integral (4) subject to the constraints (3) when control function $\varphi_1(t)$ satifies the inequality (2). Synthesis of optimum control function is given.