X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
1970

УДК – 518.9

ИГРЫ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ВЫИГРЫШАМИ

Э. И. ВИЛКАС

Рассматриваются бескоалиционные игры с выигрышами, зависящими от множества „допустимых" ситуаций. Доказывается существование ситуаций равновесия в таких играх, рассмотрены вопросы доминирования и сведения таких игр к обычным путем введения доминируемых стратегий. Для частного случая сепарабельных выигрышей рассмотрена связь с обычными играми и их оптимальным по Порето изменением.

Игру с выигрышами, зависящими от множества ситуаций, можно представить себе как своего рода нормальную форму коалиционной или бескоалиционной игры. Результатом процессов образования коалиций, определения дележей, торга и т. д. являются выигрыши на некотором подмножестве множества ситуаций, к которому игроки придут в результате явного или неявного взаимодействия между собой. Новые выигрыши указывают, что получат игроки, если они ограничатся некоторым подмножеством множества ситуаций и продолжат игру на этом подмножестве.

Игру такого типа можно также рассматривать как попытку обойти трудности решения некоторых классических игр. Вместо того чтобы решение первоначальной игры определять нормативно, мы заставляем игроков количественно оценить полезность игр (их выигрышей) с новыми множествами ситуаций, появляющихся в результате соглашений или другого взаимодействия игроков.

Если считать, что экспериментальное измерение новых полезностей возможно (в принципе оно мало отличается от определения обычной функции полезности), то рассмотрение игр с изменяющимися выигрышами дает новую возможность экспериментальной проверки нормативной теории.

1. Игра Г. Существование ситуаций равновесия

Пусть задано множество игроков $N=\{1, \quad n\}$, базисные множества стратегий – выпуклые замкнутые множества $S_i=\{s_i\}$ в m_i-мерных эвклидовых пространствах, $S=S_1\times \quad \times S_n=\{s\}$ и функции выигрышей $f_i(s, R)$, $s\in R$, $R\subset S$, $i\in N$. Для того, чтобы игра при фиксированном R имела ситуацию равновесия по Нэшу [1], будем рассматривать лишь выпуклые замкнутые множества R и предположим, что, кроме того, $f_i(s, R)$ при фиксированных R и s_j, $j\neq i$ является вогнутой (нестрого) функцией s_i для всех $i\in N$ и непрерывной по $s\in R$ для всех R.

Для завершения определения игры Г нам необходимо задать множества стратегий игроков. Стратегиями игроков являются пары (s_i, R_i), $s_i \in R_i$, $R_i \subset S_i$, R_i — выпуклые замкнутые множества. Естественно, могут допускаться и не все выпуклые замкнутые подмножества R_i множества S_i. Обозначим $\mathcal{R}_i$ множество допустимых $R_i \subset S_i$. Тогда игра Г, которую мы собираемся рассматривать, может быть записана так:

$$\Gamma = \langle N, f_i(s, R), s_i \in R_i, R_i \in \mathcal{R}_i \rangle.$$

Обозначим $s^i = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, $R^i = R_1 \times \ldots \times R_{i-1} \times R_{i+1} \times \ldots \times R_n$ и будем писать $s = (s_i, s^i)$, $R = (R_i, R^i)$.

Пару (s^*, R^*) назовем ситуацией глобального равновесия (СГР), если

$$f_i(s^*, R^*) \geqslant f_i(s_i, s^{*i}, R_i, R^{*i})$$

для всех $i \in N$, $R_i \in \mathcal{R}_i$ и $s_i \in R_i$.

Ситуацию равновесия при фиксированном $R \subset S$ будем называть ситуацией R-локального равновесия (СЛР).

При доказательстве существования СГР мы, как обычно, будем пользоваться теоремой о неподвижной точке, точнее ее обобщением, данным И. Л. Гликсбергом [2].

Для применения теоремы И. Л. Гликсберга необходимо, чтобы $\mathcal{R}_i$, $i \in N$, были выпуклыми множествами линейных хаусдорфовых топологических пространств. Поэтому наряду с $\mathcal{R}_i$ мы будем рассматривать множества

$$\mathcal{E}_i = \mathop{\times}_{s_i \in S_i} S_i(s_i), \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \ldots \times \mathcal{E}_n,$$

где $\times$ означает декартово произведение, а $S_i(s_i) = S_i$ для всех $s_i \in S_i$, т. е. $\mathcal{E}_i = S_i^{S_i}$. Все дальнейшие рассуждения остаются тем более в силе и для множеств вида $E_i = S_i^D$, где D — некоторое множество индексов, изоморфное измеримому подмножеству множества S_i, в частности, $D = \omega$, ω — множество натуральных чисел. Когда D — конечное множество, то $\mathcal{E}$ будет множеством эвклидова пространства с обычной топологией. Вообще для $\mathcal{E}$ мы примем тихоновскую топологию эвклидова пространства. Для наших целей достаточно, чтобы $\mathcal{E}$ было выпуклым замкнутым множеством локально-выпуклого линейного хаусдорфова топологического пространства. Очевидно, оно таким будет (см. [4], стр. 110), причем S_i могут тоже быть такими.

Каждому $E_i \in E_i$ поставим в соответствие множество $C(E_i)$ — выпуклую оболочку в S_i координат точки E_i. Таким образом установлено однозначное отображение $\mathcal{E}_i$ на $\mathcal{R}_i$. Обратно, каждому $R_i \in \mathcal{R}_i$ найдется такая точка $E_i \in \mathcal{E}_i$ (не единственная), что $C(E_i) = R_i$.

Если допустимым $\mathcal{R}_i$ является семейство всех выпуклых многогранников $R_i \subset S_i$, то всеми нужными свойствами будет обладать множество S_i^ω. Множеству всех выпуклых многогранников, имеющих не более чем K вершин, будет соответствовать множество S^k. Положив $K=1$ и $f_i(s, \{s\}) = \bar{f}_i(s)$ при условии вогнутости $\bar{f}_i(s_i, s^i)$ по $s_i \in S_i$ для всех $s^i \in S^i$ и непрерывности по s, получим вогнутую игру [3]. Кстати, эта работа Х. Никайдо и К. Исода [3] позволяет несколько ослабить топологические условия для существования равновесия.

Множество $\{(s_i, E_i) : s_i \in C(E_i),\ E_i \in \mathscr{E}_i\}$, в силу выпуклости $\mathscr{E}_i$ будет выпуклым. Нетрудно сформулировать и условия для f_i, обеспечивающие применимость этой теоремы.

Прежде чем сформулировать условие вогнутости функций $f_i(s_i, s^i, R_i, R^i)$ по (s_i, R_i), мы докажем следующую лемму.

Лемма 1.1. *Если* $s_i \in C(E_i)$ *и* $s_i' \in C(E_i')$, *то для любого* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

$$\lambda s_i + (1-\lambda) s_i' \in C\left(\lambda E_i + (1-\lambda) E_i'\right).$$

Доказательство. Условие леммы означает, что существуют такие меры μ и ν на D, что

$$s_i = \int\limits_D s_i(\delta)\, d\mu(\delta), \quad s_i' = \int\limits_D s_i'(\delta)\, d\nu(\delta).$$

Очевидно, что для любого λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, существует такая мера $\pi_\lambda(\delta)$ на D, что

$$\lambda s_i + (1-\lambda) s_i' = \int\limits_D \left(\lambda s_i(\delta) + (1-\lambda) s_i'(\delta)\right) d\pi_\lambda(\delta). \tag{1.1}$$

Но, $\lambda s_i(\delta) + (1-\lambda) s_i'(\delta)$ не что иное как координаты точки $\lambda E_i + (1-\lambda) E_i'$. Тогда соотношение (1.1) означает утверждение леммы.

Условие вогнутости. Если $s_i \in E_i$, $s_i' \in E_i'$, E_i, $E_i' \in \mathscr{E}_i$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то

$$f_i\left(\lambda s_i + (1-\lambda) s_i',\ s^i,\ C\left(\lambda E_i + (1-\lambda) E_i'\right),\ R^i\right) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda f_i\left(s_i,\ s^i,\ C(E_i),\ R^i\right) + (1-\lambda) f_i\left(s_i',\ s^i,\ C(E_i'),\ R^i\right)$$

для всех $s^i \in R^i$, $R^i \in \mathscr{R}^i$ и всех $i \in N$.

Теорема 1.1. *Пусть для всех* $i \in N$ S_i *— выпуклые замкнутые множества* m_i*-мерных эвклидовых пространств,* $\mathscr{R}_i$ *— множества всех выпуклых подмножеств* R_i *множеств* S_i, *причем мощность множества крайних точек множеств* R_i *не превосходит данной функции* $f_i\left(s,\ C(E)\right)$ *удовлетворяют условию вогнутости и непрерывны по* (s, E). *Тогда игра* Γ *обладает хотя бы одной ситуацией глобального равновесия.*

Доказательство. Фиксируем $R \in \mathscr{R}$ и $s \in R$. Для всех $i \in N$ обозначим

$$A_i(s^i, R^i) = \{(r_i, T_i)' : f_i(r_i, s^i, T_i, R^i) = \max_{\substack{s_i \in R_i \\ R_i \in \mathscr{R}_i}} f_i(s_i, s_i, R_i, R^i)\} \tag{1.2}$$

и рассмотрим отображение φ множества ситуаций в себя:

$$(s, R) \xrightarrow{\varphi} \left(A_1(s^1, R^1) \times \quad \times A_n(s^n, R^n)\right).$$

В силу непрерывности функций f_i и компактности множества ситуаций отображение φ замкнуто.

Условие вогнутости гарантирует, что множества $A_i(s^i, R^i)$, а тогда и их произведение, выпуклые.

На основании теоремы И. Л. Гликсберга можем утверждать, что существует такая пара (s^*, E^*), и, значит, (s^*, R^*), что

$$\left(s^*, C(E^*)\right) \subset \varphi\left(s^*, C(E^*)\right), \quad (s^*, R^*) \subset \varphi(s^*, R^*).$$

Последнее вместе с определением (1.2) означает утверждение теоремы.

2. Доминирование. Редукция и продолжение игр

Наряду с обычным доминированием при фиксированном $R \in \mathcal{R}$ мы рассмотрим доминирование между $R_i \in \mathcal{R}_i$. В этом параграфе в тех случаях, когда линейность множества $\mathcal{R}_i$ не существенна, будем допускать, что $\mathcal{R}_i$ есть произвольное семейство выпуклых замкнутых подмножеств множества S_i, $i \in N$.

Будем говорить, что R_i доминируется R'_i $(R_i \leqslant R'_i)$, если для любого $s_i \in R_i$ найдется такое $s'_i \in R'_i$, что

$$f_i(s_i, s^i, R_i, R^i) \leqslant f_i(s'_i, s^i, R'_i, R^i) \tag{2.1}$$

при всех $R^i \in \mathcal{R}^i$, $s^i \in R^i$, причем строгое неравенство имеет место хотя бы для одной пары (s^i, R^i). Если в соотношении (2.1) выполняются строгие неравенства, то доминирование назовем строгим $(R_i < R'_i)$.

Теорема 2.1. *Если $R_j^0 > R_j$ для всех $R_j \in \mathcal{R}_j$, то все СГР, если существуют, имеют вид (s, R_j^0, R^j). Если доминирование нестрогое, но $\mathcal{R}$ — топологическое пространство и $f_i(s, R)$, $i \in N$ — замкнуты по R для всех $s \in R$, то хотя бы одна СГР имеет указанный вид.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай строгого доминирования. Пусть (s^*, R^*) является СГР. По определению

$$f_j(s^*, R_j^*, R^{*j}) \geqslant f_j(s_j, s^{*j}, R_j, R^{*j})$$

для всех $R_j \in \mathcal{R}_j$ и $s_j \in R_j$. Но в силу строгого доминирования R_j^0 это неравенство не может выполняться для $R_j = R_j^0$, если $R_j^* \neq R_j^0$.

Случай нестрогого доминирования рассматривается при помощи предельного перехода. Строим последовательность игр с $f_i^k = f_i$, $i \neq j$, и $f_j^k \to f_j$, $k \to \infty$, причем Γ^k удовлетворяет условиям теоремы со строгим доминированием. Существует сходящаяся подпоследовательность СГР, имеющих вид (s, R_j^0, R^j). В силу замкнутости $f_i(s, R)$ множество всех СГР также будет замкнутым и предельная точка последовательности ситуаций глобального равновесия также будет СГР в предельной игре.

Теорема 2.2. *Если для каждого $R_i \in \mathcal{R}_i$, содержащего s_i^0, найдется такое $R'_i \in \mathcal{R}_i$ и $s'_i \in R'_i$, что*

$$f_i(s_i^0, s^i, R_i, R^i) < f_i(s'_i, s^i, R'_i, R^i) \tag{2.2}$$

для всех $s^i \in R^i$, $R^i \in \mathcal{R}_i$, то s_i^0 не может входить ни в одно СГР. Если неравенство (2.2) нестрогое, но $\mathcal{R}$ — топологическое пространство и $f_i(s, R)$, $i \in N$, замкнуты по R для всех $s \in R$, то s_i^0 не входит хотя бы в одну СГР, если они существуют.

Доказательство. Пусть (s^*, R^*) – ситуация глобального равновесия и $s_i^0 \in R_i^*$. Тогда для некоторого $R_i' \in \mathscr{R}_i$ $s_i' \in R_i'$ по (2.2)

$$f_i(s_i^0, s^{*i}, R_i, R^{*i}) < f_i(s_i', s^{*i}, R_i', R^{*i}) \leqslant \max_{\substack{s_i \in R_i \\ R_i \in \mathscr{R}_i}} f_i(s_i, s^{*i}, R_i, R^{*i}).$$

Это означает, что $s_i^* = s_i^0$.

Другая часть теоремы доказывается при помощи предельного перехода, как и в теореме 2.1.

Теорема 2.3. *Если* $\{s_i\} \in \mathscr{R}_i$, $s_i \in S_i$ *и* $R_i > R_i'$ *для всех* $R_i \subset R_i'$ *и всех* $i \in N$, *то игра* $\Gamma = \langle N, f_i(s, R), R_i, \mathscr{R}_i \rangle$ *эквивалентна в смысле ситуаций равновесия игре* $\bar{\Gamma} = \langle N, \bar{f}_i(s), S_i) \rangle$, *где* $\bar{f}_i(s) = f_i(s, \{s\})$.

Доказательство. Никакое $R_i \neq \{s_i\}$ не может быть равновесным в силу его доминирования каким-нибудь $\{s_i\}$, $s_i \in S_i$. Поэтому все ситуации глобального равновесия в Γ имеют вид $(s^*, \{s^*\})$, где s^* – ситуация равновесия в игре $\bar{\Gamma}$. Наоборот, если s^* – ситуация равновесия в $\bar{\Gamma}$, то $(s^*, \{s^*\})$ – СГР в Γ.

3. Продолжение игр

Займемся теперь обратным к редукции вопросом – продолжением игр. То, что s_i выбираются только из R_i, а не S_i для любого R_i, создает немалые трудности рассмотрения игр с выигрышами $f_i(s, R)$. Попытаемся построить игру Γ_g, эквивалентную первоначальной в смысле множества ситуаций глобального равновесия, с допустимым множеством стратегий S_i для всех R_i.

Игру $\Gamma_g = \langle N, g_i(s, R), S_j \times \mathscr{R}_i \rangle$ назовем продолжением игры Γ, если

$$g_i(s, R) = f_i(s, R), \ s \in R, \ R \in \mathscr{R}, \tag{3.1}$$

любая стратегия $s_i \notin R_i$ строго доминируется некоторой стратегией $\bar{s}_i \in R_i$ для всех $R_i \in \mathscr{R}_i$, т. е. для каждого $s_i \notin R_i$ и каждого $R_i \in \mathscr{R}_i$ найдется такое $\bar{s}_i \in R_i$, что

$$g_i(s_i, s^i, R) < f_i(\bar{s}_i, s^i, R) \tag{3.2}$$

для всех $s^i \in R^i$, $g_i(s_i, s^i, R)$ произвольна для $s^i \notin R^i \in \mathscr{R}^i$.

Теорема 3.1. *Множества ситуаций глобального равновесия игр* Γ *и ее продолжения* Γ_g *совпадают.*

Доказательство. Пусть (s^*, R^*) – СГР в игре Γ. Тогда

$$g_i(s^*, R^*) = f_i(s^*, R^*) \geqslant f_i(s_i, s^{*i}, R_i, R^{*i}) \tag{3.3}$$

для всех $s_i \in R_i$, $R_i \in \mathscr{R}_i$, отсюда по (3.1) и (3.2)

$$f_i(s^*, R^*) \geqslant g_i(s_i, s^{*i}, R_i, R^{*i})$$

для всех $s_i \in S_i$ и $R_i \in \mathscr{R}_i$. Это вместе с равенством (3.3) означает, что (s^*, R^*) – СГР игры Γ_g.

Обратное включение доказывается аналогично.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть* (x, y) – *вектор эвклидова пространства, функция* $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ *непрерывна по* (x, y), *вогнута по* x *для каждого* $y \in Y$, *множества* X, Y, $Z \supset Y$ *ограничены, замкнуты и выпуклы. Тогда существует непрерывное продолжение функции* $f(x, y)$ *на* $X \times Z$, *причем* $f(x, y)$ *вогнута по* x *для всех* $y \in Z$.

Доказательство. Пусть $\dim Y = \dim Z$. Тогда найдется такая точка $y_0 \in \mathrm{Int}\, Y$, что некоторый конус с вершиной в точке y_0 будет содержать $Z \setminus Y$. Пусть l_α — пучок прямых, содержащихся в этом конусе. Положим $g(x, z_\alpha) = f(x, y_\alpha)$, $x \in X$ для всех $z_\alpha \in Z \setminus Y$, принадлежащих прямой l_α, где y_α — точка пересечения l_α, с $\mathrm{Fr}\, Y$. Если, кроме того, положить $g(x, y) = f(x, y)$ на $X \times Y$, то $g(x, y)$ будет требуемым продолжением.

Если $\dim Y < \dim Z$, то продолжение можно осуществить аналогично, но для этого может потребоваться несколько шагов последовательного расширения области определения $g(x, y)$.

Теорема 3.2. *Для любой игры* Γ, *для которой* $f_i\left(s,\ C(E)\right)$ *удовлетворяют условию вогнутости и непрерывны по* (s, E), $s \in C(E)$, $E \in \mathscr{E}$, $\mathscr{E}_i = S_i^{k_i}$, $k_i < \infty$, *существует продолжение* Γ_g, *функции выигрышей* $g_i\left(s,\ C(E)\right)$ *которой непрерывны по* (s, E) *на* $S \times \mathscr{E}$ *и там удовлетворяют условию вогнутости.*

Доказательство. Очевидно существует бесконечно много продолжений Γ_g. Существование продолжения с нужными свойствами мы докажем конструктивно. Как будет видно из построения, требуемое продолжение также далеко не единственно.

Не умаляя общности, мы можем считать, что $f_i(s, R) \geqslant \delta > 0$, $i \in N$, $s \in R$, $R \in \mathscr{R}$.

Обозначим P неотрицательный ортант $(\Sigma m_i (k_i + 1) + 1)$-мерного эвклидова пространства, в котором определим множества

$$G_i(s^i, E^i) = \{ (s_i, E_i, u) : s_i \in C(E_i),\ E_i \in \mathscr{E}_i,$$
$$u \leqslant f_i(s_i, s^i, E_i, E^i) \} \cap P$$

для любых фиксированных $E^i \in \mathscr{E}^i$, $s^i \in C(E^i)$. Это множество выпукло. Действительно, если $(s_i, E_i, u) \in G_i$ и $(s_i', E_i', u') \in G_i$, то любая линейная выпуклая их комбинация принадлежит G_i. Для первых двух компонент это следует из выпуклости множеств $C(E_i)$ и $\mathscr{E}_i$ и леммы 1.1, а для последней — из вогнутости функции f_i:

$$u \leqslant f_i(s_i, s^i, E_i, E^i),\ u' \leqslant f_i(s_i', s^i, E_i', E^i),$$
$$\lambda u + (1-\lambda) u' \leqslant \lambda f_i(s_i, s^i, E_i, E^i) + (1-\lambda) f_i(s_i', s_i, E_i', E^i) \leqslant$$
$$\leqslant f_i(\lambda s_i + (1-\lambda) s_i', s^i, \lambda E_i + (1-\lambda) E_i', E^i).$$

Пусть

$$M = \{ (s_i, E_i) : s_i \in C(E_i),\ E_i \in \mathscr{E}_i \}.$$

Через точки $\left(\tilde{s}_i, \tilde{E}_i, f_i(\tilde{s}_i, s^i, \tilde{E}_i, E_i)\right)$, $(\tilde{s}_i, \tilde{E}_i) \in \mathrm{Fr} M \setminus \mathrm{Fr}\,(S_i \times \mathscr{E}_i)$ проведем всевозможные опорные к $G_i(s^i, E^i)$ гиперплоскости $\varphi_\alpha(s_i, E_i) = u$, причем такие, которые не пересекают внутренности $S_i \times \mathscr{E}_i$. Существование таких гиперплоскостей следует из того, что δ может быть выбран сколь угодно большим. Эти гиперплоскости определяют по два полупространства каждая. Обозначим через $H_i(s^i, E^i)$ пересечение всех замкнутых полупространств, содержащих $G_i(s^i, E^i)$. Оно, очевидно, выпуклое.

Наконец, определим $g_i(s_i, s^i, E_i, E^i)$ из соотношения

$$v \in \mathrm{Fr} H_i(s^i, E^i) \leftrightarrow v = \left(s_i, E_i, g_i(s_i, s^i, E_i, E^i)\right) \tag{3.4}$$

для всех

$$(s_i, E_i) \in (S_i \times \mathscr{E}_i) \setminus M$$

и

$$g_i(s_i, s^i, E_i, E^i) = f_i(s_i, s^i, E_i, E^i),$$

когда $(s_i, E_i) \in M$.

Из построения следует, что Γ_g является продолжением игры Γ, если произвольно доопределить g_i для $s^i \notin C(E^i)$. Действительно, для любого $s_i \notin C(E_i)$ точка (s_i, E_i, g_i) принадлежит опорной гиперплоскости, проходящей через некоторую точку (s_i^0, E_i, g_i). По построению $H_i(s^i, E^i)$ стратегия s_i доминируется стратегией s_i^0.

Кроме того, g_i удовлетворяет условиям леммы 3.1: g_i выпукла по (s_i, E_i) в силу (3.4) и выпуклости f_i и $H_i(s^i, E^i)$; непрерывность обеспечивается выбором δ, одного и того же для всех (s^i, E^i). Следовательно, функция g_i может быть непрерывно продолжена на $S \times \mathscr{E}$ с сохранением выпуклости по (s_i, E_i). Теорема доказана.

Замечание. Теорема 3.2, по-видимому, верна и для $\mathscr{E} = S^D$, где мощность D не превосходит мощности континиума. В доказательстве теоремы и леммы 3.1 тогда следует пользоваться теоремой Мазура (см. [5], стр. 156) о существовании непрерывного отделяющего функционала. Чтобы не терять наглядности доказательств, мы этого не делали.

4. Случай сепарабельных выигрышей

Здесь мы рассмотрим игру с в известном смысле сепарабельными выигрышами $f_i(s, R) = \varphi_i(s) + \psi_i(R)$, $s \in R$, $R \in \mathscr{R}$. Такую игру можно представить себе как следующую модель.

Задана обычная игра $< N, \varphi_i(s), S_i >$. Для достижения взаимно приемлемого решения игроки производят взаимные платежи или получают их извне. В итоге каждый игрок получает $\psi_i(R)$, если игроки пришли к решению ограничиться множеством ситуаций $R \in \mathscr{R}$.

Функции $\psi_i(R)$ также могут быть интегрированы как плата i-го игрока за информацию о том, что его партнеры ограничились R^i. Естественно, тогда $\psi_i(R) = \psi_i(R^i)$.

Если каждый игрок получает независимо от других игроков и только за свою уступку, то следует считать, что $\psi_i(R) = \psi_i(R_i)$.

Прежде чем перейти непосредственно к нашей теме, приведем весьма простую, но тем не менее очень полезную, лемму.

Лемма С. Карлина (см. [6], стр. 254) утверждает, что если действительные функции $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, определены на выпуклом замкнутом подмножестве X эвклидова пространства, непрерывны и вогнуты на X, то для любой эффективной (оптимальной по Парето) точки $\bar{x}$ существуют такие, не все равные нулю $\lambda_i \geqslant 0$, что

$$\max_{x \in X} \Sigma \lambda_i f_i(x) = \Sigma \lambda_i f_i(\bar{x}).$$

Верно и обратное утверждение, причем даже для невыпуклого X и невогнутых f_i.

Лемма 4.1. *Если существуют такие* $\lambda_i>0$, $i=1, \quad n$, *и* $\bar{x}\in X$, *что для всех* $x\in X$

$$\sum \lambda_i f_i(\bar{x})\geqslant \sum \lambda_i f_i(x),$$

то $\bar{x}$ *является эффективной точкой.*

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ не является эффективной точкой. Тогда существует такое $x\in X$, что

$$f_i(\bar{x})\leqslant f_i(x), \qquad i=1,$$

причем хотя бы одно неравенство строгое. Умножая каждое неравенство на λ_i и складывая, получаем

$$\sum_i \lambda_i f_i(\bar{x})<\sum \lambda_i f_i(x),$$

что противоречит условию леммы.

Эта лемма может быть обобщена на случай неотрицательных λ_i следующим образом. Пусть для простоты $f_i(x)$ непрерывны, а X замкнуто. Если $\lambda_1, \quad \lambda_k>0$, $\lambda_j=0$, $j>k$, то обозначим

$$\bar{X}=\left\{\bar{x}\in X\colon \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(\bar{x})=\max_{x\in X} \sum \lambda_i f_i(x)\right\}.$$

Для произвольных $\mu_j>0$, $j=k+1, \ldots, n$, пусть

$$\max_{x\in\bar{X}} \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j f_j(x)=\sum_{j=k+1}^{n} \mu_j f_j(\tilde{x}).$$

Тогда $\tilde{x}$ будет эффективной точкой. Очевидно, эта процедура может быть опять применена к $\mu_j\geqslant 0$ и т. д.

Эффективную точку $\bar{x}$, для которой

$$\max_{x\in X} \sum_i f_i(x)=\sum_i f_i(\bar{x}),$$

будем называть сильно эффективной.

Теорема 4.1. *Если игра* $\langle N, \varphi_i(s), S_i\rangle$ *с нулевой (постоянной) суммой, а* $\psi_i(R)=\psi_i(R_i)$, $i\in N$, *то пара* (s^*, R^*) *является глобальной ситуацией равновесия для игры* $\langle N, \varphi_i(s)+\psi_i(R), s_i\in R_i, R_i\in\mathcal{R}_i\rangle$ *тогда и только тогда, когда* R^* *сильно эффективна по* $(\psi_1(R), \quad \psi_n(R)$ *на* $\mathcal{R}$, *а* s^* – *ситуация равновесия для игры* $\langle N, \varphi_i(s), R_i^*\rangle$.

Доказательство. На основе леммы Никайдо – Исода [3] пара (s^*, R^*) является ситуацией равновесия тогда и только тогда, когда

$$\max_{\substack{s\in R\\ R\in\mathcal{R}}} \sum_i \left(\varphi_i(s_i, s^{*i})+\psi_i(R_i, R^{*i})\right)=\sum_i \left(\varphi_i(s^*)+\psi_i(R^*)\right).$$

Но в силу условий $\sum \varphi_i(s)=0$ и $\psi_i(R)=\psi_i(R_i)$ этот максимум также равен

$$\max_{R\in R} \sum \psi_i(R_i, R^{*i}) = \max_{R\in R} \sum \psi_i(R_i) = \sum_i \psi_i(R_i^*).$$

Тогда по лемме 4.1 R^* сильно эффективно.

Кроме того,

$$\varphi_i(s^*) + \psi_i(R^*) = \max_{\substack{s_i\in R_i\\ R_i\in R_i}} \left(\varphi_i(s_i, s^{*i}) + \psi_i(R_i, R_i^*)\right) = \max_{s_i\in R_i^*} \varphi_i(s_i, s^{*i}) + \psi_i(R^*),$$

откуда следует, что s^* — ситуация равновесия при фиксированном R^*.

Для доказательства достаточности можно обратить проведенное рассуждение.

Следствие. *В условиях теоремы* 4.1 *R-локальная ситуация равновесия $\bar{s}$ входит в глобальную ситуацию равновесия тогда и только тогда, когда $s\in\bar{R}$, $\bar{R}\subset R$ и $\bar{R}$ сильно эффективно по* $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ *на* $\mathcal{R}$.

Доказательство. Рассуждение с использованием отношения доминирования приводит к утверждению, что из R-локальной равновесности $\bar{s}$ в силу $\bar{s}\in\bar{R}$ и $\bar{R}\subset R$ следует ее $\bar{R}$-локальная равновесность. Далее достаточно применить теорему 4.1.

Аналогичные результаты можно сформулировать и для игр $\langle N, \varphi_i, S_i\rangle$ с непостоянной суммой. В этом случае R^* должна быть сильно эффективной не по (ψ_i), а по $(\varphi_i^*+\psi_i)$, где $\varphi_i^*(R)=\varphi_i\left(s(R)\right)$, $s(R)$ — некоторая однозначная функция $R\in\mathcal{R}$, такая, что $s(R)\in\mathcal{S}(R)$ для каждого $R\in\mathcal{R}$, $\mathcal{S}(R)$ — множество ситуаций равновесия в игре $\langle N, f_i(s, R), R_i\rangle$.

Лемма 4.2. *Для каждой глобальной ситуации равновесия* (s^*, R^*) *игры* Γ *существует такая однозначная функция* $s(R)$, $s(R)\in\mathcal{S}(R)$ *для каждого* $R\in\mathcal{R}$, *если только* $\mathcal{S}(R)\neq\varnothing$, *что* $(s^*, R^*)=\left(s(\bar{R}), \bar{R}\right)$, *где* $\bar{R}$ — *ситуация равновесия игры* $\langle N, f_i(s(R), R), \mathcal{R}_i\rangle$.

Доказательство. Допустим сначала, что $s(R)$ непрерывна. Тогда по лемме Никайдо — Исода

$$\sum_i f_i(s^*, R^*) = \max_{R\in R}\max_{s\in R} \sum_i f_i(s_i, s^{*i}, R_i, R^{*i}). \tag{4.1}$$

Применение упомянутой леммы [3] к $\bar{R}$ и $s(\bar{R})$ дает:

$$\sum f_i\left(s(\bar{R}), \bar{R}\right) = \max_{R\in R} \sum_i f_i\left(s(R_i, \bar{R}^i), R_i, \bar{R}^i\right).$$

Так как максимум здесь достигается именно на $\bar{R}$, то последнее выражение равно

$$\max_{R\in R} \sum_i f_i\left(s(\bar{R}), R_i, \bar{R}^i\right) = \max_{R\in R} \sum_i \max_{s_i\in R_i} f_i\left(s_i, s(\bar{R})^i, R_i, \bar{R}^i\right) =$$

$$= \max_{R\in R}\max_{s\in R} \sum f_i\left(s_i, s(\bar{R})^i, R_i, \bar{R}^i\right).$$

Сравнивая последнее с (4.1), получаем утверждение леммы для непрерывной $s(R)$.

Если непрерывной $s(R)$ не существует, то замкнутость $\mathcal{S}(R)$ для всех $R \in \mathcal{R}$ все же позволяет $s(R)$ выбрать так, чтобы все требуемые максимумы достигались.

Теорема 4.2. *Если* $\psi_i(R)=\psi_i(R_i)$ *и* $\varphi_i\left(s(R)\right)=\varphi_i\left(s(R_i)\right)$, *тогда пара* (s^*, R^*) *является глобальной ситуацией равновесия тогда и только тогда, когда* R^* *сильно эффективная по* $\left(\varphi_i\left(s(R)\right)+\psi_i(R)\right)_{i\in N}$, *а* s^* — *ситуация равновесия для игры* $\langle N, \varphi_i(s), R_i^*\rangle$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.1 с применением леммы 4.1.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
15.X.1969

Литература

1. Дж. Нэш, Бескоалиционные игры, Сб. „Матричные игры", Физматгиз, М., 1961.
2. И. Л. Гликсберг, Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия в смысле Нэша, Сб. „Бесконечные антагонистические игры", Физматгиз, М., 1963, 497–503.
3. Х. Никайдо, К. Иосида, Заметка о бескоалиционных выпуклых играх, сб. [2], 449–458.
4. П. Бурбаки, Общая топология. Основные структуры, „Наука", М., 1968.
5. К. Иосида, Фукциональный анализ, „Мир", М., 1967.
6. С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, „Мир", М., 1964.

LOŠIMAI SU KINTANČIAIS IŠLOŠIMAIS

E. VILKAS

(*Reziumė*)

Nagrinėjami n asmenų nekoaliciniai lošimai, kurių išlošimo funkcijos priklauso nuo parenkamų situacijų aibių. Įrodoma pusiausvyros taškų egzistencija bei keletas teoremų apie strategijų dominavimą. Parodoma, kad lošimą su kintančiais išlošimais, įvedant fiktyvias dominuojamas strategijas, galima suvesti į įprastinį lošimą, išlaikant įgaubtumo ir tolydumo savybes. Nagrinėjamas taip pat atskiras atvejis su separabiliniais išlošimais.

GAMES WITH VARIABLE PAYOFFS

E. VILKAS

(*Summary*)

Let the game $< N, f_i(s, R), s\in R=R_1\times\ldots\times R_n, R\in\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\times\ldots\times\mathcal{R}_n$ be given where N is the set of players, $f_i(s, R)$ is payoff of player i in situation $s\in R$ when the game is restricted to situations from $R\in\mathcal{R}$. The strategies are couples (s_i, R_i), $s_i\in R_i$, $R_i\in\mathcal{R}_i$ and $\mathcal{R}_i$ are some systems of R_i which are convex complete subsets of S_i. The game may be thought as a result of processes of negotiations, bargaining, coalitions making etc. The (s^*, R^*) is named global equilibrium point if

$$f_i(s^*, R^*)\geqslant f_i(s_i, s^{*i}, R_i, R^{*i})$$

for all $s_i \in R_i$, $R_i \in \mathcal{R}_i$, and $i \in N$ with $s=(s_i, s^i)$ $R=R_i \times R^i$. If some conditions of concavity of f_i in (s_i, R_i) and continuity in (s, R) the global equilibrium point exists. Some theorems about domination of strategies are proved. We prove also that such a game may be extended to an ordinary game $\langle N, f_i(s, R), S_i \times \mathcal{R}_i \rangle$ preserving the cancavity and continuity of payoff functions.

Let $f_i(s, R)=\varphi_i(s)+\psi_i(R_i)$ and $\Sigma\varphi_i(s)=0$, $s \in S$. A couple (s^*, R^*) is the global equilibrium point if and only if

$$\max_R \Sigma\psi_i(R_i)=\Sigma\psi_i(R_i^*).$$