УДК – 517.54

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ С ОТЛИЧНОЙ ОТ НУЛЯ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТЬЮ

Э. Г КИРЬЯЦКИЙ

1. В настоящей заметке мы продолжим изучение свойств функций из класса $K_n(E)$. Напомним определение этого класса функций [2]. Регулярная и однозначная в единичном круге функция $F(z)$ принадлежит классу $K_n(E)$, если n-я раздельная разность этой функции

$$[z_0 z_1 \quad z_n]_{F(z)} \neq 0$$

при любых попарно различных $z_0, z_1, \ldots, z_n \in E$. В частности, при $n=1$ получаем класс $K_1(E)$ однолистных функций. Во многих работах по однолистным функциям $f(z)$ изучались свойства отношения

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} \qquad z, z_1 \in E. \tag{1}$$

В настоящей работе мы будем рассматривать аналогичное отношение для функции $F(z) \in K_n(E)$, а именно

$$\frac{F(z)-P_{k-1}(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_k)}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{2}$$

где $P_{k-1}(z)$ – многочлен $(k-1)$-й степени, интерполирующий функцию $F(z)$ в точках $z_1, z_2, \quad z_k \in E$. Заметим, что при $n=1$ и $P_0(z)=F(z_1)$ мы получим отношение (1).

В основной части работы рассматриваем отношение (2) при $k=n$, $z_n=0$ и $P_{n-1}(z) \equiv 0$, т. е. полагаем $F(z_1)=F(z_2)= \quad F(z_n)=0$ и изучаем тейлоровские коэффициенты, максимум и минимум модуля отношения (2). Аналогичные вопросы в случае $z_1=z_2= \quad =z_n=0$ мы исследовали ранее в работе [4].

2. Теорема 1. *Если функция $F(z)$ принадлежит классу $K_n(E)$ (E – круг $|z|<1$) и*

$$F(a_1)=F(a_2)= \quad =F(a_{n-1})=0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in E$, то

$$\frac{F(z)}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)} \in K_{n-k}(E), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

В частности, при $K=n-1$ получаем, что функция

$$f(z)=\frac{F(z)}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-1})} \in K_1(E),$$

т. е. является однолистной функцией в единичном круге E.

Эта теорема является частным случаем следующей теоремы, доказанной нами в [3]. Если $F(z)\in K_n(D)$, то при $z_1, z_2, \ldots z_k\in D$ имеем

$$\frac{F(z)-P_{k-1}(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_k)}\in K_{n-k}(D), \qquad 1\leqslant k\leqslant n-1,$$

где $P_{k-1}(z)$ — многочлен, интерполирующий функцию $F(z)$ в точках $z_1, z_2, \ldots, z_k$.

Множество функций $F(z)$, принадлежащих классу $K_n(E)$ и имеющих вид

$$F(z)=(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-1})f(z)=T(z)f(z),$$

где $f(z)$ — однолистная функция, нормированная условиями $f(0)=0, f'(0)=1$, обозначим через $K_n(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, E)$ или просто $K_n(T, E)$. Если $a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=b$, то это множество обозначим через $K_n(b, E)$. Множество соответствующих функций $f(z)$ обозначим $K_n^*(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, E)\equiv K_n^*(T, E)$ и $K_n^*(b, E)$. При $a_1=a_2=\ldots a_{n-1}=0$ и $F^{(n)}(0)=n!$ получаем класс $K_n(0, E)$ нормированных функций $F(z)$

$$F(z)=z^{n-1}f(z)=z^n+a_2z^{n+1}+a_3z^{n+2}+\ldots$$

который изучался нами в [4].

Отметим некоторые свойства введенных нами классов, вытекающие из теоремы 1.

1. Если $F(z)\in K_{n+1}(a_1, a_2, \ldots a_n, E)$, то

$$\frac{F(z)}{z-a_n}\in K_n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, E).$$

2. $K_{n+1}^*\subset K_n^*$

Заметим, что множество однолистных и нормированных в единичном круге E функций будет компактным. Поэтому компактными будут и классы функций $K_n(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, E)$ и $K_n^*(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, E)$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Кроме того, эти классы замкнуты, т. е. предел равномерно сходящейся внутри E последовательности функций из класса K_n или K_n^* принадлежит этому же классу [2]. Отсюда следует, что для любого r, $0<r<1$ существуют функции $F_n(z, r)$ и $\Phi_n(z, r)$, которые принадлежат классу $K_n(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, E)$ и удовлетворяют условиям

$$\max_{|z|=r}|F_n(z,r)|\geqslant\max_{|z|=r}|F(z)|, \qquad |\Phi_n(z,r)|\leqslant\min_{|z|=r}|F(z)|,$$

для любой функции $F(z)\in K_n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, E)$. Назовем функции $F_n(z, r)$ и $\Phi_n(z, r)$ максимальной и минимальной по модулю в классе $K_n(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, E)$. Так как

$$F_n(z, r)=(z-a_1)\ldots(z-a_{n-1})f_n(z, r),$$

$$\Phi_n(z, r)=(z-a_1)\ldots(z-a_{n-1})\Psi_n(z, r),$$

то функциям $F_n(z, r)$ и $\Phi_n(z, r)$ соответствуют максимальная и минимальная по модулю функции $f_n(z, r)$ и $\psi_n(z, r)$ в классе $K_n^*(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, E)$.

Аналогично, для любого натурального n существует функция $f_n(z)\in K_n^*$, имеющая максимальный по модулю k-ый коэффициент в разложении ее в ряд Тейлора. Модуль этого коэффициента обозначим $A_k^{(n)}$, т. е. положим

$$A_k^{(n)}=\max_{f\in K_n^*}|\alpha_k(f)|$$

где

$$f(z)=z+\quad +\alpha_k(f)z^k+$$

Из указанных выше свойств классов K_n и K_n^* легко получить следующие неравенства:

$$\max_{|z|=r}|f_n(z,r)|\geqslant \max_{|z|=r} f_{n+1}(z,r)|, \tag{3}$$

$$\min_{|z|=r}|\Psi_n(z,r)|\leqslant \min_{|z|=r}\Psi_{n+1}(z,r)|, \tag{4}$$

$$A_k^{(n)}\geqslant A_k^{(n} \tag{5}$$

3. Выше мы рассматривали последовательность многочленов $T_n(z)=(z-a_1)(z-a_2)\quad (z-a_n)$ такую, что каждый корень многочлена $T_n(z)$ является корнем многочлена $T_{n+1}(z)$. Введем теперь понятие L-последовательности многочленов. Последовательность многочленов

$$L_0(z)=1,$$

$$L_1(z)=z-a_{11},$$

$$L_2(z)=(z-a_{21})(z-a_{22}).$$

$$L_n(z)=(z-a_{n1})(z-a_{n2})\qquad (z-a_{nn}),$$

с условием $|a_{ij}|\leqslant t<1$, $i, j=1, 2, 3,$ называется L-последовательностью многочленов.

Теорема 2. *Пусть даны L-последовательность многочленов $L_0, L_1, L_2,\ldots$ и последовательность регулярных в единичном круге E функций $f_n(z)$, $f_n(0)=0$, $f_n'(0)=1$, $n=1, 2, 3,$ таких, что*

$$L_{n-1}(z)f_n(z)\in K_n(E).$$

Тогда для любой функции $f(z)$, являющейся пределом равномерно сходящейся внутри E подпоследовательности функций $f_{n_m}(z)$ существует такое число b, $|b|<1$, что $(z-b)^{n-1}f(z)\in K_n(E)$ при любом $n\geqslant 1$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что функции $f_n(z)$ являются однолистными и нормированными в единичном круге E. Образуем последовательность функции

$$(z-a_{11})f_2(z),\ (z-a_{21})f_3(z),\qquad (z-a_{n1})f_{n+1}(z),$$

По теореме 1

$$(z-a_{n1})f_{n+1}(z)\in K_2(E)$$

при любом $n\geqslant 1$. Учитывая условие $|a_{ij}|\leqslant t<1$, получим, что последовательность функций $(z-a_{n1})f_{n+1}\ (z)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, равномерно ограничена внутри E и поэтому из нее можно выделить подпоследовательность функций $(z-a_{n_k1})$ $f_{n_k+1}(z)$, равномерно сходящуюся к некоторой функции $(z-c_1)f(z)$.
При этом функция $f(z)$ есть однолистная и нормированная и

$$(z-c_1)f(z)\in K_2(E).$$

Возьмем теперь последовательность функций

$$(z-a_{n_k 1})(z-a_{n_k 2})f_{n_k+1}(z),\ k=1,\ 2,\ 3, \tag{6}$$

По теорме 1

$$(z-a_{n_k 1})(z-a_{n_k 2})f_{n_k+1}(z)\in K_3(E)$$

при любом $n_k\geqslant 2$. Легко убедиться, что последовательность (6) равномерно ограничена внутри E. Выделим из нее последовательность функций

$$(z-a_{n_{k_i}1})(z-a_{n_{k_i}2})\ f_{n_{k_i}+1}(z),$$

равномерно сходящуюся к функции

$$(z-c_1)(z-c_2)f(z)\in K_3(E).$$

Продолжая этот процесс, мы получим последовательность чисел $c_1,\ c_2,$
$|c_n|\leqslant t<1$, для которой

$$(z-c_1)(z-c_2)\quad (z-c_n)f(z)\in K_{n+1}(E) \tag{7}$$

при любом $n\geqslant 1$. Так как $|c_n|\leqslant t<1$, то из последовательности чисел $c_1,\ c_2,$ $c_3,$ выделим подпоследовательность чисел $b_1,\ b_2,\ b_3,$ сходящуюся к некоторому числу b.

Возьмем теперь произвольное натуральное число m и построим последовательность многочленов $(m-1)$-й степени следующим образом:

$$L_{n,\ m-1}(z)=(z-b_n)(z-b_{n+1})\quad (z-b_{m+n-2}).$$

Пользуясь теоремой 1 и учитывая (7), заключаем, что

$$L_{n,\ m-1}(z)f(z)\in K_m(E).$$

Устремив n к бесконечности, получим

$$\lim_{n\to\infty} L_{n,m-1}(z)f(z)=(z-b)^{m-1}f(z),$$

причем

$$(z-b)^{m-1}f(z)\in K_m(E).$$

Так как m произвольное натуральное число, то теорема доказана.

Теорема 3. *Если*

$$T(z)f(z)\in K_n(E),\ f(0)=0,\ f'(0)=1,$$

где $T(z)=(z-b_1)(z-b_2)\quad (z-b_{n-1}),\ |b_i|<1,\ i=1,\ 2,\quad n-1,$ *то*

$$T(z)\ \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\in K_{n-1}(E)$$

при любом фиксированном $\zeta\in E$.

Доказательство. По условию теоремы и согласно определению класса $K_n(E)$ имеем [6]

$$[z_0 z_1\ \ldots z_{n-1}\zeta]_{T(z)f(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{T(\omega)f(\omega)\,d\omega}{(\omega-z_0)(\omega-z_1)\ldots(\omega-z_{n-1})(\omega-\zeta)}\neq 0,$$

где контур $C\in E$ и содержит внутри себя все точки z_0, z_1, $\zeta\in E$. При фиксированном ζ получим [6]

$$[z_0 z_1 \ .. \ z_{n-1}]_{T(z)f(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{T(\omega)f(\zeta)\,d\omega}{(\omega-z_0)\dots(\omega-z_{n-1})(\omega-\zeta)}\equiv 0.$$

Следовательно,

$$[z_0 z_1 \ . \ z_{n-1}\zeta]_{T(z)f(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{T(\omega)\,\dfrac{f(\omega)-f(\zeta)}{\omega-\zeta}}{(\omega-z_0)\dots(\omega-z_{n-1})}\,d\omega\neq 0.$$

Но,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{T(\omega)\,[\omega\zeta]_f}{(\omega-z_0)\dots(\omega-z_{n-1})}\,d\omega=[z_0 z_1 \ . z_{n-1}]_{T(z)[z\zeta]_f}$$

и поэтому $T(z)\,[zs]_f\in K_{n-1}(E)$.

Теорема 4. *Пусть функция* $F(z)$ *имеет вид*

$$F(z)=(z-b)^{n-1}f(z)=(z-b)^{n-1}(z+a_2z^2+\ \dots)$$

и принадлежит классу $K_n(b,\ E)$. *Тогда для любого фиксированного* ζ *из* E *функция*

$$H(z,\zeta)=(z-b)^{n-2}\left(z+\frac{C_2(\zeta)-bC_3(\zeta)}{1-bC_2(\zeta)}z^2+\frac{C_3(\zeta)-bC_4(\zeta)}{1-bC_2(\zeta)}z^3+\ \right),$$

где

$$C_m(\zeta)=\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\dots-a_{m-1}\zeta^{m-1}}{\zeta^{m-1}f(\zeta)},$$

принадлежит относительно ζ *классу* $K_{n-1}(b,\ E)$.

Доказательство. По теореме 3 функция $H_1(z,\ \zeta)=(z-b)^{n-1}\,[z\zeta]_f$ принадлежит классу $K_{n-1}(E)$. Применяя теорему 1, получим, что функция

$$\Psi_1(z,\zeta)=\frac{H_1(z,\zeta)}{(z-b)^{n-2}}=(z-b)\ [z\,\zeta]_f$$

будет однолистной в E относительно z при любом фиксированном ζ, $|\zeta|<1$. Отсюда следует, что производная функции $\Psi_1(z,\ \zeta)$ в точке $z=0$ не равна нулю, т. е.

$$\Psi_1'(0,\zeta)=\frac{f(\zeta)(\zeta-b)+b\zeta}{\zeta^2}\neq 0 \tag{8}$$

при любом значении ζ, взятом из круга E.

Разложим функцию $\Psi_1(z,\ \zeta)$ в ряд Тейлора относительно z вокруг нулевой точки. Для этого функцию $\Psi_1(z,\ \zeta)$ преобразуем следующим образом:

$$\Psi_1(z,\zeta)=(z-b)\ \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=z\ \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}-b\ \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=$$

$$=\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left(\frac{\zeta z}{f(\zeta)}\ \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)-b\ \frac{f(\zeta)}{\zeta z}\left(\frac{\zeta z}{f(\zeta)}\ \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)=$$

$$=\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left[\left(1-\frac{b}{z}\right)\frac{\zeta z}{f(\zeta)}\ \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right]$$

Как известно [4],

$$\frac{\zeta z}{f(\zeta)}\ \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=z+C_2(\zeta)z^2+C_3(\zeta)z^3+\qquad+C_m(\zeta)z^m+$$

где

$$C_m(\zeta)=\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{m-1}\zeta^{m-1}}{\zeta^{m-1}f(\zeta)}$$

Поэтому

$$\Psi_1(z,\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left(1-\frac{b}{z}\right)\left(\frac{\zeta z}{f(\zeta)}\;\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)=$$

$$=\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left(1-\frac{b}{z}\right)\left(z+c_2(\zeta)z^2+C_3(\zeta)z^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left[-b+\left(1-b\,C_2(\zeta)\right)z+\left(C_2(\zeta)-b\,C_3(\zeta)\right)z^2+\left(C_3(\zeta)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-b\,C_4(\zeta)\right)z^3+\ldots\right]$$

Нормируя функцию $\Psi_1(z,\zeta)$, придем к однолистной и нормированной функции $\Psi(z,\zeta)$

$$\Psi(z,\zeta)=z+\frac{C_2(\zeta)-bC_3(\zeta)}{1-b\,C_2(\zeta)}z^2+\frac{C_3(\zeta)-b\,C_4(\zeta)}{1-b\,C_2(\zeta)}z^3+\ldots$$

причем согласно (8)

$$1-b\,C_2(\zeta)=\frac{\zeta}{f(\zeta)}\;\frac{f(\zeta)(\zeta-b)+b\zeta}{\zeta^2}\neq 0$$

при любом $\zeta\in E$. Так как функция $H_1(z,\zeta)=(z-b)^{n-2}\Psi_1(z,\zeta)$ принадлежит классу $K_{n-1}(E)$, то функция $H(z)=(z-b)^{n-2}\Psi(z,\zeta)$ принадлежит классу $K_{n-1}(bE)$ относительно z и при любом фиксированном $\zeta\in E$. Функция $H(z,\zeta)$ имеет вид, указанный в теореме.

4. **Теорема 5.** *Пусть $a_2^{(n)}(f)$ означает второй коэффициент в разложении аналитической внутри единичного круга E функции $f(z)$ в ряд Тейлора*

$$f(z)=z+a_2^{(n)}(f)z^2+\ldots+a_k^{(n)}(f)z^k+\ldots,$$

принадлежащей классу $K_n^*(b,E)$. Пусть также

$$A_2^{(n)}=\max_{f\in K_n^*(b,E)}|a_2^{(n)}(f)|.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}A_2^{(n)}=1.$

Доказательство. Существование функций $f_n(z)\in K_n^*(b,E)$, для которых $A_2^{(n)}=|a_2^{(n)}(f)|$, а также, что $A_2^n\geqslant A_2^{(n+1)}$ мы уже доказали (см. пункт 2). Из монотонности последовательности $A_2^{(n)}$, $n=1,2,3,\ldots$ следует существование предела, который мы обозначим α_2, т. е. положим $\lim\limits_{n\to\infty}A_2^{(n)}=\alpha_2$. Пользуясь теоремой 2, выделим из последовательности функций $f_n(z)$ подпоследовательность функций $f_{n_m}(z)$, равномерно сходящуюся к регулярной и нормированной однолистной функции $f(z)$, для которой

$$(z-b)^{n-1}f(z)=(z-b)^{n-1}(z+a_2z^2+\ldots)\in K_n(b,E)$$

при любом $n\geqslant 1$. Из сказанного следует также, что $a_2=\alpha_2e^{i\beta}$. По теореме 4 получаем, что функция

$$(z-b)^{n-1}\Psi(z,\zeta)=(z-b)^{n-1}\left(z+\frac{C_2(\zeta)-b\,C_3(\zeta)}{1-b\,C_2(\zeta)}z^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{C_m(\zeta)-b\,(C_{m+1}(\zeta)}{1-b\,C_2(\zeta)}z^m+\ldots\right), \tag{9}$$

где

$$C_m(\zeta)=\frac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2-\ldots-a_{m-1}\zeta^{m-1}}{\zeta^{m-1}f(\zeta)} \tag{10}$$

принадлежит классу $K_{n-1}(b,\ E)$ при любом фиксированном $\zeta\in E$. Из этого следует, что второй коэффициент в разложении (9) удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{C_2(\zeta)-b\,C_3(\zeta)}{1-b\,C_2(\zeta)}\right|\leqslant A_2^{(n-1)}$$

Устремив n к бесконечности, получим

$$\left|\frac{C_2(\zeta)-b\,C_3(\zeta)}{1-b\,C_2(\zeta)}\right|\leqslant \alpha_2, \qquad \zeta\in E.$$

Так как функции $C_2(\zeta)$ и $C_3(\zeta)$ аналитичны в E и $1-bC_2(\zeta)\neq 0$, то функция

$$B_2(\zeta)=\frac{C_2(\zeta)-b\,C_3(\zeta)}{1-b\,C_2(\zeta)}$$

является аналитической функцией от ζ в единичном круге. Кроме того, учитывая (10), имеем

$$B_2(b)=\frac{C_2(b)-b\,C_3(b)}{1-b\,C_2(b)}=\alpha_2 e^{i\beta}=a_2\,.$$

По принципу максимума модуля для аналитических функций получаем

$$\frac{C_2(\zeta)-b\,C_3(\zeta)}{1-b\,C_2(\zeta)}\equiv a_2\,,$$

$$\frac{\dfrac{f(\zeta)-\zeta}{\zeta f(\zeta)}-b\,\dfrac{f(\zeta)-\zeta-a_2\zeta^2}{\zeta^2 f(\zeta)}}{1-b\,\dfrac{f(\zeta)-\zeta}{\zeta f(\zeta)}}\equiv a_2$$

Решая относительно $f(\zeta)$, получаем

$$f(\zeta)=\frac{\zeta}{1-a_2\zeta}$$

Случай $|a_2|>1$ отпадает, так как функция $f(\zeta)$ не имеет полюсов внутри круга E. Значит,

$$\alpha_2\leqslant 1. \tag{11}$$

Далее, функция $f(z)=z\,(1-z)^{-1}$ удовлетворяет условию

$$(z-b)^{n-1}\,\frac{z}{1-z}\in K_n(b,\ E)$$

при любом $n\geqslant 1$ [2]. Второй коэффициент этой функции равен единице. Следовательно,

$$A_2^{(n)}\geqslant A_2^{(n+1)}\geqslant \quad \geqslant 1. \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем окончательно $\alpha_2=1$.

5. **Лемма 1.** а) *Если функция* $f(z)\in K_n^*(0,\ E)$, *то при любом* t, $0\leqslant t<1$, *функция*

$$\frac{f\left(\dfrac{z+t}{1+tz}\right)-f(t)}{(1-t^2)f'(t)}\in K_n^*(-t,\ E).$$

б) *Если для некоторого* t, $0<|t|<1$, *функция* $\varphi(\zeta)\in K_n^*(t, E)$, *то функция*

$$\frac{\varphi\left(\frac{z+t}{1+\bar{t}z}\right)-\varphi(t)}{(1-|t|^2)\varphi'(t)} \in K_n^*|(0, E).$$

Доказательство. Воспользуемся следующей теоремой [4]. Если $F(z)\in K_n(D)$, то функция

$$\Phi(\xi)=(C\xi+d)^{n-1}F\left(\frac{a\xi+b}{C\xi+d}\right)\in K_n(D_1),$$

где область D_1 является прообразом области D при отображении

$$z=\frac{a\xi+b}{c\xi+d}, \qquad ad-bc\neq 0$$

Убедимся в справедливости пункта *а*. Так как по условию $z^{n-1}f(z)\in K_n(0, E)$, то, положив $z=\frac{\zeta+t}{1+\bar{t}\zeta}$ и опираясь на вышеупомянутую теорему, получим

$$(\zeta+t)^{n-1}f\left(\frac{\zeta+t}{1+\bar{t}\zeta}\right)\in K_n(E).$$

Нормируя функцию $f\left(\frac{\zeta+t}{1+\bar{t}\zeta}\right)$, получим

$$\Psi(\zeta)=(\zeta+t)^{n-1}\left[\frac{f\left(\frac{\zeta+t}{1+\bar{t}\zeta}\right)-f(t)}{(1-|t|^2)f'(t)}\right]\in K_n(0, E),$$

откуда $\Psi(\zeta)\in K_n(-t, E)$ и согласно определению класса $K_n^*(-t, E)$ имеем

$$\frac{f\left(\frac{\zeta+t}{1+\bar{t}\zeta}\right)-f(t)}{(1-|t|^2)f'(t)}\in K_n^*(-t, E).$$

Если положить $\zeta=\frac{z+t}{1+\bar{t}z}$ то таким же образом получим справедливость пункта б.

Определение 1. Обозначим через $P(b, E)$ класс регулярных в единичном круге E функций $f(z)$, для которых выполнено условие

$$(z-b)^{n-1}f(z)\in K_n(E)$$

при любом $n\geqslant 1$, где b — фиксированное число и $|b|<1$. Если $b=0$, то класс $P(b, E)$ обозначаем просто $P(E)$. Класс $P(E)$ исследовался нами в [5].

Теорема 6. *Всякая функция из класса $P(E)$ является выпуклой функцией в единичном круге E.*

Доказательство. Пусть $f(z)\in P(E)$. Тогда из леммы 1 следует, что нормированная функция

$$\frac{f\left(\frac{\zeta+t}{1+\bar{t}\zeta}\right)-f(t)}{(1-|t|^2)f'(t)}\in K_n^*(-t, E), \qquad n=1, 2, 3,$$

относительно ζ при любом t, $|t|<1$. Второй коэффициент b_2 этой функции по теореме 5 удовлетворяет условию

$$|b_2|=\frac{1}{2}\left|\left[(1-|t|^2)\frac{f''(t)}{f'(t)}-2\bar{t}\right]\right|\leqslant 1.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $\frac{2|t|}{1-|t|^2}$, получим

$$\left|t\frac{f''(t)}{f'(t)}-\frac{2|t|^2}{1-|t|^2}\right|\leqslant\frac{2|t|}{1-|t|^2}$$

откуда

$$\operatorname{Re}\left\{t\frac{f''(t)}{f'(t)}\right\}+1\geqslant\frac{1-|t|}{1+|t|}>0.$$

Последнее неравенство является достаточным условием для выпуклости функции $f(z)$

Теорема 7. *Всякая функция из класса $P(b, E)$ является выпуклой функцией в единичном круге E.*

Доказательство. Так как $f(z)\in P(b, E)$, то по лемме 1 функция

$$\varphi(z)=\frac{f\left(\frac{z+b}{1+\bar{b}z}\right)-f(b)}{(1-|b|^2)f'(b)}=z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots\in P(E).$$

По теореме 6 функция $\varphi(z)$ является выпуклой функцией в единичном круге E. Ясно, что вместе с функцией $\varphi(z)$ функция $f\left(\frac{z+b}{1+\bar{b}z}\right)$ также будет выпуклой в E. Так как функция $\zeta=\frac{z+b}{1+\bar{b}z}$ взаимно однозначно отображает круг $|z|<1$ на круг $|\zeta|<1$, то и функция $f(\zeta)$ является выпуклой функцией в круге E.

Следствие. *Пусть функция*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_kz^k+\ldots$$

принадлежит классу $P(b, E)$ (в частности $P(E)$).

Тогда для нее справедливы оценки

$$\frac{|z|}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{1-|z|}$$

$$|a_k|\leqslant 1.$$

Равенства достигаются функцией $f(z)=z(1-z)^{-1}$, принадлежащей классу $P(b, E)$. В самом деле, такие оценки верны для любой выпуклой однолистной и нормированной функции [1].

6. Теорема 8. *Пусть $L_0, L_1, L_2, \ldots$ есть L-последовательность многочленов и $A_k^{(n)}$ максимальный по модулю k-й коэффициент в классе функций $f(z)\in K_n^*(L_{n-1}, E)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}A_k^{(n)}=1$.*

Доказательство. Как уже было отмечено, для любого натурального n найдется функция $f_n(z)$, у которой k-й коэффициент по модулю равен $A_k^{(n)}$. Будем доказывать теорему от противного. Предположим, что некоторая подпоследовательность чисел $A_k^{(n_m)}$ имеет предел, отличный от единицы, т. е.

$$\lim_{m\to\infty}A_k^{(n_m)}=A_0\neq 1. \tag{13}$$

Возьмем последовательность указанных выше функций $f_n(z)$ и выделим из нее подпоследовательность функций $f_{n_m}(z)$ так, чтобы каждая функция $f_{n_m}(z)$ имела своим k-ым коэффициентом число, по модулю равное $A_k^{(n_m)}$. По теореме 2 из последовательности функций $f_{n_m}(z)$ выделим подпоследовательность функций $f_{n_{m_t}}(z)$, равномерно сходящуюся к некоторой функции $f(z)$, принадлежащей всем классам $K_n^*(b, E)$, где $|b|<1$. Согласно определению класса $P(b, E)$, функция $f(z) \in P(b, E)$. По теореме 7 функция $f(z)$ будет выпуклой и ее k-й коэффициент равен $A_0 e^{i\alpha}$. В силу выпуклости функции $f(z)$

$$A_0 \leqslant 1. \tag{14}$$

Далее, функция $z(1-z)^{-1}$, как известно [2], удовлетворяет условию

$$L_{n-1}(z) \frac{z}{1-z} \in K_n(E)$$

при любом $n \geqslant 1$. Все коэффициенты функции $z(1-z)^{-1}$ равны единице. Следовательно,

$$A_0 \geqslant 1. \tag{15}$$

Сравнивая (14) и (15), получаем $A_0=1$, что противоречит (13). Итак, любая подпоследовательность $A_k^{(n_m)}$ имеет предел равный единице. Значит и сама последовательность $A_k^{(n)}$ имеет предел, равный единице.

Теорема 9. *Пусть дана L-последовательность $L_0, L_1, L_2,$ многочленов и*

$$M_n(r) = \max_{f \in K_n^*(L_{n-1}, E)} \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

$$\left(m_n(r) = \min_{f \in K_n^*(L_{n-1}, E)} \min_{|z|=r} |f(z)|\right)$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} M_n(r) = \frac{r}{1-r},$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} m_n(r) = \frac{r}{1+r}\right)$$

Эту теорему можно доказать таким же способом как и предыдущую воспользовавшись тем, что для выпуклой однолистной функции $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ имеют место неравенства

$$\frac{r}{1+r} \leqslant |f(z) \leqslant \frac{r}{1-r}, \qquad |z|=r.$$

Замечание. Как известно [1], если

$$f(z) = z + a_2 z^2 +$$

выпуклая однолистная функция и хотя бы один из ее коэффициентов равен по модулю единице или

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \frac{r}{1-r}, \qquad \left(\min_{|z|=r} |f(z)| = \frac{r}{1+r}\right),$$

хотя бы для одного r, то функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \frac{z}{1-e^{i\gamma}z}, \qquad \operatorname{Im}\gamma = 0. \tag{16}$$

Отсюда следует, с учетом предыдущих теорем, что последовательность экстремальных функций $f_n(z) \in K_n^*(L_{n-1}, E)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, имеющих максимальные по модулю k-е коэффициенты $A_k^{(n)}e^{i\alpha_n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ сходится к функции вида (16).

Тоже самое можно сказать и о последовательности экстремальных функций $f_n(z, r) \in K_n^*(L_{n-1}, E)$ или $\Psi_n(z, r) \in K_n^*(L_{n-1}, E)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, определенных нами в пункте 2.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
20.I.1969

Литература

1. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, М., 1966.
2. Э. Г. Кирьяцкий, О функциях, n-я разделенная разность которых не равна нулю, Лит. матем. сб., I, № 1—2 (1961), 109—116.
3. Э. Г. Кирьяцкий, Некоторые свойства функций, разделенная разность которых не равна нулю, Лит. матем. сб., II, № 1 (1962), 55—60.
4. Э. Г. Кирьяцкий, О функциях с разделенной разностью, отличной от нуля, Лит. матем. сб., III, № 1 (1963), 157—168.
5. Э. Г. Кирьяцкий, Некоторые экстремальные задачи в классах $K_n(E)$ и $P(E)$, Лит. матем. сб., III, № 2 (1963), 83—90.
6. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, М.—Л., 1952.

FUNKCIJŲ, KURIŲ PADALYTAS SKIRTUMAS NELYGUS NULIUI, KAI KURIOS EKSTREMALINĖS SAVYBĖS

E. KIRJACKIS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjamos analizinės vienetiniame skritulyje E funkcijos, kurių n-tos eilės padalytas skirtumas $[z_0 z_1 \quad z_n]$ nelygus nuliui bet kuriems $z_0, z_1, \ldots, z_n \in E$. Tokių funkcijų klasę žymime $K_n(E)$ ($K_1(E)$ sutampa su vienalapių skritulyje E funkcijų klase).

Daugelyje darbų, liečiančių vienalapes funkcijas $f(z)$, buvo nagrinėjamas santykis

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}, \qquad z, z_1 \in E.$$

Šiame straipsnyje nagrinėjamas analogiškas santykis

$$\frac{F(z)-P_{n-1}(z)}{(z-z_1)\ldots(z-z_n)}$$

Čia $z_k \in E$, $k=1, 2, \ldots, n$, $F(z) \in K_n(E)$ ir $P_{n-1}(z)$ yra $(n-1)$ laipsnio polinomas, tenkinantis sąlygas $F(z_k)=P_{n-1}(z_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$.

EINIGE EXTREMALEIGENSCHAFTEN DER FUNKTIONEN, DIE KEINE NULLGLEICHE DIVIDIERTE DIFFERENZ HABEN

E. KIRJACKIS

(Zusammenfassung)

Es werden die im Einheitskreise E analytischen Funktionen $F(z)$ betrachtet, wobei angenommen wird, dass ihre dividierte Differenz n-ter Ordnung $[z_0 z_1 \ldots z_n]$ für beliebige $z_0, z_1, \ldots, z_n \in E$

nicht gleich Null ist. Die Klasse solcher Funktionen bezeichnen wir mit $K_n(E)$ ($K_1(E)$ ist offensichtlich mit der Klasse der im Bereiche E schlichten Funktionen identisch).

In mehreren Arbeiten über die schlichten Funktionen $f(z)$ wurde der Quotient

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}, \qquad z, z_1 \in E$$

untersucht. In dieser Arbeit betrachten wir den analogen Quotient

$$\frac{F(z)-P_{n-1}(z)}{(z-z_1)\dots(z-z_n)},$$

wo $z_k \in E$, $k=1, 2, \dots, n$, $F(z) \in K_n(E)$ und $P_{n-1}(z)$ das für $z=z_1, z_2, \dots, z_n$ mit $F(z)$ übereinstimmende Polynom $(n-1)$-ten Grades ist.