X LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4

1970

УДК 511

ТЕОРЕМА МАЛЕРА—СПРИНДЖУКА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. (II)

Р. СЛЕСОРАЙТЕНЕ

Пусть

$$P(x, y)=a_{111}x^3+a_{112}x^2y+a_{122}xy^2+a_{222}y^3+a_{113}x^2+$$
$$+a_{123}xy+a_{223}y^2+a_{133}x+a_{233}y+a_{333}$$

полином с целыми коэффициентами a_{ijl} $(1\leqslant i,\ j,\ l\leqslant 3)$, причем среди них $10-n$ $(1\leqslant n\leqslant 10)$ фиксированных равны нулю, иными словами соответствующие члены полинома отсутствуют, а h – высота полинома $P(x, y)$: $h=\max|a_{ijl}|$, $1\leqslant i,\ j,\ l\leqslant 3$.

Обозначим через $\mathfrak{p}_1$ класс $P(x, y)$, удовлетворяющих условию $a_{111}\cdot a_{222}\cdot a_{333}=0$, а через $\mathfrak{p}_2$ класс $P(x, y)$, для которых $a_{111}\cdot a_{222}\cdot a_{333}\neq 0$.

Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 1. *При любом фиксированном* $\varepsilon>0$ *почти для всех действительных* (x, y) *неравенство*

$$|P(x, y)|<h^{-n+1-\varepsilon} \tag{1}$$

$(1\leqslant n\leqslant 9)$ *имеет лишь конечное число решений в полиномах* $P\in\mathfrak{p}_1$.

Теорема 2. *При любом фиксированном* $\varepsilon>0$ *почти для всех действительных* (x, y) *неравенство*

$$|P(x, y)|<h^{-9-\varepsilon} \tag{2}$$

имеет лишь конечное число решений в полиномах $P\in\mathfrak{p}_2$.

Доказательство теоремы 1. А. Докажем теорему для полиномов, удовлетворюящих условию $a_{222}=0$.

Пусть $v, l, c, 0<c<\frac{1}{2}$, ρ, $\rho>0$, – фискированные числа, $v\ (v+1)>0$, $l\ (l+1)>0$, $\min(|v|, |v+1|)\geqslant\rho$, $\min(|l|, |l+1|)\geqslant\rho$, а T_{vl} – прямоугольник; $x\in\Delta'=(v+c,\ v+1-c)$, $l\leqslant y<l+1$. Можем ограничиться [5] (x, y) из прямоугольника T_{vl}.

Обозначим через $Q_h(O)$ меру множества тех $(x, y)\in T_{vl}$, для которых (1) справедливо хоть одним полиномом $P(x, y)\in O$ высоты h.

Пусть q_P – мера множества тех $(x, y)\in T_{vl}$, для которых (1) выполняется фиксированным полиномом $P(x, y)$ высоты h.

Пусть $D(x_0)$ – дискриминант полинома $P_1(y)=P(x_0, y)$:

$$D(x)=d_1x^4+d_2x^3+d_3x^2+d_4x+d_5,$$

где

$$d_1 = a_{112}^2 - 4a_{122} \cdot a_{111},$$

$$d_2 = 2a_{112} \cdot a_{123} - 4a_{122} \cdot a_{113} - 4a_{111} \cdot a_{223},$$

$$d_3 = a_{123}^2 + 2a_{112} \cdot a_{233} - 4a_{122} \cdot a_{133} - 4a_{113} \cdot a_{223},$$

$$d_4 = 2a_{123} \cdot a_{233} - 4a_{122} \cdot a_{333} - 4a_{133} \cdot a_{223},$$

$$d_5 = a_{233}^2 - 4a_{333} \cdot a_{223}. \tag{3}$$

Обозначим через $\alpha_j = \Theta_j + i\sigma_j$ $(1 \leqslant j \leqslant 4)$ — корни полинома $D(x)$. Пусть $\Delta = (v, v+1)$, а l — число Θ_j, принадлежащих Δ. Индексы j можем подобрать так, чтобы $\Theta_j \in \Delta$, $\Theta_1 \leqslant \Theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \Theta_l$ $(1 \leqslant j \leqslant l)$. Имеем [5]:

$$q_P \leqslant 8h^{-n-\varepsilon} + 8h^{-n+1-\varepsilon} \int\limits_{\Omega'_*} \frac{dx}{\sqrt{|D(x)|}}, \tag{4}$$

где Ω'_* — множество тех $x \in \Delta'$, для которых

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant l} |x - \Theta_i| > h^{-n-\varepsilon}.$$

1. Пусть A_{1n} — класс полиномов, для которых

а) $D(x)$ не имеет кратных корней,

б) $D(x)$ не равен тождественно нулю.

1.1. Если $B_{1n} \subset A_{1n}$ класс $P(x, y)$, удовлетворяющих условиям:

а) $d_1 \neq 0$, $a_{111} \cdot a_{112} \cdot a_{122} \neq 0$,

б) хоть один из коэффициентов $|a_{111}|$, $|a_{333}|$ не равен ни нулю, ни высоте полинома.

То почти для всех (x, y) (1) имеет лишь конечное число решений в полиномах $P \in B_{1n}$ [5].

Пусть $l \leqslant 2$, а d_k $(1 \leqslant k \leqslant 5)$ — первый неравный нулю коэффициент $D(x)$. Имеем [5] оценку:

$$\int\limits_{\Omega'_*} \frac{dx}{\sqrt{|D(x)|}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{|d_k|}} \ln h.$$

Допустим, что d_i выражается через u $(1 \leqslant u \leqslant 7)$ неравных нулю коэффициентов a_{ijl} $(1 \leqslant i, j, l \leqslant 3)$. Докажем, что всегда сумма по u таким коэффициентам:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{|d_k|}} \ll h^{u-2+\frac{\varepsilon}{4}}, \tag{5}$$

если среди них один коэффициент по абсолютной величине равен h, и

$$\sum \frac{1}{\sqrt{|d_k|}} \ll h^{u-1+\frac{\varepsilon}{4}} \tag{6}$$

в противном случае.

Отсюда, ввиду (4), для каждого класса $V \subset A_n$ полиномов P, удовлетворяющих условиям: $d_j=0$ $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$, $d_k \neq 0$ $(1 \leqslant k \leqslant 5)$, k – фиксирован, будем иметь:

$$\sum_{\substack{P \in V,\\ l \leqslant 2}} q_P \ll h^{-n+1-\varepsilon} \ln h \left(h^{u-2+\frac{\varepsilon}{4}} h^{n-u} + h^{u-1+\frac{\varepsilon}{4}} h^{n-u-1}\right) \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{4}} \tag{7}$$

В случае $l \geqslant 3$ обозначим через δ наибольшее из чисел $\Theta_{i+1}-\Theta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l-1)$, а через γ – следующее за ним по величине. Класс $V_1 \subset p_1$ тех $P(x, y)$, для которых $l=3$ разделим на подклассы $V_s^* \subset V_1\left(s=1, \ldots, 2\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\right]+3\right)$, где классу V_s^* принадлежат те $P(x, y)$, для которых $h^{-s\varepsilon_1} \leqslant \max(\delta, \sigma_t) < h^{(-s+1)\varepsilon_1}$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, $\sigma_t > 0$. Обозначим через $K(a_{i_0 j_0 l_0})$ число различных значений, приобретаемых коэффициентом $a_{i_0 j_0 l_0}$ при фиксированных $\max(\delta, \sigma_t)$ и всех других значениях коэффициентов a_{ijl}, $ijl \neq i_0 j_0 l_0$.

Докажем, что для класса V_s^* всегда найдется такой коэффициент $a_{i_0 j_0 l_0}$ $(1 \leqslant i_0, j_0, l_0 \leqslant 3)$, не входящий в d_k, что

$$K(a_{i_0 j_0 l_0}) \ll \frac{h^{(-s+1)\varepsilon_1} |d_k|}{|a_{i_1 j_1 l_1}|},$$

если $\frac{|d_k| \max(\delta, |\sigma_t|)}{|a_{i_1 j_1 l_1}|} > 1$, и $K(a_{i_0 j_0 l_0}) \ll 1$ – в противном случае.

Из доказанной в [5] леммы 2 следует, что

$$\int_{\Omega_s'} \frac{dx}{\sqrt{|D(x)|}} \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|d_k| \max\limits_{1 \leqslant t \leqslant 2}(\delta, \sigma_t)}}$$

и что

$$\int_{\Omega_s'} \frac{dx}{\sqrt{|D(x)|}} \ll \frac{h \ln h}{\sqrt{|d_k|}}.$$

Из двух последних оценок, (5), (6) и (4), следует, что

$$Q_h(V_1) \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

Отсюда из леммы Бореля – Кантелли [2] получим, что (1) для почти всех (x, y) имеет лишь конечное число решений в полиномах из класса V_1. Аналогично поступаем и в случае $l=4$. Так как все множество A_{1n} мы будем разбивать на конечное число классов, то из справедливости теоремы для каждого класса следует ее справедливость для всего A_{1n}.

Ввиду вышесказанного, чтобы доказать утверждение теоремы достаточно:

а) в случае $l \leqslant 2$ получить оценки (6) и (7),

б) если $l \geqslant 3$, найти такой коэффициент $a_{i_0 j_0 l_0}$, для которого $K(a_{i_0 j_0 l_0})$ можем оценить указанным образом.

1.2. Пусть $B_{2n} \subset A_{1n}$ класс полиномов, для которых *а*) $d_1 \neq 0$, *б*) $a_{111} \cdot a_{112} \cdot a_{122} = 0$, *в*) хоть один из $|a_{111}|$, $|a_{333}|$ не равен ни нулю, ни высоте полинома.

Если $l \leqslant 2$, то при $a_{112}=0$

$$\sum_{a_{111},\, a_{122}} \frac{1}{\sqrt{|d_1|}} = \frac{1}{2} \sum_{a_{111},\, a_{122}} \frac{1}{\sqrt{|a_{111} \cdot a_{122}|}} \ll h, \tag{8}$$

а при $a_{111}\cdot a_{122}=0$

$$\sum_{a_{112}}\frac{1}{\sqrt{|d_1|}}=\sum_{a_{112}}\frac{1}{|a_{112}|}\ll\ln h. \tag{9}$$

Утверждение теоремы для класса B_{2n} теперь следует аналогично [5].

1.3. Пусть $B_{3n}\subset A_{1n}$ класс полиномов, для которых *а*) $d_1\neq 0$, $d_5\neq 0$, *б*) хоть один из $|a_{113}|$, $|a_{133}|$ не равен ни нулю, ни высоте полинома. Если $l\leqslant 2$, то в силу [5], (8) и (9)

$$\sum_{P\in B_{3n},\ l\leqslant 2} q_P\ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

Пусть $l=3$, и все корни $D(x)$ — действительные числа. Положим, для определенности, что $0<|a_{113}|<h$. $\left(\text{В случае } 0<|a_{133}|<h \text{ достаточно взять вместо полинома } D(x) \text{ полином } D^*(x)=x^4 D\left(\frac{1}{x}\right).\right)$ Пусть даны значения всех коэффициентов, кроме a_{113}. Тогда ввиду (3), коэффициенты d_1, d_4 и d_5 имеют фиксированные значения. По формуле Вьета:

$$\Theta_4=\frac{d_5}{d_1\left(\Theta_1^3+O(\delta)\right)}, \tag{10}$$

где $x=O(\delta)$, означает, что $(x)\leqslant c\delta$, $c>0$ константа, не зависящая от h. Применив формулу Вьета для d_4, имеем:

$$d_4=-d_1\left(\Theta_1^3+O(\delta)+\Theta_4\left(3\Theta_1^2+O(\delta)\right)\right)$$

или ввиду (10)

$$d_1\Theta_1^6+d_4\Theta_1^3+3d_5\Theta_1^2+\max(|d_1|,\ |d_5|)\cdot O(\delta)=0.$$

Деля обе стороны уравнения на Θ_1^2 и имея ввиду, что $\Theta_1\in[v,\ v+1)$, получаем:

$$d_1\Theta_1^4+d_4\Theta_1+3d_5+\max(|d_1|,\ |d_5|)\cdot O(\delta)=0. \tag{11}$$

Исследуем уравнение

$$d_1u^4+d_4u+3d_5=0. \tag{12}$$

Ввиду формул Вьета:

$$\begin{aligned} u_1+u_2&=-(u_3+u_4),\\ u_1u_2&=u_3^2+u_3u_4+u_4^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда

$$u_{1,2}=\frac{-(u_3+u_4)\pm\sqrt{(u_3+u_4)^2-4(u_3+u_4)^2+4u_3u_4}}{2},$$

и, наоборот,

$$u_{3,4}=\frac{-(u_1+u_2)\pm\sqrt{-3(u_1+u_2)^2+4u_1u_2}}{2}.$$

Следовательно, все четыре корня u_j $(1\leqslant j\leqslant 4)$ не могут быть действительными.

Разберем, например, случай: u_1, u_2 — действительные, u_3, u_4 — комплексно-сопряженные. (Аналогично и в случае, когда все четыре корня комплексно-сопряженные.) Так как

$$d_4 = -d_1 (u_1 + u_2)(u_1^2 + u_2^2),$$
$$d_5 = d_1 u_1 u_2 (u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2), \tag{14}$$

и из свойств полинома $D(x)$ следует, что справедливо одно из соотношений: 1) $|d_1| \asymp |d_4|$, $|d_5| \ll |d_1|$, 2) $|d_4| \asymp |d_5|$, $|d_1| \ll |d_5|$, 3) $|d_1| \asymp |d_5|$, $|d_4| \ll |d_1|$, то возможны следующие случаи: *а*) $u_1 \to 0$, $0 < c_6 < |u_2| < c_7$, когда $h \to \infty$, где c_6, c_7 не зависят от h, *б*) $c_6 < |u_1|$, $|u_2| < c_7$ при $h \to \infty$, *с*) $c_6 < |u_1| < c_7$, $u_2 \to \infty$, когда $h \to \infty$.

В случаях *а*), *б*) ввиду (11) и леммы 2 [5]

$$|\Theta_1 - u_i| \ll \frac{\max(|d_1|, |d_5|) \cdot O(\delta)}{|d_1|} = O(\delta),$$

где u_i — ближайший к Θ_1 корень уравнения (12). В случае *в*) $|u_3| \to \infty$, $|u_4| \to \infty$ при $h \to \infty$, и

$$|\Theta_1 - u_1| \ll \frac{\max(|d_1|, |d_5|) \cdot O(\delta)}{|d_1| |u_2|^3} = O(\delta),$$

ибо $|d_1| |u_2|^3 \asymp |d_5|$. Отсюда

$$\Theta_4 = \frac{d_5}{d_1 u_i^3} + \frac{|d_5|}{|d_1|} \cdot O(\delta).$$

Ввиду определения класса A_{1n}, хоть один из a_{122}, a_{223}, например a_{223}, не равен нулю. Из формулы Вьета для d_3 следует, что при фиксированном δ коэффициент d_3 может приобрести $\ll \max(|d_1|), |d_5|) O(\delta)$ различных значений, а для коэффициента a_{113}:

$$K(a_{113}) \ll \frac{\max(|d_1|, |d_5|) O(\delta)}{|a_{223}|}.$$

Далее рассуждаем аналогично [5].

В случае $l=3$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$, $\sigma_1 > 0$, $\alpha_3 = \Theta_3$, обозначив через $C = \max(\delta, \sigma_1)$, можем получить оценку:

$$K(a_{133}) \ll \frac{\max(|d_1|, |d_5|) \cdot O(C)}{|a_{22i}|},$$

где $i=1$ или 3.

В случае $l=4$ вместо δ или C берем соответственно величины, выбранные в лемме 2 [5] и рассуждаем аналогично случаю $l=3$:

1.4. Пусть B_{4n} — класс полиномов, для которых $d_1 \neq 0$, $d_5 \neq 0$, один из $|a_{111}|$, $|a_{113}|$, $|a_{133}|$, $|a_{333}|$ равен высоте полинома, остальные равны нулю. Возьмем, для определенности, что $|a_{333}| = h$, $a_{111} = a_{113} = a_{133} = 0$. Тогда a_{122} или a_{223} входит только в один коэффициент полинома $D(x)$ (d_4 или d_5), и аналогично рассмотренным классам B_{in} ($i=1$, 2, 3) можем оценить $K(a_{122})$ или $K(a_{223})$.

1.5. Обозначим через B_{5n} — класс полиномов, для которых $d_1 = 0$ или $d_5 = 0$.

Если $d_2 \neq 0$, то хоть одно из произведений $a_{122} \cdot a_{113}$, $a_{111} \cdot a_{223}$, $a_{112} \cdot a_{123}$ не равно нулю. Следовательно, хоть один из коэффициентов a_{111}, a_{112}, a_{122} не равен нулю. Ввиду условия

$$d_1 = a_{112}^2 - 4a_{111} \cdot a_{122} = 0$$

или ни один из a_{111}, a_{112}, a_{122} не равен нулю, или $a_{112}=0$ и один из a_{111}, a_{122} равен нулю. В первом случае хоть один из a_{111}, a_{112}, a_{122} может приобрести $\ll \ln h$ различных значений при фиксированных двух остальных коэффициентах. Во втором случае лишь одно из произведений $a_{111} \cdot a_{223}$, $a_{112} \cdot a_{123}$, $a_{122} \cdot a_{113}$, например $a_{111} \cdot a_{223}$, не равно нулю. Отсюда

$$\sum_{a_{111},\, a_{223}} \frac{1}{\sqrt{|d_2|}} = \frac{1}{2} \sum_{a_{111},\, a_{223}} \frac{1}{\sqrt{|a_{111} \cdot a_{223}|}} \ll h.$$

Если $d_1 = d_2 = 0$, то обязательно $l \leqslant 2$. Так как полином $D(x)$ не равен нулю тождественно, то хоть один из d_k $(3 \leqslant k \leqslant 5)$ не равен нулю. Взяв полином $D^*(x) = x^2 D\left(\frac{1}{x}\right)$ вместо $D(x)$, случай $d_5 \neq 0$ или $d_4 \neq 0$ можем рассматривать аналогично случаям $d_1 \neq 0$ или $d_2 \neq 0$ соответственно. Остается разобрать лишь те $P(x, y)$, для которых $d_1 = d_2 = d_4 = d_5 = 0$, $d_3 \neq 0$. Возможны случаи: а) ни один из a_{111}, a_{112}, a_{122} или ни один из a_{223}, a_{233}, a_{333} не равен нулю, б) $d_3 = a_{123}^2 - 4a_{122} \cdot a_{133}$. Первый случай нами уже рассмотрен. Во втором случае

$$\sum_{a_{122},\, a_{123},\, a_{133}} \frac{1}{\sqrt{|d_3|}} = \sum_{a_{122},\, a_{123},\, a_{133}} \frac{1}{\sqrt{|a_{123}^2 - 4a_{122} \cdot a_{133}|}} \ll h^2 \ln h.$$

Следовательно,

$$\sum_{P \in B_{5n},\, l \leqslant 2} q_p \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

В случае $l=3$, $d_1=0$ ни один из коэффициентов d_2, d_3, d_4, d_5 не равен нулю.

Если $|a_{111}|$ или $|a_{113}|$ не равен ни нулю, ни высоте полинома, то, рассматривая полином $D^*(x) = x^3 D\left(\frac{1}{x}\right)$ вместо $D(x)$, имеем

$$-d_4 = d_5 \left(3\Theta_1^* + O(\delta)\right),$$

где d_4 и d_5 не зависят ни от a_{111}, ни от a_{113}, $\Theta_1^* = \frac{1}{\Theta_1}$. Отсюда

$$\Theta_1^* = -\frac{d_4}{3d_5} + O(\delta). \tag{15}$$

В случае, когда $|a_{333}|$ не равен ни нулю, ни высоте полинома, d_2 и d_3 не зависят от a_{333}, и опять можем получить оценку, аналогичную (15).

И, наконец, если $|a_{133}|$ не равен ни нулю, ни высоте полинома, то d_2 и d_5 не зависят от a_{133}. Так как

$$|d_2|\,(|\Theta_1| - c_8\delta)^3 \leqslant |d_5| \leqslant |d_2|\,(|\Theta_1| + c_8\delta)^3,$$

то

$$\sqrt[3]{\frac{d_5}{d_2}} - c_8\delta \leqslant \Theta_1 \leqslant \sqrt[3]{-\frac{d_5}{d_2}} + c_8\delta.$$

Далее рассуждаем аналогично случаю $d_1 \neq 0$.

Ввиду всего сказанного

$$Q_h(A_{1n}) \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

2. Пусть A_{2n} — класс полиномов $P(x, y)$, для которых $D(x) \equiv 0$, $\min(|a_{122}|, |a_{223}|) \neq 0$.

Если $x = x_0$ — фиксированное число, то, решив уравнение $P_1(y) = 0$ ввиду условия $D(x_0) = 0$ имеем

$$y_1 = y_2 = -\frac{a_{112}x_0^2 + a_{123}x_0 + a_{233}}{a_{122}x_0 + a_{223}},$$

лишь только $a_{122}x_0 + a_{223} \neq 0$.

Из формулы

$$P(x_0, y) = (a_{122}x_0 + a_{223})(y - y_1)^2$$

следует

$$(a_{122}x + a_{223})P(x, y) = (a_{122}xy + a_{223}y + a_{112}x^2 + a_{123}x + a_{233})^2. \tag{16}$$

Если $a_{122} = 0$, то

$$a_{223}P(x, y) = (a_{223}y + a_{123}x + a_{233})^2. \tag{17}$$

Отсюда

$$P(x, y) = (e_1y + e_2x + e_3)(f_0x + f_2y + f_3),$$

где e_i, f_i $(i = 1, 2, 3)$ — целые числа. В случае $a_{122} \neq 0$ пусть $(a_{122}, a_{223}) = d$, $\frac{a_{122}}{d} = a'_{122}$, $\frac{a_{223}}{d} = a'_{223}$. Тогда из (16) следует, что обязательно

$$a_{112}x^2 + a_{123}x + a_{233} = (a'_{122}x + a'_{223})(g_1x + g_2),$$

где g_i $(i = 1, 2)$ — целые числа.

Следовательно, $P(x, y)$ — приводимый в кольце целых чисел полином. Возможно представление:

$$P(x, y) = (e_1xy + e_2y + e_3x^2 + e_4x + e_5)(f_1y + f_2x + f_3),$$

где все e_i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, f_j $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ — целые числа, причем среди коэффициентов e_i имеется неравных нулю не больше чем $p = \max(3, t)$, где t — число неравных нулю коэффициентов в системе $\{a_{122}, a_{223}, a_{112}, a_{123}, a_{233}\}$.

В силу [4] при $h > h_0$ для почти всех (x, y)

$$|P(x, y)| \geqslant h_1^{-p+1-\varepsilon} \cdot h_2^{-2-\varepsilon}, \quad h_1h_2 \ll h \; [2],$$

где $h_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 5} |e_i|$, $h_2 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant 3} |f_j|$.

Если $n \geqslant 3$, то из последнего неравенства

$$|P(x, y)| > h^{-n+1-\varepsilon}, \quad h > h_0.$$

В случае $n = 1$ утверждение теоремы тривиально.

Пусть $n = 2$. Если $a_{122} = 0$, то в силу (17) полином $P(x, y)$ не выше второй степени, и теорема доказана [4].

Если $a_{122} \neq 0$, ввиду (16), возможны следующие случаи:

а) $a_{122} \neq 0$, $a_{223} \neq 0$,

б) $a_{122} \neq 0$, $a_{112} \neq 0$,

в) $a_{122}\neq 0$, $a_{123}\neq 0$,

г) $a_{122}\neq 0$, $a_{233}\neq 0$.

а) Почти для всех $(x, y)\in T_{vl}$

$$|P(x, y)|=|a_{122}xy^2+a_{223}y^2|=|y|^2\cdot|a_{123}x+a_{223}|\gg h^{-1-\varepsilon}, \quad h>h_0,$$

ввиду условия $|y|\geqslant\rho$ и того, что теорема справедлива для полиномов первой степени.

б) $|P(x, y)|=|a_{122}xy^2+a_{112}x^2y|=|xy|\,|a_{122}x+a_{112}y|\gg h^{-1-\varepsilon}$, $h>h_0$.

(Рассуждаем аналогично случаю а).)

в) $|P(x, y)|=|a_{122}xy^2+a_{123}xy|=|xy|\cdot|a_{122}y+a_{123}|\gg h^{-1-\varepsilon}$, $h>h_0$.

г) $|P(x, y)|=|a_{122}xy^2+a_{233}y|=|y|\,|a_{122}xy+a_{233}|\gg h^{-1-\varepsilon}$, $h>h_0$,

ввиду справедливости теоремы для полиномов второй степени.

Следовательно, теорема справедлива для всех полиномов из A_{2n}.

3. Пусть A_{3n} — класс полиномов, для которых $a_{122}=a_{223}=0$. Тогда $P_1(y)=P(x_0, y)$ — полином не более первой степени относительно y:

$$P_1(y)=(a_{112}x_0^2+a_{123}x_0+a_{233})\,y+a_{111}x_0^3+a_{113}x_0^2+a_{133}x_0+a_{333}.$$

В случае $a_{112}=a_{123}=a_{233}=0$ неравенство

$$|P(x, y)|>h^{-n+1-\varepsilon}, \quad h>h_0$$

почти для всех (x, y) следует из [3].

Поэтому достаточно рассмотреть те $P(x, y)$, для которых $d(x)=a_{112}x^2+a_{123}x+a_{233}$ — не равен тождественно нулю. Если $\sigma_P(x_0)$ мера тех $y\in[l, l+1)$ на прямой $x=x_0$, для которых справедливо (1), то

$$\sigma_P(x_0)\leqslant 2\,\frac{h^{-n+1-\varepsilon}}{|d(x_0)|},$$

лишь только $d(x_0)\neq 0$.

Если $\alpha_k^*=\Theta_k^*+i\sigma_k^*$ $(k=1, 2)$ — корни $d(x)$, l^* — число α_k^*, для которых $\Theta_k^*\in\Delta$, $\Theta_1^*\leqslant\Theta_2^*$, а Ω_1^{**} — множество тех $x\in\Delta'$, для которых

$$\min_{1\leqslant k\leqslant l^*}|x-\Theta_k^*|>h^{-n-\varepsilon},$$

то

$$q_P\ll h^{-n-\varepsilon}+\int\limits_{\Omega_1^{**}}\frac{dx}{|d(x)|}.$$

В случае $l^*=0$ или 1

$$\int\limits_{\Omega_1^{**}}\frac{dx}{|d(x)|}\ll\frac{\ln h}{|b_1|},$$

где b_1 — первый неравный нулю коэффициент полинома $d(x)$. Отсюда

$$\sum_{\substack{P\in A_{3n},\\ l^*=0,\,1}} q_P\ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{4}} \tag{18}$$

Если $l^*=2$, $\alpha_i^*=\Theta_i^*$ $(i=1,\ 2)$, т. е. корни $d(x)$ — действительные числа, то

$$\int\limits_{\Omega_1^{**}} \frac{dx}{|d(x)|} \ll \frac{\ln h}{|a_{112}|\,\delta^*},$$

где

$$\delta^*=|\Theta_1^*-\Theta_2^*|.$$

В силу формул Вьета:

$$a_{123}=-a_{112}(2\Theta_1^*+\delta^*),$$

$$a_{233}=a_{112}\Theta_1^*(\Theta_1^*+\delta^*),$$

$\Theta_1^*\Theta_2^*>0$. Следовательно, $a_{123}\neq 0$, $a_{233}\neq 0$.

Пусть $K^*(a_{i_0 j_0 l_0})$ — число различных значений, приобрести которые может $a_{i_0 j_0 l_0}$ при фиксированном δ^* и остальных коэффициентах. Если $|a_{123}|<h$, то из первой формулы

$$K^*(a_{123})\ll\delta^*|a_{112}|,$$

в случае $\delta^*|a_{112}|\geqslant 1$, и равно 0 или $\ll 1$, в противном случае. В случае $|a_{123}|=h$ оцениваем $K^*(a_{233})$.

Из определения дискриминанта $d(x)$:

$$a_{112}^2\delta^{*2}\geqslant 1$$

или

$$\delta^*\geqslant\frac{1}{|a_{112}|}.$$

Далее рассуждаем аналогично [5].

Если $\alpha_1^*=\Theta_1^*+i\sigma_1^*$, $\sigma_1^*>0$, $\bar{\alpha}_2^*=\alpha_1^*$, $\Theta_1^*\in\Delta$, то

$$|D(d)|=4a_{112}^2\sigma_1^{*2}=|a_{123}^2-4a_{112}\cdot a_{233}|.$$

И, наконец, пусть $l^*=2$, $D(d)=0$, т. е. $d(x)$ имеет кратный корень $\alpha_1^*=\alpha_2^*=\Theta_1^*\in\Delta$. Тогда $d(x)=(f_1x+f_2)^2$, где f_i $(i=1,\ 2)$ — целые числа, $\max\limits_{i=1,2}|f_i|\leqslant\sqrt{h}$.

Множество тех $(x,\ y)$, для которых $|P(x,\ y)|<h^{-n+1-\varepsilon}$ делим на два: A_P и B_P. Назовем через A_P множество тех $(x,\ y)\in T_{vl}$, для которых $|P(x,\ y)|<h^{-n+1-\varepsilon}$, $|f_1x+f_2|\geqslant h^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{6}}$, а через B_P множество тех $(x,\ y)\in T_{vl}$, для которых $|P(x,\ y)|<h^{-n+1-\varepsilon}$, $|f_1x+f_2|<h^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{6}}$ Обозначим через $q_P'=mA_P$, $q_P''=mB_P$. Имеем: $q_P=q_P'+q_P''$.

Если для точки $(x,\ y)$ (1) имеет бесконечно много решений в рассматриваемых полиномах, то $(x,\ y)$ принадлежит к бесконечному числу множеств A_P или B_P.

Пусть Σ — множество тех $(x,\ y)$, которые принадлежат к бесконечному числу множеств B_P.

Если F_P — множество тех $(x,\ y)\in T_{vl}$, для которых $|f_1x+f_2|<h^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{6}}$, а σ множество тех $(x,\ y)$, которые принадлежат к бесконечному числу множеств

F_P, то $\Sigma\subset\sigma$. Так как $m\sigma=0$, то и $m\Sigma=0$. Для (x, y) из A_P имеем: $|d(x)|\gg$ $\gg h^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{6}}$ Отсюда

$$\int\limits_{\Omega_1^{**}} \frac{dx}{|d(x)|} \ll h^{1+\frac{\varepsilon}{3}}$$

Из условия $D(d)=0$ имеем: $a_{123}^2-4a_{112}\cdot a_{233}=0$.

Если ни один из $|a_{112}|$, $|a_{233}|$ не равен ни нулю, ни высоте полинома $P(x, y)$, то при фиксированном a_{123} коэффициенты a_{112}, a_{233} могут приобрести по $\ll h^{\frac{\varepsilon}{16}}$ различных значений. Возьмем $|a_{112}|=h$. Так как $v\leqslant\Theta_1^*<v+1$, v не зависит от h, то

$$|a_{123}|\asymp|a_{233}|\asymp|a_{112}| = h.$$

Пусть $|a_{122}|=p^*$. Тогда существуют константы $c_2>0$, $c_3>0$, независящие от h, и такие, что

$$c_2p^*\leqslant|a_{233}|\leqslant c_3p^*,$$

$$c_2p^*\leqslant|a_{112}|=h\leqslant c_3p^*.$$

Разделив все рассматриваемые полиномы на классы G_{p^*n} $(p^*=1, 2, \ldots)$, где классу G_{p^*n} принадлежат те $P(x, y)$, для которых $|a_{123}|=p^*$, имеем

$$\sum_{P\in G_{p^*n}} q_P'\ll(p^*)^{1+\frac{\varepsilon}{3}}\ln^2(p^*)(p^*)^{-n+1-\varepsilon}(p^*)^{n-3}\ll(p^*)^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} \tag{19}$$

Ввиду леммы Бореля — Кантелли почти для всех (x, y) (1) имеет лишь конечное число решений в $P\in A_{3n}$.

4. Пусть A_{4n} — класс полиномов, для которых $\min(|a_{122}|, |a_{223}|)\neq0$, $D(x)$ — имеет кратные корни.

4.1. Обозначим через $F_{1n}\subset A_{4n}$ класс $P(x, y)$, для которых $D'(x)$ не имеет кратных корней.

В случае $l\leqslant2$ рассуждаем так же, как и в случае $P\in A_{1n}$, $l\leqslant2$. Отсюда

$$\sum_{P\in F_{1n},\, l\leqslant2} q_P\ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{4}} \tag{20}$$

Так как дискриминант полинома $D(x)$ равен нулю, мы не можем, как в случае класса A_{1n}, пользуясь выражением для дискриминанта, получить оценку:

$$I\ll\frac{\ln h\cdot h}{\sqrt{|d_i|}},$$

где $i=1, 2$, но легко проверить, что справедливы оценки, аналогичные I—IV леммы 2 [5].

Если

$$I\ll\frac{\ln h}{\sqrt{|d_i|C}},$$

а для какого-нибудь $a_{i_0 j_0 l_0}$

$$K(a_{i_0 j_0 l_0}) \ll \frac{\sqrt{C}\,|d_i|}{|a_{i_1 j_1 l_1}|},$$

то далее рассуждаем аналогично классу A_{1n}.

В противном случае покажем, что $|d_i|\,C \gg 1$.

а) Если $D(x)$ имеет лишь один кратный корень, то $D(x)$ приводим в поле рациональных чисел, и

$$D(x) = (ax+b)^2 (cx^2 + dx + e),$$

где a, b, c, d, e — целые числа.

Обозначим через α_1, α_2 — корни уравнения

$$cx^2 + dx + e = 0.$$

Пусть $l=3$, α_1, α_2 — действительные числа и

$$\left| -\frac{b}{a} - \alpha_1 \right| = \min\left(\left| -\frac{b}{a} - \alpha_1 \right|, \left| -\frac{b}{a} - \alpha_2 \right| \right).$$

Сделав, если надо, под интегралом трансформацию так, чтобы вместо $D(x)$ стоял полином $x^4 D\left(\frac{1}{x}\right)$, можем считать, что

$$|d_1| \gg |d_5|.$$

Имеем:

$$\left| c\left(-\frac{b}{a} - \alpha_1\right)\left(-\frac{b}{a} - \alpha_2\right) \right| \geqslant \frac{1}{a^2}.$$

Так как $\left| -\frac{b}{a} - \alpha_1 \right| \ll 1$, то

$$\left| c\left(-\frac{b}{a} - \alpha_1\right) \right| \gg \frac{1}{a^2}.$$

Отсюда

$$\left| -\frac{b}{a} - \alpha_1 \right| \gg \frac{1}{|a^2 c|} = \frac{1}{|d_1|}.$$

В случае $l=4$ разберем отдельно случаи:

1) $\delta = \left| -\frac{b}{a} - \alpha_1 \right|$, $\gamma = |\alpha_1 - \alpha_2|$, $\gamma < \delta$,

2) $\gamma = \left| -\frac{b}{a} - \alpha_1 \right|$, $\delta = |\alpha_1 - \alpha_2|$.

1) Аналогично лемме 2 [5]

$$I \ll \frac{\ln h}{\delta \sqrt{|d_1|}}.$$

А так как

$$\left| c\left(-\frac{b}{a} - \alpha_1\right)\left(-\frac{b}{a} - \alpha_2\right) \right| \asymp |c|\,\delta^2 \gg \frac{1}{a^2},$$

то отсюда

$$\delta \sqrt{|d_1|} \gg 1.$$

2) Имеем:

$$\left| -\frac{b}{a} - \alpha_2 \right| \asymp \delta,$$

Откуда

$$|c| \cdot \left| -\frac{b}{a} - \alpha_1 \right| \cdot \left| -\frac{b}{a} - \alpha_2 \right| \asymp |c| \delta\gamma \geqslant \frac{1}{a^3}$$

или

$$\sigma\gamma |d_1| \geqslant 1.$$

В случае $\alpha_1 = \bar{\alpha}_2 = \Theta_1 + \sigma_1 i$, $\sigma_1 > 0$ имеем

$$\left|\left(-\frac{b}{a} - \alpha_1\right)\left(-\frac{b}{a} - \alpha_2\right)\right| = \left(-\frac{b}{a} - \Theta_1\right)^2 + \sigma_1^2 = \delta^2 + \sigma_1^2 \geqslant \frac{1}{|a^3 c|}.$$

Отсюда

$$\max(\delta, \sigma_1) \geqslant \frac{1}{\sqrt{|a^2 c|}} = \frac{1}{\sqrt{|d_1|}}.$$

Так как

$$I \ll \frac{\ln h}{\sqrt{|d_1|} \max(\delta, \sigma_1)},$$

то справедлива оценка:

$$I \ll \frac{\ln h \cdot h}{\sqrt{|d_1|}}. \tag{21}$$

б) Пусть $D(x)$ имеет две пары кратных корней. Тогда

$$D(x) = (ax^2 + bx + c)^2.$$

Если γ_1, γ_2 — корни полинома $ax^2 + bx + c$, то из выражения дискриминанта для этого полинома следует, что

$$|a^2 (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \geqslant 1.$$

Отсюда

$$|d_1| C \geqslant 1,$$

и справедливо (21).

Далее рассуждаем аналогично классу A_{1n}.

4.2. Пусть F_{2n} класс $P(x, y)$, для которых имеется один трехкратный корень Θ_1. Тогда Θ_1 — рациональное число, и возможно представление:

$$D(x) = (ax + b)^3 (c_1 x + d_1),$$

где a, b, c_1, d_1 — целые числа. Если $h_1 = \max(|a|, |b|)$, $h_2 = \max(|c_1|, |d_1|)$, то $h_1^3 \cdot h_2 \ll h^2$. Имеем:

$$\int\limits_{\Omega_2'} \frac{dx}{\sqrt{|(ax+b)^3 (cx+d)|}} \ll \frac{\ln h}{\sqrt{\delta |a^3 c|}},$$

где $\delta = \left| -\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \right|$. Так как $\delta \geqslant \frac{1}{|ac|}$, то $\delta |a^2 c| \geqslant 1$. Множество тех $(x, y) \in T_{vl}$, для которых $|P(x, y)| < h^{-n+1-\varepsilon}$, $P \in F_{2n}$, разделим на два A_P' и B_P', где A_P' - множество $(x, y) \in T_{vl}$, для которых

$$|P(x, y)| < h^{-n+1-\varepsilon}, \quad |ax + b| \geqslant h^{-1-\frac{\varepsilon}{4}},$$

B'_P — множество тех $(x, y) \in T_{vl}$, для которых $|P(x, y)| < h^{-1+1-\varepsilon}$, $|ax+b| < < h^{-1-\frac{\varepsilon}{4}}$ Так как $h_1 \ll h^{\frac{2}{3}}$, то аналогично 3 достаточно рассмотреть лишь $(x, y) \in A'_P$. Пусть q^*_P — мера множества A'_P.

Ввиду (4) имеем:

$$q^*_P \leqslant h^{-n+1-\varepsilon} \int\limits_{\Omega'_v} \frac{dx}{\sqrt{|D(x)|}} \ll h^{-n+2-\frac{3\varepsilon}{4}}$$

Во всех случаях рассуждения похожи. Разберем один из них. Пусть, например, $d_1 \neq 0$, $d_5 \neq 0$, ни один из коэффициентов a_{122}, a_{223} не равен нулю, и $0 < < |a_{113}| < h$, $0 < |a_{333}| < h$.

При фиксированных всех коэффициентах, кроме a_{113}, a_{333}, имеем:

$$a_{333} = \frac{-d_1\Theta_1^3\Theta_4 + a_{233}^2}{4a_{223}}, \quad a_{113} = \frac{-d_1(3\Theta_1^2 + 3\Theta_1\Theta_4) + E}{4a_{223}},$$

где $E = a_{123}^2 - 4a_{122}\cdot a_{133} = 2a_{112}\cdot a_{233}$. Из d_2 следует:

$$d_2 = -d_1(3\Theta_1 + \Theta_4) = F + \frac{d_1(3\Theta_1^2 + 3\Theta_1\Theta_4) - E}{a_{223}}\cdot a_{122}, \tag{22}$$

где $F = 2a_{112}\cdot a_{123} - 4a_{111}\cdot a_{223}$. Из d_4 следует:

$$d_4 = -d_1(\Theta_1^3 + 3\Theta_1^2\Theta_4) = G + a_{122}\cdot\frac{d_1\Theta_1^3\Theta_4 - a_{233}^2}{a_{223}}. \tag{23}$$

Выразим Θ_4 через Θ_1 из (22)

$$\Theta_4 = -\frac{3d_1(a_{223}\Theta_1 + a_{122}\Theta_1^2) + Ea_{122} - Fa_{223}}{d_1(3\Theta_1 a_{122} + a_{223})},$$

лишь только $3\Theta_1 a_{122} + a_{223} \neq 0$. $\Big($Если $3\Theta_1 a_{122} + a_{223} = 0$, то $\Theta_1 = -\frac{a_{223}}{3a_{122}}$. Вставив полученное значение Θ_1 в (23), можем вычислить Θ_4, ибо $3a_{223} + + \Theta_1 a_{122} \neq 0.\Big)$

Из (23) и выражения для Θ_4, получаем уравнение пятой степени относительно Θ_1. Оно имеет не более $\ll 1$ решений, а отсюда a_{113}, a_{333} могут приобрести $\ll 1$ решений.

4.3. Пусть F_{3n} — класс $P(x, y)$, для которых $D(x)$ имеет четырехкратный корень, т. е.

$$D(x) = d_1(x - \Theta_1)^4.$$

Аналогично классу F_{2n}

$$Q_h(F_{3n}) \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

Ввиду вышесказанного и последней оценки

$$Q_h(A_{4n}) \ll h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Из леммы Бореля — Кантелли следует, что (1) почти для всех (x, y) имеет лишь конечное число решений в $P \in A_{4n}$.

Утверждение теоремы доказано полностью для $P(x, y)$, удовлетворяющих условию $a_{222}=0$.

Для класса полиномов, для которых $a_{333}=0$, можем написать:

$$P(x, y)=x^3\left[\left(a_{222}\left(\frac{y}{x}\right)^3+a_{122}\left(\frac{y}{x}\right)^2+a_{112}\frac{y}{x}+a_{111}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x}\left(a_{223}\left(\frac{y}{x}\right)^2+a_{123}\left(\frac{y}{x}\right)+a_{113}\right)+\frac{1}{x^2}\left(a_{233}\frac{y}{x}+a_{133}\right)\right].$$

Подстановка $\frac{y}{x}=u$, $\frac{1}{x}=z$ приводит $P(x, y)$ к виду:

$$P(x, y)=x^3(a_{222}u^3+a_{223}u^2z+a_{233}uz^2+a_{333}z^3+a_{122}u^2+a_{123}uz+a_{133}z^2+$$
$$+a_{112}u+a_{113}z+a_{111})=x^3P^*(u, z).$$

Так как наша подстановка множества положительной меры на плоскости xOy переводит в множества так же положительной меры на плоскости uOz, то из справедливости теоремы для $P^*(u, z)$ следует ее справедливость для $P(x, y)$.

Теорема 1 доказана полностью.

Доказательство теоремы 2.

1. Рассмотрим сначала случай $a_{222}=h$. Фиксируем $x=x_0$. Пусть $P_1(y)=$ $=P(x_0, y)$. Тогда $P_1(y)$ — полином третьей степени относительно y со старшим коэффициентом, равным h. Обозначим через $\varkappa_i=\varkappa_i(x_0)$ $(i=1, 2, 3)$ — корни полинома $P_1(y)$. Пусть $\operatorname{Re}\varkappa_1\leqslant\operatorname{Re}\varkappa_2\leqslant\operatorname{Re}\varkappa_3$. Отсюда $|\varkappa_1-\varkappa_2|\leqslant$ $\leqslant|\varkappa_1-\varkappa_3|$. Через $c_1, c_2, c_3,$ будем обозначать положительные константы, не зависящие от h.

Лемма. *Пусть*

$$|\omega-\varkappa_1|\leqslant c_1\min(|\omega-\varkappa_2|, |\omega-\varkappa_3|), \tag{24}$$

где $c_1\geqslant 1$, *и* $P_1'(\varkappa_1)\neq 0$. *Тогда справедливо неравенство*:

$$|\omega-\varkappa_1|\leqslant(c_1+1)^2\min\left(\left|\frac{P_1(\omega)}{P_1'(\varkappa_1)}\right|, \left|\frac{P_1(\omega)(\varkappa_1-\varkappa_2)}{P_1'(\varkappa_1)}\right|^{\frac{1}{2}}\right). \tag{25}$$

Если $|\omega-\varkappa_1|\leqslant c_2|\varkappa_1-\varkappa_2|$, *то*

$$(c_2+1)^{-2}\left|\frac{P_1(\omega)}{P_1'(\varkappa_1)}\right|\leqslant|\omega-\varkappa_1|\leqslant(c_1+1)^2\left|\frac{P_1(\omega)}{P_1'(\varkappa_1)}\right|. \tag{26}$$

В случае $c_3|\varkappa_1-\varkappa_3|\geqslant|\omega-\varkappa_1|>c_2|\varkappa_1-\varkappa_2|$:

$$c_2(c_3+1)^{-1}(c_2+1)^{-1}\left|\frac{P_1(\omega)(\varkappa_1-\varkappa_2)}{P_1'(\varkappa_1)}\right|^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant|\omega-\varkappa_1|\leqslant(c_1+1)^2\left|\frac{P_1(\omega)(\varkappa_1-\varkappa_2)}{P_1'(\varkappa_1)}\right|^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

И, наконец, если $|\omega-\varkappa_1|\geqslant c_3|\varkappa_1-\varkappa_3|$, *то*

$$\left(\frac{c_3}{c_3+1}\right)^{\frac{2}{3}}\left|\frac{P_1(\omega)}{h}\right|^{\frac{1}{3}}\leqslant|\omega-\varkappa_1|\leqslant c_1^{\frac{2}{3}}\left|\frac{P_1(\omega)}{h}\right|^{\frac{1}{3}} \tag{28}$$

Доказательство. (25) следует аналогично лемме 2 [2]. (26), (27) получаем из (25) аналогично доказательству леммы 6 [2].

Докажем (28). Имеем:

$$|h(\omega-\varkappa_1)(\omega-\varkappa_2)(\omega-\varkappa_3)|=|P_1(\omega)|. \tag{29}$$

Из (24) и (29): $h|\omega-\varkappa_1|^3\leqslant c_1^2|P_1(\omega)|$. Отсюда

$$|\omega-\varkappa_1|\leqslant c_1^{\frac{2}{3}}\left|\frac{P_1(\omega)}{h}\right|^{\frac{1}{3}}$$

С другой стороны, в силу условия леммы

$$|\omega-\varkappa_3|\leqslant|\omega-\varkappa_1|+|\varkappa_1-\varkappa_3|\leqslant|\omega-\varkappa_1|\left(1+\frac{1}{c_3}\right),$$

$$|\omega-\varkappa_2|\leqslant|\omega-\varkappa_1|+|\varkappa_1-\varkappa_2|\leqslant|\omega-\varkappa_1|\left(1+\frac{1}{c_3}\right).$$

Ввиду (29) и двух последних оценок:

$$|P_1(\omega)|\leqslant h|\omega-\varkappa_1|^3\left(\frac{c_3+1}{c_3}\right)^2$$

$$|\omega-\varkappa_1|\geqslant\left(\frac{c_3}{c_3+1}\right)^{\frac{2}{3}}\left|\frac{P_1(\omega)}{h}\right|^{\frac{1}{3}}$$

Лемма доказана полностью.

Значение $P_1'(\varkappa_1)$ почти для всех x_0 не равно нулю, ибо в противном случае для всех x_0 полином $P_1(y)$ имел бы кратный корень, значение которого можно получить из уравнения $3hy^2+2p(x_0)y+q(x_0)=0$, где $p(x)=a_{122}x+a_{223}$, $q(x)=a_{112}x^2+a_{123}x+a_{233}$.

$$\varkappa_j=(3h)^{-1}\left(-p(x_0)\right)\pm\sqrt{\left(p(x_0)\right)^2-3hq(x_0)}\qquad (j=1,\ 2).$$

Из формул Вьета для $P_1(y)$ следует, что $\left(p(x)\right)^2-3hq(x)=(ax+b)^2$, где a, b – целые числа. Ввиду леммы Гаусса возможно представление

$$P(x,\ y)=(\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3)(\beta_1x+\beta_2y+\beta_3)(\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3),$$

где α_i, β_i, γ_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ – целые числа. Отсюда, аналогично [5], для почти каждой точки $(x,\ y)$ справедливо неравенство $|P(x,\ y)|\gg h^{-2-\varepsilon}$, $h>h_0$. Так как в нашем случае $n\geqslant3$, то теорема справедлива для таких полиномов.

Пренебрегая множеством точек x_0 нулевой меры, далее будем считать, что $P_1'(\varkappa_i)$ нигде не равно нулю.

Обозначим через O_R ту часть плоскости xOy, где $|x|\leqslant R$. Пусть A_P, $A_P\subset O_R$, множество тех $(x,\ y)$, которые удовлетворяют (2) при фиксированном полиноме P высоты h. Пусть $a_P(x_0)$ сечение множества A_P в точке $x=x_0$. Обозначим через B_P, $B_R\subset R_2$, множество тех $(x,\ y)$, для которых справедливо неравенство

$$|P(x,\ y)|<h^{-8-\frac{\varepsilon}{2}}$$

а через $b_P(x_0)$ – сечение множества B_P в точке $x=x_0$. Пусть $\omega_i'=\omega_i'(x_0)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ – корни полинома $P_1(y)+h^{-9-\varepsilon}$, ω_i'' – корни полинома $P_1(y)-h^{-9-\varepsilon}$, а η_i', η_i'' ($i=1, 2, 3$) — корни полиномов $P_1(y)+h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}$ и $P_1(y)-h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}$ соответственно. Ясно, что $A_P\subset B_P$, $a_P(x_0)\subset b_P(x_0)$. $a_P(x_0)$, $b_P(x_0)$ — множества, каждое из которых состоит из одного, двух и трех интервалов, концами которых служат точки ω_i', ω_i'', η_i', η_i''.

Определение 1. Интервалом первого рода назовем интервал $b_{P1}(x_0)$, $b_{P1}(x_0)\subset b_P(x_0)$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $b_{P1}(x_0)$ покрывает множество $a_{P1}(x_0)$, $a_{P1}(x_0)\subset a_P(x_0)$, с мерой

$$|a_{P1}(x_0)|\leqslant c_4\frac{h^{-\theta-\varepsilon}}{|P_1'(x_i)|}\qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

б) длина интервала $b_{P1}(x_0)$

$$|b_{P1}(x_0)|\geqslant c_5\frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(x_1)|},$$

в) для каждой точки $\omega\in b_{P1}(x_0)$:

$$|\omega-\varkappa_i|\leqslant c_6|\varkappa_1-\varkappa_3|.$$

Определение 2. Интервалом второго рода назовем интервал $b_{P2}(x_0)$, $b_{P2}(x_0)\subset b_P(x_0)$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $b_{P2}(x_0)$ покрывает множество из $a_P(x_0)$,

б) длина интервала $b_{P2}(x_0)$: $c_8h^{-3-\frac{\varepsilon}{6}}\geqslant|b_{P2}(x_0)|\geqslant c_7|\varkappa_1-\varkappa_3|$,

в) для каждой точки $\omega\in b_{P2}(x_0)$: $|\omega-\varkappa_1|\leqslant c_9h^{-3-\frac{\varepsilon}{6}}$

А. Возьмем в определении 1 $i=1$ и обозначим через Δ_{P1} — множество тех x, для которых в $b_P(x)$ существует интервал первого рода. Пусть

$$mB_{P1}=\int\limits_{\Delta_{P1}}|b_{P1}(x)|\,dx,\quad mA_{P1}=\int\limits_{\Delta_{P1}}|a_{P1}(x)|\,dx,$$

если только множества B_{P1}, A_{P1} измеримы.

Покажем, что мера множества тех точек (x, y), которые попадают в бесконечное число измеримых множеств A_{P1}, равна нулю.

Множество Δ_{P1} разделим на два Δ_{P1}', Δ_{P1}'', где $\Delta_{P1}=\Delta_{P1}'+\Delta_{P1}''$. Будем говорить, что $x\in\Delta_{P1}'$, если существует интервал $b_{Q1}(x_0)$ такой, что

$$|c_{P1}(x_0)|=|b_{P1}(x_0)\cap b_{Q1}(x_0)|\geqslant\frac{1}{2}|b_{P1}(x_0)|,\tag{30}$$

$Q(x, y)$, $Q\neq P$, полином высоты h. Пусть

$$mB_{P1}'=\int\limits_{\Delta_{P1}'}|b_{P1}(x)|\,dx,\quad mB_{P1}''=\int\limits_{\Delta_{P1}''}|b_{P1}(x)|\,dx.\tag{31}$$

Из (30) и (31) следует, что

$$mC_{P1}'=m(B_{P1}'\cap B_{Q1})\geqslant\frac{1}{2}mB_{P1}'.$$

Обозначим через $m\ V$ меру множества V тех (x, y), которые попадают в бесконечное число множеств B_{P1}'. Покажем, что мера множества U, $U\subset V$, тех (x, y), которые попадают в бесконечное число множеств C'_{P1}, равна нулю. Возьмем полином $R(x, y) = P(x, y) - Q(x, y)$. Это полином не более второй степени относительно y, причем его высота $\leqslant 2h$. Для каждого $(x, y) \in C'_{P1}$ справедливо неравенство

$$|R(x, y)| < 2h^{-8-\frac{\varepsilon}{2}} \tag{32}$$

Для почти каждого $(x, y) \in U$ существует бесконечно много различных $R(x, y)$, удовлетворяющих неравенству (32). Если W – множество тех (x, y), для которых (32) имеет бесконечно много решений, то $U' \subset W$, где $U = U' + U''$, $mU'' = 0$. Так как $mW = 0$ [3, 4, 5], то и

$$mU = \int_{-R}^{R} |u(x)|\, dx = 0.$$

Отсюда следует, что почти для всех $x \in (-R, R)$

$$|u(x)| = 0.$$

Но, $u(x_0)$ – это множество тех (x_0, y), которые попадают в бесконечное число интервалов $c_{P1}(x_0)$. Из леммы 7 [1], ввиду условия $u(x_0) = 0$, следует, что мера множества тех y на прямой $x = x_0$, которые попадают в бесконечное число интервалов $b_{P1}(x_0)$, равна нулю. Следовательно, для почти всех $x \in (-R, R)$ $|v(x)| = 0$.

А отсюда

$$mV = \int_{-R}^{R} |v(x)\, dx = 0. \tag{33}$$

Рассмотрим $x \in \Delta''_{P1}$. Оценим

$$\sum_{P \in \mathfrak{p}_2,\ a_{222} = h} |b_{P1}(x_0)|.$$

Ввиду условий $a_{222} = h$, $|x| \leqslant R$, аналогично доказательству леммы 1 [2], имеем: $|\varkappa_i(x_0)| < 10R^3$. Отсюда $|\varkappa_i(x_0) - \varkappa_j(x_0)| < 20R^3$. В силу определения 1 для каждого $\omega \in b_{P1}(x_0)$: $|\omega - \varkappa_1| < 20c_6R^3$, $|b_{P1}(x_0)| < 40R^3$. Три различные интервала не могут иметь общих точек. Из условия $|b_{P1}(x_0) \cap b_{Q1}(x_0)| \leqslant \leqslant \frac{1}{2} |b_{P1}(x_0)|$ аналогично [1] следует, что

$$\sum_{P \in \mathfrak{p}_2,\ a_{222} = h} |b_{P1}(x_0)| < 120 \max(c_6, 1)\ R^3.$$

Так как

$$|a_{P1}(x_0)| \leqslant c_4 \frac{h^{-9-\varepsilon}}{|P'_1(\varkappa_1)|} = \frac{c_4}{c_5} h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} \cdot c_5 \frac{h^{-8-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P'_1(\varkappa_1)|} \leqslant \frac{c_4}{c_5} h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} |b_{P1}(x_0)|,$$

то отсюда

$$\sum_{P \in \mathfrak{p}_2,\ a_{222} = h} |a_{P1}(x_0)| < \frac{c_4}{c_5} \max(c_6, 1)\ 120R^3 \cdot h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

Далее,

$$\sum_{P\in\mathfrak{p}_1,\ a_{111}=h} mA_{P1}=\sum_{P\in\mathfrak{p}_1,\ a_{111}=h}\int_{-R}^{R}|a_{P1}(x)|\,dx=$$

$$=\int_{-R}^{R}\Big(\sum_{P\in\mathfrak{p}_1,\ a_{111}=h}|a_{P1}(x)|\Big)\,dx\leqslant\frac{c_4}{c_5}\max(c_6,\ 1)\cdot 240R^4\cdot h^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

Ввиду леммы Бореля – Кантелли и (33) мера множества тех $(x,\ y)$, которые попадают в бесконечное число множеств A_{1n}, равна нулю.

Б. Пусть Δ_{P2} – множество тех x, для которых в множестве $b_P(x)$ имеется интервал второго рода,

$$mB_{P2}=\int_{\Delta_{P_2}}|b_{P2}(x)|\,dx.$$

Покажем, что мера множества Z тех (x, y), которые попадают в бесконечное число измеримых множеств B_{P2}, равна нулю.

В силу определения 2:

$$|\varkappa_i-\varkappa_j|<\frac{c_8}{c_7}\,h^{-3-\frac{\varepsilon}{6}}\qquad(1\leqslant i,\ j\leqslant 3),$$

$$|\omega-\varkappa_i|<\left(c_9+\frac{c_8}{c_7}\right)h^{-3-\frac{\varepsilon}{6}}\qquad\omega\in b_{P2}(x_0).$$

Отсюда для каждой точки $\omega\in b_{P2}(x_0)$:

$$|P_y(x,\ \omega)|=|P_1'(\omega)|=h\,|(\omega-\varkappa_1)(\omega-\varkappa_2)+(\omega-\varkappa_1)(\omega-\varkappa_3)+$$
$$+(\omega-\varkappa_2)(\omega-\varkappa_3)|\leqslant h\,(|\omega-\varkappa_1|\cdot|\omega-\varkappa_2|+|\omega-\varkappa_1|\cdot|\omega-\varkappa_3|+$$
$$+|\omega-\varkappa_2|\cdot|\omega-\varkappa_3|)\leqslant 3\left(c_9+\frac{c_8}{c_7}\right)^2\cdot h^{-5-\frac{\varepsilon}{3}}$$

Так как x_0 – произвольная точка множества Δ_{P2}, то для каждой точки $(x,\ y)\in B_{P2}$

$$|P_y(x,\ y)|\leqslant 3\left(c_9+\frac{c_8}{c_7}\right)^2 h^{-5-\frac{\varepsilon}{3}}\tag{34}$$

$P_y(x,\ y)$ – полином второй степени. Его высота $=3h$. $Z\subset S$, где S – множество тех $(x,\ y)$, для которых (34) имеет бесконечно много решений в полиномах $P_y(x,\ y)$. Но, ввиду [4] и того, что $P_y(x,\ y)$ имеет не более шести коэффициентов, $mS=0$. Отсюда $mZ=0$.

В. Покажем, что всегда из $b_P(x_0)$ можно выделить систему интервалов $\{e_{Pi}(x_0)\}$ $(1\leqslant i\leqslant 3)$ такую, что $a_P(x_0)\subset\cup\, e_{Pi}(x_0)$, и $e_{Pi}(x_0)$ являются интервалами первого или второго рода.

I. Возьмем случаи, когда $\varkappa_1(x_0)$, $\varkappa_2(x_0)$, $\varkappa_3(x_0)$ – действительные числа.

1.1. Пусть все числа ω_i', ω_i'', η_i', η_i'' $(i=1,\ 2,\ 3)$ – действительные. Возьмем, для определенности, что $\eta_1'<\varkappa_1$, тогда $\eta_1'<\omega_1'<\varkappa_1<\omega_1''<\eta_1''\leqslant\eta_2''<\omega_2''<\varkappa_2<\omega_2'<$ $<\eta_2'\leqslant\eta_3'<\omega_3'<\varkappa_3<\omega_3''<\eta_3''$. Далее, ввиду формул Вьета,

$$\eta_1'+\eta_2'+\eta_3'=\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3.$$

Отсюда, взяв $\eta_1' = \varkappa_1 - \alpha$, $\eta_2' = \varkappa_2 + \beta$, $\eta_3' = \varkappa_3 - \gamma$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, получаем:

$$\beta = \alpha + \gamma. \tag{35}$$

Следовательно,

$$|\eta_i' - \varkappa_i| = \min_{1 \leqslant j \leqslant 3} |\eta_i' - \varkappa_j| \qquad (i = 1,\ 3). \tag{36}$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для остальных корней. Ввиду равенства, аналогично (36), применима лемма:

$$|\omega_i' - \omega_i''| = |\omega_i' - \varkappa_i| + |\omega_i'' - \varkappa_i| \leqslant \frac{8h^{-\theta-\varepsilon}}{|P_1'(\varkappa_i)|}, \qquad (i = 1,\ 3). \tag{37}$$

Корень η_1'' находится в интервале $(\varkappa_1, \varkappa_2)$, а корень η_3' – в интераввле $(\varkappa_2, \varkappa_3)$. Ввиду равенства, аналогично (36), леммы и условия $|\eta_1'' - \varkappa_1| < |\varkappa_1 - \varkappa_2|$:

$$\frac{1}{4}\,\frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_1)|} \leqslant |\eta_1'' - \varkappa_1| \leqslant 4\,\frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_1)|}, \tag{38}$$

а ввиду (37)

$$\frac{1}{4}\,\frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_1)|} < |\omega_1' - \eta_1''| < 4\,\frac{1}{8}\,\frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_1)|}, \qquad h > h_0.$$

Интервал (ω_1', η_1''), $(\omega_1', \omega_1'') \subset (\omega_1', \eta_1'')$, принадлежит множеству $b_P(x_0)$, а так как для каждого $\omega \in (\omega_1', \eta_1'')$ справедливо неравенство: $|\omega - \varkappa_1| < |\varkappa_1 - \varkappa_2|$, то в силу определения 1 (ω_1', η_1'') – интервал первого рода. Аналогичными рассуждениями нетрудно показать, что (η_3', ω_3'') так же является интервалом первого рода.

Ввиду (35) и (37)

$$|\omega_2' - \omega_2''| = |\omega_1' - \omega_1''| + |\omega_3' - \omega_3''| \leqslant 16 \max\left(\frac{h^{-\theta-\varepsilon}}{|P_1'(\varkappa_1)|}, \frac{h^{-\theta-\varepsilon}}{|P_1'(\varkappa_3)|}\right). \tag{39}$$

Для интервала (η_2'', η_2') ввиду (38) получаем:

$$\eta_2' - \eta_2'' \geqslant |\eta_1'' - \varkappa_1| + |\eta_3' - \varkappa_3| \geqslant \frac{1}{4} \max\left(\frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_1)|}, \frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_3)|}\right).$$

Кроме того, $|\omega - \varkappa_2| < |\varkappa_1 - \varkappa_3|$ для каждого $\omega \in (\eta_2'', \eta_2')$. Отсюда следует, что (η_2'', η_2') так же интервал первого рода.

Множество $a_P(x_0)$, состоящее из трех интервалов, мы покрыли тремя интервалами первого рода из $b_P(x_0)$.

1.2. Пусть среди чисел η_1', η_2', η_3' имеется пара комплексно-сопряженных, а все остальные корни – действительные числа. (Аналогично и в случае, когда среди η_1'', η_2'', η_3'' имеется пара комплексно-сопряженных корней, а все остальные корни – действительные числа.)

Возьмем, для определенности, случай, когда η_1' – действительное, $\eta_1' < \varkappa_1$. Тогда $\eta_1' < \omega_1' < \varkappa_1 < \omega_1'' < \eta_1'' \leqslant \eta_2'' < \omega_2'' < \varkappa_2 < \omega_2' \leqslant \omega_3' < \varkappa_3 < \omega_3'' < \eta_3''$. Аналогично 1.1 интервал (ω_1', η_1''), $(\omega_1', \omega_1'') \subset (\omega_1', \eta_1'')$, – интервал первого рода.

а) В случае $|\eta_3'' - \varkappa_3| < |\varkappa_2 - \varkappa_3|$ из леммы следует, что

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_3)|} \leqslant |\eta_3'' - \varkappa_3| \leqslant 4\,\frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_3)|}.$$

Так как

$$|\omega_3' - \omega_3''| \leqslant 8 \frac{h^{-\theta-\varepsilon}}{|P_1'(\varkappa_3)|},$$

то (ω_3', η_3'') — нитервал первого рода.

Ввиду справедливости (39), неравенства $|\omega - \varkappa_2| < |\varkappa_1 - \varkappa_3|$ для $\omega \in (\eta_2'', \omega_2')$ и того, что $|\eta_2'' - \varkappa_2| = |\eta_1'' - \varkappa_1| + |\varkappa_3 - \eta_3''|$, имеем, что (η_2'', ω_2') является интервалом первого рода.

б) Если

$$|\varkappa_2 - \varkappa_3| \leqslant |\eta_3'' - \varkappa_3| \leqslant \frac{1}{2} |\varkappa_1 - \varkappa_3|, \tag{40}$$

то рассматриваем интервал $(\eta_2'', \varkappa_2)$. Из (35) следует: $|\eta_2'' - \varkappa_2| = |\varkappa_1 - \eta_1''| + |\varkappa_3 - \eta_3''|$. Возможны следующие случаи:

$$б_1)\quad \frac{1}{2} |\eta_2'' - \varkappa_2| \leqslant |\varkappa_1 - \eta_1''| < |\eta_2'' - \varkappa_2|,\ |\varkappa_3 - \eta_3''| \leqslant |\varkappa_1 - \eta_1''|, \tag{41}$$

$$б_2)\quad \frac{1}{2} |\eta_2'' - \varkappa_2| < |\varkappa_3 - \eta_3''|,\ |\varkappa_1 - \eta_1''| < |\varkappa_3 - \eta_3''|.$$

б$_1$) Имеем $|\eta_2'' - \varkappa_2| < |\varkappa_1 - \varkappa_2|$, $|\eta_2'' - \varkappa_2| \leqslant 2 \min (|\eta_2'' - \varkappa_1|, |\eta_2'' - \varkappa_3|)$, а ввиду леммы:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_2)|} \leqslant |\eta_2'' - \varkappa_2| \leqslant 9 \frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_2)|}.$$

Так как

$$|\varkappa_2 - \varkappa_3| < 18 \frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_2)|},$$

то ввиду (41)

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_2)|} \leqslant |\eta_2'' - \eta_3''| < 36 \frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_2)|}.$$

Имеем:

$$|\omega_3' - \varkappa_3| < |\varkappa_2 - \varkappa_3|,\ |\omega_3' - \varkappa_3| = \min_{1 \leqslant i \leqslant 3} |\omega_3' - \varkappa_i|,$$

откуда

$$\frac{1}{4} \frac{h^{-\theta-\varepsilon}}{|P_1'(\varkappa_3)|} \leqslant |\omega_3' - \varkappa_3| \leqslant 4 \frac{h^{-\theta-\varepsilon}}{|P_1'(\varkappa_3)|}. \tag{42}$$

Но, ввиду (40):

$$|P_1'(\varkappa_1)| = h |(\varkappa_1 - \varkappa_2)(\varkappa_1 - \varkappa_3)| \geqslant h |(\varkappa_2 - \varkappa_3)(\varkappa_1 - \varkappa_3)| = |P_1'(\varkappa_3)|.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{|P_1'(\varkappa_1)|} \leqslant \frac{1}{|P_1'(\varkappa_3)|},$$

и ввиду (39) и (42)

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{h^{-\theta-\varepsilon}}{|P_1'(\varkappa_3)|} \leqslant |\varkappa_2 - \omega_2'| = |\varkappa_1 - \omega_1'| + |\varkappa_3 - \omega_3'| \leqslant \frac{8h^{-\theta-\varepsilon}}{|P_1'(\varkappa_3)|},$$

откуда

$$|\varkappa_2-\omega_2'|\leqslant 32\cdot\frac{1}{4}\,\frac{h^{-\theta-\varepsilon}}{|P_1'(\varkappa_3)|}\leqslant 32\,|\,\omega_3'-\varkappa_3\,|\leqslant 32\,|\,\omega_2'-\varkappa_3\,|.$$

Ввиду леммы

$$|\varkappa_2-\omega_2'|<33^2\,\frac{h^{-\theta-\varepsilon}}{|P_1'(\varkappa_2)|}.$$

Получаем, что (η_2'', η_3'') является интервалом первого рода.

б$_2$) Если $|\eta_2''-\varkappa_2|<|\eta_2''-\varkappa_1|$, то имеем случай, аналогичный б$_1$). В случае $|\eta_2''-\varkappa_2|>|\eta_2''-\varkappa_1|$: $\frac{1}{2}\,|\varkappa_1-\varkappa_2|<|\eta_2''-\varkappa_2|<|\varkappa_1-\varkappa_2|$, а так как $|\varkappa_2-\varkappa_3|\leqslant$ $\leqslant|\varkappa_3-\eta_3''|<|\eta_2''-\varkappa_2|<2\,|\varkappa_3-\eta_3''|$, то $|\varkappa_3-\varkappa_1|=|\varkappa_2-\varkappa_3|+|\varkappa_2-\eta_2''|+|\eta_2''-\varkappa_1|<$ $<|\eta_3''-\varkappa_3|+2\,|\varkappa_3-\eta_3''|+2\,|\varkappa_3-\eta_3''|=5\,|\varkappa_3-\eta_3''|$ или $|\varkappa_3-\eta_3''|>\frac{1}{5}\,|\varkappa_3-\varkappa_1|$, и (η_2'', η_3'') является интервалом второго рода.

в) Если $|\eta_3''-\varkappa_3|>\frac{1}{2}\,|\varkappa_1-\varkappa_3|$, то в силу леммы (ω_2'', η_3'') — интервал второго рода, и $(\omega_2'', \omega_2')\cup(\omega_3', \omega_3'')\subset(\omega_2'', \eta_3'')$.

1. Остальные случаи аналогичны 1.1 или 1.2.

Пусть среди $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ имеется пара комплексно-сопряженных корней. Положим, что $\varkappa_1$ — действительный корень, $\varkappa_2=\Theta_2+\sigma_2 i$, $\varkappa_3=\Theta_2-\sigma_2 i$, $\sigma_2>0$, $\eta_1'<\varkappa_1$. (Аналогично и в других случаях.)

Пусть все числа троек η_i'', ω_i'' $(i=1, 2, 3)$ — действительные, т. е. $\eta_1'<\varkappa_1<$ $<\omega_1''<\eta_1''\leqslant\eta_2''<\omega_2''\leqslant\omega_3''<\eta_3''$. Из формулы Вьета следует, что $\Theta_2>\omega_2''$. Действительно, в противном случае, положив $\omega_1''=\varkappa_1+\alpha$, $\omega_2''=\Theta_2+\beta$, $\omega_3''=\Theta_2+\gamma$, где $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, получаем противоречие: $\alpha+\beta+\gamma=0$. Из той же формулы Вьета следует, что в случае $\Theta_2\in(\eta_2'', \eta_3'')$: $|\varkappa_1-\eta_1''|+|\Theta_2-\eta_3''|=|\Theta_2-\eta_2''|$. Если же $\Theta_2>\eta_3''$, то $|\varkappa_1-\eta_1''|=\Theta_2-\eta_3''|+|\Theta_2-\eta_2''|$. В обоих случаях: $|\varkappa_1-\eta_1''|<$ $<2\,|\eta_1''-\Theta_2|<2\,|\eta_1''-\varkappa_2|$. Кроме того, $|\varkappa_1-\eta_1''|<|\varkappa_1-\varkappa_2|$. Если $|\omega_1'-\varkappa_1|\leqslant$ $\leqslant|\varkappa_1-\varkappa_3|$, то, применив лемму к η_1'', получаем:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_1)|}\leqslant|\varkappa_1-\eta_1''|\leqslant 9\,\frac{h^{-\theta-\frac{\varepsilon}{2}}}{|P_1'(\varkappa_1)|}.$$

Отсюда интервал (ω_1', η_1''), $(\omega_1', \omega_1'')\subset(\omega_1', \eta_1'')$, является интервалом первого рода. $a_P(x_0)=(\omega_1', \omega_1'')+(\omega_2'', \omega_3'')$. Чтобы покрыть (ω_2'', ω_3'') интервалами из $b_P(x_0)$, обозначим через $P_2(y)=P_1(y)-h^{-\theta-\varepsilon}$. Полином $P_2(y)$ имеет три действительных корня: ω_1'', ω_2'', ω_3''. Его дискриминант $D_2(x_0)$ является полиномом от x_0, неравным тождественно нулю. Следовательно, лемма и утверждения А, Б остаются справедливыми, если вместо $P_1(y)$ взять $P_2(y)$. Далее рассматриваем (η_2'', η_3'') и рассуждаем аналогично 1.2 с полиномом $P_2(y)$ вместо $P_1(y)$.

В остальных случаях рассуждаем аналогично 2.1.

Так как $D(x_0)$, дискриминант полинома $P_1(y)$, является непрерывной функцией от x_0, то рассмотренные нами случаи разбивают интервал $(-R, R)$ на конечную систему интервалов, где все точки одного интервала соответствует одному и тому же случаю расположения корней. Отсюда следует, что множества A_{P1}, B_{P1}, B_{P2} измеримы. Ввиду утверждений А, Б теорема справедлива для всех $P(x, y)$, удовлетворяющих условию $a_{222}=h$.

II. а) Если $a_{222}=-h$, то вместо полинома P берем $-P$. В случае $|a_{111}|=h$ рассуждаем аналогично I фиксируя вместо $x=x_0$ неизвестный $y=y_0$. Если же $|a_{333}|=h$, то при помощи трансформации $u=\frac{1}{x}$, $z=\frac{y}{x}$ получаем полином $Q(u, z)=\frac{P(x, y)}{x^3}$ с коэффициентом при u^3, равным $\pm h$. Аналогично лемме 6 [1], можем показать, что эта трансформация множества положительной меры переводит в множества так же положительной меры. Далее рассуждаем аналогично I.

б) Разберем случай, когда один из a_{113}, a_{133}, a_{223}, a_{233} по абсолютной величине равен h. Так как во всех случаях рассуждения похожи, то рассмотрим лишь случай $|a_{113}|=h$. Ввиду леммы 1 [1], существует целое число j ($j=0, 1, 2, 3$) такое, что $|a_{111}j^3+a_{113}j^2+a_{133}j+a_{333}| \asymp h$. Трансформация $x=x'+j$, $y=y'$ переводит полином $P(x, y)$ в полином $P^*(x', y')$ высоты $\ll h$, свободный член которого $\asymp h$. При помощи той же трансформации, что и в случае $|a_{333}|=h$, вместо $P^*(x', y')$ можно рассматривать $Q^*(u, z)$ высоты $\ll h$, коэффициент при u^3 которого по абсолютной величине $\asymp h$. Деля все полиномы $Q^*(u, z)$ на классы $K(p)$ ($p=1, 2, 3, \ldots$), где классу $K(p)$ принадлежат те полиномы, для которых коэффициент при u^3 по абсолютной величине равен p_1 вместо (1) рассматриваем неравенство

$$|Q^*(u, z)|<p^{-9-\varepsilon+\varepsilon_1},$$

ε_1, $\varepsilon>\varepsilon_1>0$ — фиксированное число. Аналогично I, беря p вместо h, можно показать, что последнее неравенство для почти всех (u, z) имеет лишь конечное число решений в полиномах $Q^*(u, z)$. Так как $\|Q^*\| \asymp p$, то и неравенство $|Q^*(u, z)|<\|Q^*\|^{-9-\varepsilon}$ для почти всех (u, z) имеет конечное число решений в полиномах $Q^*(u, z)$.

в) В случае, когда один из $|a_{112}|$, $|a_{122}|$, $|a_{123}|$, например $|a_{112}|$, равен h, делаем трансформацию: $x=x'$, $y=y'+kx'$, где в силу леммы 1 [1] k ($k=0, 1, 2, 3$) выбран так, чтобы

$$|a_{222}k^3+a_{122}k^2+a_{112}k+a_{111}| \asymp h.$$

Далее рассуждаем аналогично б).

Теорема доказана.

Выражаю благодарность профессору И. Кубилюсу за постоянное внимание к работе.

Каунасский Политехнический институт

Поступило в редакцию 7.X.1969

Литература

1. A. Baker, Proceedings of the Royal Society, Series A, 292, Nr. 1428, 1966.
2. В. Г Спринджук, Проблема Малера в метрической теории чисел, „Наука и техника", Минск, 1967.
3. Р. Слесорайтене, О теореме Малера—Спринджука, Лит. матем. сб., X, № 2 (1970), 367—374.
4. Р. Слесорайтене, Аналог теоремы Малера—Спринджука для полиномов второй степени от двух переменных, Лит. матем. сб., X, № 3 (1969), 627—634.
5. Р. Слесорайтене, Аналог теоремы Малера—Спринджука для некоторых полиномов третьей степени от двух неизвестных, X, № 3 (1970), 545—564.
6. А. О. Гельфонд, Трансцендентные и алгебраические числа, Гос. изд. технико-теоретической литературы, Москва, 1952, 168—173.

MALERIO–SPRINDŽIUKO TEOREMOS ANALOGAS TREČIO LAIPSNIO DVIEJŲ KINTAMŲJŲ POLINOMAMS. (II)

R. SLIESORAITIENĖ

(*Reziumė*)

Sakykime,

$$P(x, y)=a_{111}x^3+a_{112}x^2y+a_{122}xy^2+a_{222}y^3+a_{113}x^2+a_{123}xy+$$
$$+a_{323}y^2+a_{133}x+a_{233}y+a_{333}$$

yra polinomas su sveikais koeficientais. Jei h – polinomo aukštinė, $h=\max|a_{ijl}|$, $1\leqslant i, j, l\leqslant 3$, o n $(1\leqslant n\leqslant 10)$ – jo nenulinių koeficientų skaičius, tai galioja šios dvi teoremos.

1 teorema. Jei $a_{111}\cdot a_{222}\cdot a_{333}=0$, tai kiekvienam $\varepsilon>0$ ir beveik visiems realiems (x, y) nelygybė

$$|P(x, y)|<h^{-n+1-\varepsilon}$$

turi tik baigtinį sprendinių skaičių polinomais $P(x, y)$.

2 teorema. Jei $a_{111}\cdot a_{222}\cdot a_{333}\neq 0$, tai kiekvienam $\varepsilon>0$ ir beveik visiems realiems (x, y) nelygybė

$$|P(x, y)|<h^{-9-\varepsilon}$$

turi tik baigtinį sprendinių skaičių polinomais $P(x, y)$.

THE ANALOGUE OF THE MAHLER–SPRINDŽUK'S THEOREM FOR THE POLYNOMIALS IN (x, y) OF THIRD DEGREE. (II)

R. SLIESORAITIENĖ

(*Summary*)

Let

$$P(x, y)=a_{111}x^3+a_{112}x^2y+a_{122}xy^2+a_{222}y^3+a_{113}x^2+a_{123}xy+a_{323}y^2+$$
$$+a_{133}x+a_{233}y+a_{333}$$

be a polynomial with integral coefficients. Let $\varepsilon>0$ be any fixed number. If n is the number of non-zero coefficients among a_{ijl} $(1\leqslant i, j, l\leqslant 3)$, $h=\max_{1\leqslant i, j, l\leqslant 3}|a_{ijl}|$ then are valid the following two theorems:

Theorem 1. If $a_{111}\cdot a_{222}\cdot a_{333}=0$ then for almost all the real (x, y) the inequality $|P(x, y)|<h^{-n+1-\varepsilon}$ has only the finite number of solutions in the polynomials $P(x, y)$.

Theorem 2. If $a_{111}\ a_{222}\cdot a_{333}\neq 0$ then for almost all the real (x, y) the inequality

$$|P(x, y)|<h^{-9-\varepsilon}$$

has only the finite number of solutions in the polynomials $P(x, y)$.