УДК 517. 531

О СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА ТИПА ЛАПЛАСА—СТИЛЬТЬЕСА

В. Г. Абрахманов

В работах [1], [2] и [3] А. Мишкелявичус нашел уравнение границы области сходимости ряда Дирихле

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

где последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \,|\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)| = \alpha < \frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

и установил выпуклость этой области. Обобщая результаты Kojima, Fuji wara Kakeya и Kuniyeda, полученные для ряда (1) с положительными показателями λ_n, R. Chambrial в работах [4] и [5] установил новые формулы для абсциссы сходимости и абсциссы равномерной сходимости интеграла Лапласа – Стильтьеса $\int\limits_0^{\infty} e^{-zt}\, d\alpha(t)$. В настоящей статье рассматриваются аналогичные вопросы для интеграла

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-z\lambda(t)}\, d\alpha(t), \tag{3}$$

где $\alpha(t)$ – комплекснозначная функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке интервала $(0, \infty)$, кривая $z=\lambda(t)=\Lambda(t)\, e^{i\psi(t)}=\sigma(t)+i\tau(t)$ – кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке из $(0, \infty)$ и удовлетворяет условиям $\lim\limits_{t\to\infty} \Lambda(t)=\infty$ и

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \,|\arg\lambda'(t)| = \alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Заметим, что по условию (4) для любого γ, $\alpha<\gamma<\frac{\pi}{2}$, асимптотически

$$|\arg\lambda'(t)|<\gamma,\ |\psi(t)|<\gamma,\ |\lambda'(t)|<\sigma'(t)\sec\gamma. \tag{5}$$

§ 1. Область сходимости

Выберем произвольную последовательность положительных чисел $\{\mu_n\}$: $\mu_{n+1}-\mu_n \in [h_1, h_2]$, где $h_1>0$, $h_2>0$, $\mu_0=\sigma(0)$. Так как по условию (4) $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t)= =\infty$, то существует такая последовательность $\{t_n\}$, что $\mu_n=\sigma(t_n)$. Обозначим $I_n=[t_n, t_{n+1}]$ и

$$c(y)=\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\mu_n} \ln\left\{\sup_{t\in I_n} \left| \int_{t_n}^{t} \exp[-iy\lambda(u)]\, d\alpha(u)\right|\right\}. \tag{6}$$

Теорема 1. *При любом фиксированном* y *интеграл* (3) *сходится во всех точках* $z=x+iy$, *где* $x>c(y)$, *и расходится во всех точках* $z=x+iy$, *где* $x<c(y)$.

Доказательство. 1. Пусть $x>c(y)$ и $c(y)<x'<x$. Обозначив $\beta_n(t)= = \int_{t_n}^{t} \exp[-iy\lambda(u)]\, d\alpha(u)$, согласно (6) имеем для всех n и $t\in I_n$: $|\beta_n(t)|\leqslant \leqslant Ke^{x'\mu_n}$, где $0<K=\mathrm{const}$. С другой стороны, для любых ζ и ζ' $(\zeta<\zeta')$ существуют такие числа p и q $(p\leqslant q)$, что $\zeta\in[t_p, t_{p+1})$, $\zeta'\in[t_q, t_{q+1})$. Если $p\leqslant q-2$, то

$$\int_{\zeta}^{\zeta'} e^{-z\lambda(t)}\, d\alpha(t) = \int_{\zeta}^{t_{p+1}} e^{-z\lambda(t)}\, d\alpha(t) + \sum_{k=p+1}^{q-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-z\lambda(t)}\, d\alpha(t) +$$

$$+ \int_{t_q}^{\zeta'} e^{-z\lambda(t)}\, d\alpha(t). \tag{7}$$

Оценим интегралы справа для достаточно больших ζ, пользуясь неравенствами (5):

$$\left| \int_{\zeta}^{t_{p+1}} e^{-z\lambda(t)}\, d\alpha(t) \right| = \left| \int_{\zeta}^{t_{p+1}} e^{-x\lambda(t)}\, d\beta_p(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant Ke^{x'\mu_p}\left\{ e^{-x\mu_{p+1}} + e^{-x\sigma(\zeta)} + |x|\sec\gamma \int_{\zeta}^{t_{p+1}} e^{-x\sigma(t)}\, \sigma'(t)\, dt \right\} \leqslant$$

$$\leqslant K_1(1+\sec\gamma)\exp[-(x-x')\mu_0]\exp[-(x-x')h_1 p],$$

где $K_1=\max\{2K, 2Ke^{-xh_1}\}$. Такая же оценка верна для остальных интегралов, поэтому

$$\left| \int_{\zeta}^{\zeta'} e^{-z\lambda(t)}\, d\alpha(t)\right| \leqslant C \sum_{k=p}^{q} \exp[-(x-x')h_1 k],$$

где $0 < C = \text{const}$. Для случаев $p = q - 1$ или $p = q$, когда сумма в равенстве (7) содержит одно слагаемое или отсутствует, это неравенство также справедливо. Оно означает, что интеграл (3) сходится в точке, $z = x + iy$, если $x > c(y)$.

2. Пусть теперь интеграл (3) сходится в точке $z = x + iy$. Тогда, если $\gamma_n(t) = \int\limits_{t_n}^{t} e^{-z\lambda(u)}\,d\alpha(u)$, то существует число $M > 0$ такое, что $|\gamma_n(t)| \leqslant M$ для всех $t \in I_n$. Поэтому для всех $t \in I_n$ асимптотически

$$|\beta_n'(t)| = \left|\int\limits_{t_n}^{t} e^{x\lambda(u)}\,d\gamma_n(u)\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\left\{e^{x\sigma(t)} + |x|\sec\gamma\int\limits_{t_n}^{t} e^{x\sigma(u)}\,\sigma'(u)\,du\right\} \leqslant Ce^{x\mu_n},$$

где

$$C = \max\{M(1 + 2\sec\gamma),\quad M[(1 + \sec\gamma)\,e^{xh_1} + \sec\gamma]\}.$$

Отсюда $\sup\limits_{t \in I_n} |\beta_n(t)| \leqslant Ce^{x\mu_n}$, т.е. $c(y) \leqslant x$, и теорема доказана.

Выберем произвольную действительную дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую условиям

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{\varphi'(t)}{\sigma'(t)} = \infty, \quad \text{но} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sigma^k(t)}\,\frac{\varphi'(t)}{\sigma'(t)} = 0 \tag{8}$$

для некоторого $k > 0$. Можно взять, например, $\varphi(t) = \sigma^2(t)$.

Покажем, что величина $c(y)$ в теореме 1 равна

$$c(y) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{\sigma(t)}\,\ln\left|\int\limits_0^t \exp\,[\varphi(u) - \varphi(t) - iy\lambda(u)]\,d\alpha(u)\right|. \tag{9}$$

Для этого заметим, что из (8) и (5) следует $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\varphi'(t)}{|\lambda'(t)|} = \infty$. Поэтому при любом x асимптотически

$$x\,|\lambda'(t)| + \varphi'(t) > 0. \tag{10}$$

Кроме того, из соотношения

$$\frac{x\,|\lambda'(t)| + \varphi'(t)}{|x\lambda'(t) + \varphi'(t)|} \geqslant \frac{x\,|\lambda'(t)| + \varphi'(t)}{|x|\,|\lambda'(t)| + \varphi'(t)} \to 1$$

получаем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ асимптотически

$$|x\lambda'(t) + \varphi'(t)| < \frac{1}{1-\varepsilon}\,[x\,|\lambda'(t)| + \varphi'(t)]. \tag{11}$$

1. Пусть $x>c(y)$, $c(y)<x'<x$. Если $\beta(t)=\int\limits_0^t \exp[\varphi(u)-iy\lambda(u)]\,d\alpha(u)$, то согласно (9) асимптотически $|\beta(t)|<\exp[\varphi(t)+x'\sigma(t)]$. Из условия (8) следует, что, если $0<\varepsilon<x-x'$, то $\varphi'(t)<\sigma^k(t)\,\sigma'(t)<\exp[\varepsilon\sigma(t)]\,\sigma'(t)$ при всех достаточно больших t. Отсюда с учетом (5) имеем

$$\left|\int\limits_{\zeta}^{\zeta'} e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|=\left|\int\limits_{\zeta}^{\zeta'} \exp[-x\lambda(t)-\varphi(t)]\,d\beta(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\exp[-(x-x')\,\sigma(\zeta)]+\int\limits_{\zeta}^{\zeta'}\exp[-(x-x')\,\sigma(t)]\,[|x\lambda'(t)|+\varphi'(t)]\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\left(2+\frac{|x|}{x-x'}\sec\gamma\right)\exp[-(x-x')\,\sigma(\zeta)]+$$

$$+\frac{|x|}{x-x'-\varepsilon}\exp[-(x-x'-\varepsilon)\,\sigma(\zeta)]<C\exp[-(x-x'-\varepsilon)\,\sigma(\zeta)],$$

где $0<C=\mathrm{const}$, что означает сходимость интеграла (3) в точке $z=x+iy$.

2. Пусть теперь интеграл (3) сходится в некоторой точке $z=x+iy$. Тогда, если $\gamma(t)=\int\limits_0^t e^{-z\lambda(u)}\,d\alpha(u)$, то $|\gamma(t)|\leqslant M$ для всех t при некотором $M>0$ и

$$\left|\int\limits_0^t \exp[\varphi(u)-iy\lambda(u)]\,d\alpha(u)\right|=\left|\int\limits_0^t \exp[x\lambda(u)+\varphi(u)]\,d\gamma(u)\right|\leqslant$$

$$\leqslant H+M\left\{\exp[x\sigma(t)+\varphi(t)]+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_0}^t \exp[x\sigma(u)+\varphi(u)]\,|x\lambda'(u)+\varphi'(u)|\,du\right\},$$

где t_0 выбрано достаточно большим, чтобы имели место неравенства (10) и (11), а H не зависит от t, $0<H<\infty$. Учитывая неравенство $x|\lambda'(u)|+\varphi'(u)\leqslant\leqslant\sec\gamma\,[x\sigma'(u)+\varphi'(u)]$, получаем

$$\left|\int\limits_0^t \exp[\varphi(u)-iy\lambda(u)]\,d\alpha(u)\right|\leqslant H+M\left\{\exp[x\sigma(t)+\varphi(t)]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-\varepsilon}\int\limits_{t_0}^t \exp[x\sigma(u)+\varphi(u)]\,[x|\lambda'(u)|+\varphi'(u)]\,du\right\}<$$

$$<H+M\left(1+\frac{\sec\gamma}{1-\varepsilon}\right)\exp[x\sigma(t)+\varphi(t)].$$

Из условий (8) следует $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{\sigma(t)} = \infty$, так что

$$\left| \int_0^t \exp\left[\varphi(u) - \varphi(t) - iy\lambda(u)\right] d\alpha(u) \right| <$$

$$< \left\{ H \exp\left[-\sigma(t) \left(\frac{\varphi(t)}{\sigma(t)} + x \right) \right] + C \right\} < Ke^{x\sigma(t)},$$

где $C = M\left(1 + \frac{\sec\gamma}{1-\varepsilon}\right)$, $0 < K = \text{const}$. Отсюда $c(y) \leqslant x$.

Отметим, наконец, что с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 1 и формулы (9), можно получить

$$c(y) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\mu_n} \ln\left\{ \sup_{t\in I_n} \left| \int_{t_n}^t \exp\left[\varphi(u) - \varphi(t) - iy\lambda(u)\right] d\alpha(u) \right| \right\}, \qquad (12)$$

где последовательность $\{\mu_n\}$ и функция $\varphi(t)$ выбраны, как указано выше.

В формулах (6), (9) и (12) выражение $\exp[-iy\lambda(u)]$ может быть заменено на $\exp[y\tau(u)]$, где $\tau(u) = \operatorname{Im}\lambda(u)$ (ср. [3]). Покажем это на примере формулы (6). Мы воспользуемся тем, что, если $\sigma(t)$ — некоторая положительная возрастающая дифференцируемая функция, а $F(t)$ — произвольная комплексно-значная функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке интервала $(0, \infty)$, то величина

$$c_F(Y) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\mu_n} \ln\left\{ \sup_{t\in I_n} \left| \int_{t_n}^t \exp\left[-iY\sigma(u)\right] dF(u) \right| \right\}$$

не зависит от Y. В самом деле, в соответствии с формулой (6) $c_F(Y)$ — абсцисса сходимости интеграла

$$\int_0^\infty \exp\left[-(z+iY)\,\sigma(t)\right] dF(t).$$

Обозначив теперь $F_y(t) = \int\limits_{t_n}^t \exp\left[y\tau(u)\right] d\alpha(u)$, получим из (6)

$$c(y) = c_{F_y}(y) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\mu_n} \ln\left\{ \sup_{t\in I_n} \left| \int_{t_n}^t \exp\left[-iy\sigma(u)\right] dF_y(u) \right| \right\}.$$

Но по доказанному $c_{F_y}(y) = c_{F_y}(Y)$ при любом Y и поэтому, взяв $Y=0$, получим

$$c(y) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\mu_n} \ln\left\{ \sup_{t\in I_n} \left| \int_{t_n}^t \exp\left[y\tau(u)\right] d\alpha(u) \right| \right\}.$$

Обозначим $V(z_0) = \left\{ z\colon \left|\arg(z - z_0)\right| < \frac{\pi}{2} - \alpha \right\}$.

Теорема 2 (Абеля). *Из сходимости интеграла* (3) *в точке* z_0 *следует сходимость его в* $V(z_0)$.

Доказательство. Если $z \in V(z_0)$, то существует такое число $\delta(z) > 0$, что $\alpha + \delta(z) < \frac{\pi}{2}$, $|\arg(z - z_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha - \delta(z)$. Если $\gamma = \alpha + \delta(z) - \delta$, где $0 < \delta < \delta(z)$, то $\alpha < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Обозначив $\varphi_0 = \arg(z - z_0)$, согласно (4) имеем асимптотически $|\varphi_0 + \psi(t)| < \frac{\pi}{2} - \delta$. Из сходимости интеграла (3) в точке z_0 следует асимптотическое неравенство $|\beta(r, t)| < 1$, где $\beta(r, t) = \int\limits_r^t e^{-z_0\lambda(t)}\, d\alpha(t)$, для всех $t > r$. С учетом (5) получаем

$$\left|\int\limits_r^R e^{-z\lambda(t)}\, d\alpha(t)\right| = \left|\int\limits_r^R e^{-(z-z_0)\lambda(t)}\, d_t\beta(r, t)\right| \leqslant |e^{-(z-z_0)\lambda(R)}| +$$

$$+ \int\limits_r^R |e^{-(z-z_0)\lambda(t)}| \cdot |z - z_0| \cdot |\lambda'(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant |e^{-(z-z_0)\lambda(r)}| \Big\{ \exp(-|z - z_0|\, [\sigma(R) - \sigma(r)]\, \sin\delta) +$$

$$+ \sec\gamma \int\limits_r^R \exp\Big(-|z - z_0|\, [\sigma(t) - \sigma(r)]\, \sin\delta\Big) |z - z_0|\, \sigma'(t)\, dt \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{\sec\gamma}{\sin\delta}\right) |e^{-(z-z_0)\lambda(r)}|,$$

т.е. асимптотически

$$\left|\int\limits_r^\infty e^{-z\lambda(t)}\, d\alpha(t)\right| < C\, |e^{-(z-z_0)\lambda(r)}|, \tag{13}$$

где C зависит только от z и z_0, что и означает сходимость интеграла (3) в точке $z \in V(z_0)$.

Из теоремы Абеля следует, что множество точек z, в которых интеграл (3) сходится, представляет собой бесконечную область G с непрерывной границей $x = c(y)$. Покажем, что на любом ограниченном замкнутом множестве $F \subset G$ интеграл (3) сходится равномерно. Из хода доказательства теоремы Абеля видно, что, если интеграл (3) сходится в точке z', то он равномерно сходится на множестве $V_{\sigma,\delta}(z') = \left\{ z : |z - z'| \geqslant \sigma,\ |\arg(z - z')| \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha - \delta \right\}$, где $\sigma > 0$, $\delta > 0$. Обозначим $V^*_{\sigma,\delta}(z') = \left\{ z : |z - z'| > \sigma,\ |\arg(z - z')| < \frac{\pi}{2} - \alpha - \delta \right\}$, где $\delta > 0$ — некоторое фиксированное число. Если Γ — граница области G, то $\rho(F, \Gamma) = \eta > 0$ и $|z - \zeta| \geqslant \eta$, где $\zeta \in \Gamma$ и $\arg(z - \zeta) = 0$, для всех $z \in F$. Поэтому, если $\sigma = \frac{\eta}{2}$, то для любого $z \in F$ существует такая точка $z' \in G$, что $z \in V^*_{\sigma,\delta}(z')$. Пользуясь леммой Гейне–Бореля, из бесконечной системы областей $V^*_{\sigma,\delta}(z')$, покрывающих F, выделим конечную подсистему, также покрывающую F. Отсюда и следует, что интеграл (3) равномерно сходится на множестве F.

Докажем, что область G выпуклая. Для этого воспользуемся тем, что модуль показательной функции $\exp(az)$ при движении точки z вдоль отрезка z_1z_2 изменяется монотонно при любом a. Достаточно показать, что, если $\xi_1\in G$, $\xi_2\in G$, то и любая точка ζ отрезка $\xi_1\xi_2$ принадлежит G.

Существуют такие точки $z_1\in G$ и $z_2\in G$, что $\xi_1\in V(z_1)$, $\xi_2\in V(z_2)$, и такое число $\delta(\xi_1, \xi_2)$, что $\alpha+\delta(\xi_1, \xi_2)<\frac{\pi}{2}$, $|\arg(\xi_1-z_1)|\leqslant\frac{\pi}{2}-\alpha+\delta(\xi_1, \xi_2)$, $\arg(\xi_2-z_2)|\leqslant\frac{\pi}{2}-\alpha+\delta(\xi_1, \xi_2)$. Если $\gamma=\alpha+\delta(\xi_1, \xi_2)-\delta$, где $0<\delta<\delta(\xi_1, \xi_2)$, то $\alpha<\gamma<\frac{\pi}{2}$. Возьмем произвольную точку $z\in V(z_1)\cap V(z_2)$ и обозначим $\beta(t)=\int_t^\infty e^{-z\lambda(u)}\,d\alpha(u)$. Так как функция $\beta(t)$ — ограниченной вариации на любом конечном отрезке интервала $(0,\infty)$, то (см. Widder [6])

$$\int_r^R e^{-\zeta\lambda(t)}\,d\alpha(t)=\int_r^R e^{-(\zeta-z)\lambda(t)}\,e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t)=-\int_r^R e^{-(\zeta-z)\lambda(t)}\,d\beta(t).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\left|\int_r^R e^{-\zeta\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|\leqslant|e^{-(\zeta-z)\lambda(R)}|\cdot|\beta(R)|+|e^{-(\zeta-z)\lambda(r)}|\cdot|\beta(r)|+$$

$$+\int_r^R|e^{-(\zeta-z)\lambda(t)}|\cdot|\beta(t)|\cdot|\zeta-z|\cdot|\lambda'(t)|\,dt.$$

Согласно (13) имеем

$$|\beta(t)|<C|e^{-(z-z_i)\lambda(t)}|\qquad(i=1,\ 2).$$

Используя неравенство

$$|e^{-(\zeta-z)\lambda(t)}|<\sum_{i=1}^{2}|e^{-(\xi_i-z)\lambda(t)}|,$$

получаем

$$|e^{-(\zeta+z)\lambda(t)}|\cdot|\beta(t)|<C\sum_{i=1}^{2}|e^{-(\xi_i-z_i)\lambda(t)}|$$

для всех $t\geqslant r$. Поэтому

$$\left|\int_r^R e^{-\zeta\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|\leqslant C\sum_{i=1}^{2}\left\{|e^{-(\xi_i-z_i)\lambda(R)}|+|e^{-(\xi_i-z_i)\lambda(r)}|\right\}+$$

$$+|\zeta-z|\sec\gamma\sum_{i=1}^{2}\int_r^R|e^{-(\xi_i-z_i)\lambda(t)}|\,\sigma'(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C\left\{2\sum_{i=1}^{2}\exp\left[-|\xi_i-z_i|\,\sigma(r)\sin\delta\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{2}\frac{|\zeta-z|}{|\xi_i-z_i|}\,\frac{\sec\gamma}{\sin\delta}\exp\left[-|\xi_i-z_i|\,\sigma(r)\sin\delta\right]\right\}<\varepsilon$$

при достаточно большом r. Следовательно, $\zeta\in G$ и выпуклость области G доказана.

Ряд Дирихле (1) получается из интеграла (3), если $\alpha(0)=0$, $\alpha(t)=\sum_{k=0}^{[t]} a_k$ при $t>0$, $\lambda(n)=\lambda_n$. Условие (4)' для ряда заменяется условием (2). Формулы (6), (9) и (12) принимают соответственно вид $\left(\tilde{t}_n=[t_n]+\operatorname{sign}(t_n-[t_n])\right)$;

$$c(y)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\mu_n}\ln\left\{\sup_{m\in I_n}\left|\sum_{k=\tilde{t}_n}^{m}a_k\exp[-iy\lambda_k]\right|\right\}=$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n}\ln\left|\sum_{k=0}^{n}a_k\exp[m_k-m_n-iy\lambda_k]\right|=$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\mu_n}\ln\left\{\sup_{m\in I_n}\left|\sum_{k=\tilde{t}_n}^{m}a_k\exp[m_k-m_n-iy\lambda_k]\right|\right\},\tag{14}$$

где $\lambda_n=\sigma_n+i\tau_n$, причем выражение $\exp[-iy\lambda_k]$ может быть заменено на $\exp[y\tau_k]$. В этих равенствах последовательность $\{t_n\}$, соответствующая заданной последовательности $\{\mu_n\}$ выбирается следующим образом: строится произвольная непрерывная дифференцируемая функция $\lambda(t)$, удовлетворяющая условию (4), такая, что $\lambda_n=\lambda(n)$. Для такой функции $\sigma(t)=\operatorname{Re}\lambda(t)$ при всех достаточно больших t монотонно стремится к ∞, поэтому существует такая последовательность $\{t_n\}$, что $\mu_n=\sigma(t_n)$. Последовательность $\{m_n\}$ выбирается так, чтобы имело место

$$\lim_{n\to\infty}m_n=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{m_{n+1}-m_n}{\sigma_{n+1}-\sigma_n}=\infty,\quad \text{но}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n^k}\ \frac{m_{n+1}-m_n}{\sigma_{n+1}-\sigma_n}=0$$

для некоторого $k>0$. Можно взять, например, $m_n=\sigma_n^2$.

§ 2. Равномерная сходимость

Обозначим $V(z_0,\psi)=\{z:|\arg(z-z_0)|\leqslant\psi\}$. Покажем, что, *если интеграл* (3) *не сходится равномерно во всей плоскости, то не существует такая конечная точка z_0, чтобы он равномерно сходился в угле $V(z_0,\psi)$, где $\frac{\pi}{2}<\psi\leqslant\pi$.*

Для $\psi=\pi$ это утверждение очевидно, поэтому будем считать, что $\psi=\frac{\pi}{2}+\Delta$, где $0<\Delta<\frac{\pi}{2}$. Предположим, что имеет место равномерная сходимость в угле $V(z_0,\psi)$. Тогда для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое число r_1, что при всех $R>r>r_1$

$$\left|\int_r^R e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|<\varepsilon\tag{15}$$

для всех $z\in V(z_0,\psi)$. Если γ, $\alpha<\gamma<\frac{\pi}{2}$, некоторое фиксированное число, то существует такое число r_2, что для всех $t>r_2$ выполняются неравенства (5).

Тогда при всех $r>r_0$ и $t>r_0$, где $r_0=\max\{r_1, r_2\}$, неравенства (15) и (5) выполняются одновременно. Рассмотрим точки z' и z такие, что $z'\in V(z_0, \psi)$, $|\arg(z-z')|=\frac{\pi}{2}-\alpha-\delta_0$, где $0<\delta_0<\frac{\pi}{2}-\alpha$, и пусть $\gamma=\alpha+\delta_0-\delta$, где $0<\delta<\delta_0$. Из хода доказательства теоремы Абеля видно, что для произвольного $\varepsilon>0$

$$\left|\int\limits_t^\infty e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|<\varepsilon\left(1+\frac{\sec\gamma}{\sin\delta}\right)|e^{-(z-z')\lambda(t)}|, \tag{16}$$

при всех $t>r_0$, где r_0 не зависит от z' и z.

Пусть точка $\zeta\in V(z_0, \psi)$ выбрана произвольно. Мы хотим показать, что неравенство (15) верно и для $z=\zeta$ при всех $r>r_0$, что будет означать равномерно сходимость интеграла (3) во всей плоскости. Без нарушения общности рассуждений можно считать, что $\arg(z_0-\zeta)=0$. Выберем δ_0 : $\max\{\Delta-\alpha, 0\}<\delta_0<\frac{\pi}{2}-\alpha$ и на вертикали, проходящей через точку ζ, возьмем произвольную точку ξ_1, внутреннюю для $V(z_0, \psi)$ (пусть, например, $\operatorname{Im}\xi_1>\operatorname{Im}\zeta$), и точку ξ_2, симметричную с ней относительно ζ (см. рис. 1). На сторонах угла $V(z_0, \psi)$ возь-

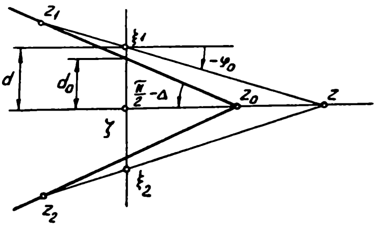

Рис. 1

мем такие точки z_1 и z_2, чтобы $\arg(\xi_1-z_1)=-\varphi_0$ и $\arg(\xi_2-z_2)=\varphi_0$, где $\varphi_0=\frac{\pi}{2}-$ $-\alpha-\delta_0$, и пусть z – такая точка, что $\arg(z-z_1)=-\varphi_0$, $\arg(z-z_2)=\varphi_0$ (такая точка существует, так как $\varphi_0\neq 0$). С помощью элементарных вычислений получаем

$$\frac{|\zeta-z|}{|\xi_1-z_1|}=\frac{d}{d-d_0}\operatorname{ctg}\varphi_0\frac{\cos(\varphi_0+\Delta)}{\sin\Delta},$$

где d_0—длина отрезка вертикали между точкой ζ и стороной угла $V(z_0, \psi)$ и $d=|\xi_1-\zeta|=|\xi_2-\zeta|$. Так как

$$\lim_{d\to\infty}\frac{|\zeta-z|}{|\xi_1-z_1|}=\operatorname{ctg}\varphi_0\frac{\cos(\varphi_0+\Delta)}{\sin\Delta},$$

то для произвольного $\sigma>0$ имеем при всех достаточно больших d:

$$\frac{|\zeta-z|}{|\xi_1-z_1|}<\operatorname{ctg}\varphi_0\frac{\cos(\varphi_0+\Delta)}{\sin\Delta}+\sigma. \tag{17}$$

Оценим теперь $\left|\int\limits_r^R e^{-\zeta\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|$ при $r>r_0$. Обозначим $\beta(t)=\int\limits_t^\infty e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t)$.

С помощью таких же рассуждений, какие были проведены при доказательстве выпуклости области сходимости G, и используя неравенства (16) и (17), получаем:

$$\left|\int\limits_r^R e^{-\zeta\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right| = \left|\int\limits_r^R e^{-(\zeta-z)\lambda(t)}\,d\beta(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left(1+\frac{\sec\gamma}{\sin\delta}\right)\left\{4\exp\left[-|\xi_1-z_1|\,\sigma(r)\sin\delta\right]+\right.$$

$$\left.+\,2\,|\zeta-z|\sec\gamma\int\limits_r^R \exp\left[-|\xi_1-z_1|\,\sigma(t)\sin\delta\right]\sigma'(t)\,dt\right\}<$$

$$<2\varepsilon\left(1+\frac{\sec\gamma}{\sin\delta}\right)\left\{2+\right.$$

$$\left.+\left[\operatorname{ctg}\varphi_0\frac{\cos(\varphi_0+\Delta)}{\sin\Delta}+\sigma\right]\frac{\sec\gamma}{\sin\delta}\right\}\exp\left[-|\xi_1-z_1|\,\sigma(r)\sin\delta\right],$$

если d достаточно велико, или

$$\left|\int\limits_r^R e^{-\zeta\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|<\varepsilon\cdot C\exp\left[-|\xi_1-z_1|\,\sigma(r)\sin\delta\right],$$

где C не зависит от величины $|\xi_1-z_1|$. Выбрав d так, чтобы $|\xi_1-z_1|$ было достаточно велико и $C\exp\left[-|\xi_1-z_1|\,\sigma(r)\sin\delta\right]<1$, получаем

$$\left|\int\limits_r^R e^{-\zeta\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|<\varepsilon$$

при всех $r>r_0$. Так как выбранные нами числа δ_0 и δ пригодны для всех $\zeta\in V(z_0,\psi)$, то и соответствующее им число r_2, а значит и r_0, пригодны для всех $\zeta\in V(z_0,\psi)$, т.е. для всех точек плоскости. Таким образом, из равномерной сходимости интеграла (3) в угле $V(z_0,\psi)$, где $\frac{\pi}{2}<\psi<\pi$, следует его равномерная сходимость во всей плоскости, и наше утверждение доказано.

Введем для произвольных чисел y и ψ, $0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$, величину

$$x_\psi(y)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\mu_n}\ln\left\{\sup_{t\in I_n}\left[\sup_{r\geqslant 0,\ |\varphi|\leqslant\psi}\left|\int\limits_{t_n}^t \exp\left(-(re^{i\varphi}+iy)\,\lambda(u)\right)d\alpha(u)\right|\right]\right\}. \quad (18)$$

Теорема 3. *Для любого y, $-\infty<y<\infty$, и любого ψ, $0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$, интеграл* (3) *равномерно сходится в угле $V[x_\psi(y)+\delta+iy,\ \psi]$ при любом $\delta>0$ и не сходится равномерно в этом угле ни при каком $\delta<0$.*

Доказательство. 1. Пусть $z=x_\psi(y)+\delta+iy+re^{i\varphi}$, где $r\geqslant 0$, $|\varphi|\leqslant\psi$, произвольная точка угла $V[x_\psi(y)+\delta+iy,\ \psi]$ при $\delta>0$. Обозначим $\beta_n(t,\ r,\ \varphi)=$
$=\int\limits_{t_n}^{t}\exp\Big(-(re^{i\varphi}+iy)\,\lambda(u)\Big)\,d\alpha(u)$. По определению $x_\psi(y)$ существует такое число $K>0$, что для всех r,φ и $t\in I_n$ при всех n выполняется неравенство $|\beta_n(t,$ $r,\varphi)|\leqslant Ke^{x'\mu_n}$, где $x_\psi(y)<x'<x_\psi(y)+\delta$. Как и при доказательстве теоремы 1, получаем для всех достаточно больших ζ:

$$\left|\int\limits_{\zeta}^{\zeta'} e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|\leqslant C\sum_{k=p}^{q}\exp\left[-(x_\psi(y)+\delta-x')\,h_1k\right],$$

где $C>0$ и не зависит от z. Это и означает равномерную сходимость интеграла (3) в угле $V[x_\psi(y)+\delta+iy,\ \psi]$.

2. Предположим, что интеграл (3) равномерно сходится в угле $V[x_\psi(y)+$ $+\delta+iy,\ \psi]$ при некотором $\delta<0$. Тогда для всех $z=x_\psi(y)+\delta+iy+re^{i\varphi}$ и всех $t\in I_n$ при достаточно больших n имеем $|\gamma_n(t)|\leqslant 1$, где

$$\gamma_n(t)=\int\limits_{t_n}^{t} e^{-z\lambda(u)}\,d\alpha(u).$$

Отсюда для всех $r,\ \varphi,\ t\in I_n$

$$\left|\int\limits_{t_n}^{t}\exp\left[-(re^{i\varphi}+iy)\,\lambda(u)\right]\,d\alpha(u)\right|=\left|\int\limits_{t_n}^{t}\exp\Big([x_\psi(y)+\delta]\,\lambda(u)\Big)\,d\gamma_n(u)\right|\leqslant$$
$$\leqslant C\exp\left\{x_\psi(y)+\delta]\ \mu_n\right\},$$

где $C=\max\left\{1+2\sec\gamma,\ (1+2\sec\gamma)\exp\left([x_\psi(y)+\delta]\,h_2\right)\right\}$, так что $x_\psi(y)\leqslant x_\psi(y)+$ $+\delta$, т.е. $\delta\geqslant 0$, что противоречит предположению.

Рассуждая как при доказательстве теоремы 1 и формулы (9), можно показать, что величина $x_\psi(y)$ в теореме 3 равна

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\mu_n}\ln\left\{\sup_{t\in I_n}\left[\sup_{r\geqslant 0,\ |\varphi|\leqslant\psi}\left|\int\limits_{t_n}^{t}\exp\left[\varphi(u)-\varphi(t)-(re^{i\varphi}+iy)\,\lambda(u)\right]d\alpha(u)\right|\right]\right\}.\quad(19)$$

Если вместо условия (4) потребовать выполнения более сильного условия $|\arg\lambda'(t)|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, то для $0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}-\alpha$ можно показать, что

$$x_\psi(y)=\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{\sigma(t)}\ln\left\{\sup_{r\geqslant 0,\ |\varphi|\leqslant\psi}\left|\int\limits_{0}^{t}\exp\left[\varphi(u)-\varphi(t)-(re^{i\varphi}+iy)\,\lambda(u)\right]d\alpha(u)\right|\right\}.\ (20)$$

Действительно, такими же рассуждениями, как и при доказательстве формулы (9), показывается, что интеграл (3) равномерно сходится в угле $V[x_\psi(y)+$ $+\delta+iy,\ \psi]$ при $\delta>0$. Если предположить, что имеет место равномерная сходимость в этом угле при $\delta<0$, то существует такое число t_0, что для всех $r,\ \varphi$

выполняется $\left|\int\limits_{t_0}^{t} e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|<1$ при всех $t\geqslant t_0$. Если $\gamma(t, r, \varphi)=\int\limits_0^t e^{-z\lambda(t)}d\alpha(t)$, то для $t\geqslant t_0$

$$|\gamma(t,\ r,\ \varphi)|\leqslant 1+\left|\int\limits_{t_0}^{t_0} e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 1+\max_{0\leqslant t\leqslant t_0}|\exp\{-[x_\psi(y)+\delta+iy]\,\lambda(t)\}|\cdot\int\limits_0^{t_0}|d\alpha(t)|=K,$$

и тем более эта оценка верна для $t\leqslant t_0$. Оценивая выражение

$$\left|\int\limits_0^t \exp\left[\varphi(u)-(re^{i\varphi}+iy)\,\lambda(u)\right]d\alpha(u)\right|=$$

$$=\left|\int\limits_0^t \exp\left[\varphi(u)+(x_\psi(y)+\delta)\,\lambda(u)\right]d_u\gamma(u,\ r,\ \varphi)\right|$$

как и при доказательстве формулы (9), получим $x_\psi(y)\leqslant x_\psi(y)+\delta$, т.е. $\delta\geqslant 0$, что противоречит предположению.

Замечания. 1. Как уже было отмечено, из хода доказательства теоремы Абеля следует, что случай $\psi<\frac{\pi}{2}-\alpha$ тривиален.

2. Пусть теперь $\frac{\pi}{2}-\alpha<\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$ и для произвольного η, $0<\eta<\alpha$, существует такая стремящаяся к бесконечности последовательность $\{t_n\}$ точек роста функции $\alpha(t)$, что $\psi(t_n)=\arg\lambda(t_n)>\alpha-\eta$ $(n=1, 2, \ldots)$ и для некоторых последовательностей положительных чисел $\{\delta_n\}$ и комплексных чисел $\{s_n\}$, $s_n\neq 0$, при всех δ, $0<\delta\leqslant\delta_n$, выполняется равенство: а) $\alpha(t_n)-\alpha(t_n-\delta)=s_n$ или б) $\alpha(t_n)-\alpha(t_n+\delta)=s_n$. Покажем, что в этом случае интеграл (3) не может сходиться равномерно в угле $V(z_0, \psi)$ ни при каких z_0 и ψ, $\psi>\frac{\pi}{2}-\alpha$.

Пусть z_0 — произвольная точка плоскости, $\psi=\frac{\pi}{2}-\alpha+\Delta$ $(0<\Delta<\alpha)$, z — произвольная точка луча $\arg(z-z_0)=\psi$. Выберем η, $0<\eta<\Delta$, и возьмем z столь большим по модулю, чтобы было $\left|\arg z-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\Delta\right)\right|<\varepsilon$, где $0<\varepsilon<\Delta-\eta$. Тогда $\arg z+\psi(t_n)>\frac{\pi}{2}+\Delta-\eta-\varepsilon$, и $\cos[\arg z+\psi(t_n)]<-\sin(\Delta-\eta-\varepsilon)$ $(n=1, 2, \ldots)$. По предположению для произвольного $r>0$ существует точка $t_n>r$. Если выполняется равенство а), то рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{t_n-\delta}^{t_n} e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t),\ \text{где}\ 0<\delta<\min\{\delta_n,\ t_n-r\}.$$

Имеем

$$\left|\int\limits_{t_n-\delta}^{t_n} e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right|>|s_n|\exp\left[|z|\,\Lambda(t_n)\sin(\Delta-\eta-\varepsilon)\right]\to\infty$$

при $|z|\to\infty$. Если выполняется равенство б), то

$$\left|\int\limits_{t_n}^{t_n+\delta} e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t)\right| \to \infty \quad \text{при} \quad |z|\to\infty, \quad \text{где} \quad 0<\delta\leqslant\delta_n.$$

Отсюда и следует, что интеграл (3) не может сходиться равномерно в угле $V(z_0,\ \psi)$.

Отметим в заключение, что формулы (18), (19) и (20) для ряда (1) имеют соответственно вид:

$$x_\psi(y)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{\mu_n}\ln\left\{\sup_{m\in I_n}\left[\sup_{r\geqslant 0,\ |\varphi|\leqslant\psi}\left|\sum_{k=\tilde{t}_n}^{m} a_k\exp\left(-(re^{i\varphi}+iy)\lambda_k\right)\right|\right]\right\}=$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{\mu_n}\ln\left\{\sup_{m\in I_n}\left[\sup_{r\geqslant 0,\ |\varphi|\leqslant\psi}\left|\sum_{k=\tilde{t}_n}^{m} a_k\exp\left(m_k-m_n-(re^{i\varphi}+iy)\lambda_k\right)\right|\right]\right\}=$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{\sigma_n}\ln\left\{\sup_{r\geqslant 0,\ |\varphi|\leqslant\psi}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\exp\left(m_k-m_n-(re^{i\varphi}+iy)\lambda_k\right)\right|\right\},$$

где $\sigma_n=\mathrm{Re}\,\lambda_n$, последовательности $\{t_n\}$ и $\{m_n\}$ выбраны так же, как и в формулах (14). Если точки λ_n приближаются к сторонам угла $|\arg z|\leqslant\alpha$ сколь угодно близко при сколь угодно больших индексах n, для которых $a_n\neq 0$, то, как следует из замечания 2, $x_\psi(y)$ может быть конечным только при $\psi\leqslant\frac{\pi}{2}-\alpha$.

Московский институт
химического машиностроения

Поступило в редакцию
17.X.1969

Литература

1. А. Мишкелявичус, О сходимости рядов Дирихле, Лит. матем. сб., **III**, 2 (1963), 105—114.
2. А. Мишкелявичус, Об области сходимости ряда Дирихле, Лит. матем. сб., **V**, 1(1965), 117—126.
3. А. Мишкелявичус, О границе области сходимости ряда Дирихле, Лит. матем. сб., **VI**, 1(1966), 91—98.
4. R. Chambrial, Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, t. 260, 1965, p. 6263—6266.
5. R. Chambrial, Bull. Sc. math., 2-série, 91, 1967, p. 97—104.
6. D. V. Widder, The Laplace transform, Princeton, 1946.

LAPLASO—STILTIESO TIPO INTEGRALO KONVERGENCIJOS KLAUSIMU

V. Abdrakmanovas

(*Reziumė*)

Darbe įrodytos kelios formulės, kuriomis nusakoma integralo

$$\int\limits_0^\infty e^{-z\lambda(t)}\,d\alpha(t), \tag{1}$$

$$\left(\lim_{t\to\infty}|\lambda(t)|=\infty,\quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\,|\arg\lambda'(t)|=\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

konvergencijos sritis.

Atskirą atvejį, kai (1) integralas suvedamas į Dirichlė eilutę, nagrinėjo A. Miškelevičius — [1], [2], [3] straipsniuose, bet jo įrodytos formulės skiriasi savo pavidalu nuo duotų šiame darbe.

Darbe taip pat randami kampai $|\arg(z-z_0)| < \frac{\pi}{2} - \alpha$, kuriuose (1) integralas tolygiai konverguoja.

SUR LA CONVERGENCE DE L'INTÉGRALE DE LAPLACE–STIELTJES TYPE

V. Abdrakmanov

(*Résumé*)

On établie quelques formules qui permettent déterminer le domaine de la convergence simple de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(t)}\, d\alpha(t), \tag{1}$$

$$\left(\lim_{t\to\infty} |\lambda(t)| = \infty, \quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\, |\arg \lambda'(t)| = \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Dans le cas où l'intégrale (1) se réduit à une série de Dirichlet, les exposants complexes de cette série vérifient les mêmes conditions que dans les articles de A. Michkelavitchus [1], [2], [3], mais la forme des formules dont il s'agit ne coïncide pas avec celle de A. Michkelavitchus.

On trouve aussi des angles $|\arg(z-z_0)| < \frac{\pi}{2} - \alpha$ dans lesquelles l'intégrale (1) converge uniformement.