XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1971

УДК 512.25+519.3:30.115

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ДИСКРЕТНОГО ПРОЦЕССА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ К НЕПРЕРЫВНОМУ

В. Бистрицкас

Исследуя дискретный процесс оптимального управления, в работе [3] получено функциональное уравнение

$$f(x, y)=\max\begin{bmatrix} A: p_1^\Delta\,[ax\Delta+by\Delta+f(r_1^\Delta x,\ r_2^\Delta y)], \\ B: p_2^\Delta\,[cx\Delta+dy\Delta+f(s_1^\Delta x,\ s_2^\Delta y)], \end{bmatrix} \tag{1}$$

где параметры Δ, a, b, c, d, p_i, s_i, r_i; $i=1, 2$, удовлетворяют неравенствам $0<p_1, r_i, p_2, s_i<1$, $x,y\geqslant 0$, $p_i\Delta>0$. Дискретный процесс оптимального управления является решением в пространстве поведений функционального уравнения (1) (см. [1], стр. 111).

Для определения его непрерывного аналога рассмотрим задачу оптимального управления: найти такое допустимое управление $\varphi_1(t)$, $0\leqslant\varphi_1(t)\leqslant 1$, чтобы интеграл

$$I=\int_0^\infty x_3\,[(ax_1+bx_2)\,\varphi_1(t)+(cx_1+dx_2)\,\varphi_2(t)]\,dt$$

принимал наибольшее возможное значение, когда фазовые переменные удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=[\varphi_1(t)\ln r_1+\varphi_2(t)\ln s_1]\,x_1(t),\quad x_1(0)=z,$$

$$\frac{dx_2}{dt}=[\varphi_1(t)\ln r_2+\varphi_2(t)\ln s_2]\,x_2(t),\quad x_2(0)=y,$$

$$\frac{dx_3}{dt}=[\varphi_1(t)\ln p_1+\varphi_2(t)\ln p_2]\,x_3(t),\quad x_3(0)=1,$$

где $\varphi_2(t)=1-\varphi_1(t)$ (см. [3]). Непрерывный аналог дискретного процесса оптимального управления определяем синтезом оптимального управления (см. [4], стр. 154). Синтез оптимального управления $\varphi(x_1,x_2)$ и решение в пространстве поведений уравнения (1) найдено автором в работах [2–3]. Данная работа посвящена исследованию сходимости дискретного процесса оптимального управления к непрерывному.

Теорема. *Области управления предельного дискретного процесса оптимального управления, полученного при $\Delta\to 0$, совпадают с областями управления его непрерывного аналога.*

Замечание. В дискретном случае, термин „область решения" заменен термином „область управления". В непрерывном случае, A-область управления составляют те точки $x=(x_1, x_2)$, для которых синтез оптимального управления $\varphi(x)$ является однозначной функцией, равной единице, а B-область управления составляют те точки $x=(x_1, x_2)$, для которых функция $\varphi(x)=0$ и $\varphi(x)\neq\neq 1$ (см. [3]).

Доказательство. Согласно теореме 2, доказанной в работе [2], при

$$p(\Delta)=a(1-p_2^{\Delta}s_1^{\Delta})-c(1-p_1^{\Delta}r_1^{\Delta})>0$$

и

$$q(\Delta)=d(1-p_1^{\Delta}r_2^{\Delta})-b(1-p_2^{\Delta}s_2^{\Delta})>0 \tag{2}$$

функция $f(x, y)$ имеет вид:

$$f(x,y)=\begin{cases} f_A(x, y) & \text{для } K(\Delta)x\geqslant q(\Delta)y, \\ f_B(x, y) & \text{для } K(\Delta)x\leqslant q(\Delta)y, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$K(\Delta)=\begin{cases} p(\Delta), & \text{когда } r_1\leqslant r_2,\ s_1\geqslant s_2; \\ \dfrac{p(\Delta)(1-p_2^{\Delta}s_2^{\Delta})(1-p_1^{\Delta}r_2^{\Delta})}{(1-p_2^{\Delta}s_1^{\Delta})(1-p_1^{\Delta}r_1^{\Delta})}, & \text{когда } r_1\geqslant r_2,\ s_1\geqslant s_2; \\ \dfrac{p(\Delta)(1-p_1^{\Delta}r_2^{\Delta})}{1-p_1^{\Delta}r_1^{\Delta}}, & \text{когда } r_1\geqslant r_2,\ s_1\leqslant s_2; \\ \dfrac{p(\Delta)(1-p_2^{\Delta}s_2^{\Delta})}{1-p_2^{\Delta}s_1^{\Delta}}, & \text{когда } r_1\leqslant r_2,\ s_1\leqslant s_2. \end{cases}$$

Разлагая функции $p(\Delta)$ и $q(\Delta)$ по степеням Δ, получаем, что

$$p(\Delta)=c\Delta\ln(p_1r_1)-a\Delta\ln(p_2s_1)+o(\Delta)>0$$

и

$$q(\Delta)=b\Delta\ln(p_2s_2)-d\Delta\ln(p_1r_2)+o(\Delta)>0.$$

Разделив обе стороны неравенств на $\Delta\neq 0$, переходим к пределу, когда $\Delta\to 0$. Таким образом,

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{p(\Delta)}{\Delta}=c\ln(p_1r_1)-a\ln(p_2s_1)=v\geqslant 0$$

и

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{q(\Delta)}{\Delta}=b\ln(p_2s_2)-d\ln(p_1r_1)=u\geqslant 0.$$

После перехода к пределу, когда $\Delta\to 0$, получаем, что

$$f(x, y)=\begin{cases} f_A(x, y) & \text{для } Kx\geqslant uy, \\ f_B(x, y) & \text{для } Kx\leqslant uy, \end{cases}$$

где $K=\lim\limits_{\Delta\to 0} K(\Delta)$ и $u=\lim\limits_{\Delta\to 0} q(\Delta)$. В случае, когда $r_1\leqslant r_2$, $s_1\geqslant s_2$, имеем, что

$$\lim_{\Delta\to 0} K(\Delta)=K=v.$$

Если $r_1\geqslant r_2$ и $s_1\leqslant s_2$, то

$$\lim_{\Delta\to 0} K(\Delta)=K=v\lim_{\Delta\to 0}\frac{(1-p_2^{\Delta}s_2^{\Delta})(1-p_1^{\Delta}r_2^{\Delta})}{(1-p_1^{\Delta}r_1^{\Delta})(1-p_2^{\Delta}s_1^{\Delta})}=\frac{v\ln(p_2s_2)\ln(p_1r_2)}{\ln(p_1r_1)\ln(p_2s_1)}.$$

Аналогично получаем, что

$$K=\frac{v\ln(p_1r_2)}{\ln(p_1r_1)}, \text{ когда } r_1\geqslant r_2,\ s_1\geqslant s_2,$$

и

$$K=\frac{v\ln(p_2s_2)}{\ln(p_2s_1)}, \text{ когда } r_1\leqslant r_2,\ s_1\leqslant s_2.$$

Сравнивая полученную границу $y=Kx$ и области управления предельного дискретного процесса управления с областями его непрерывного аналога, найденными в работе [3], получаем утверждение теоремы в случае, когда $p(\Delta)$, $q(\Delta)>0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Теорема доказана.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
26.II.1970

Литература

1. Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, М., 1960.
2. В. Бистрицкас, Бесконечношаговый дихотомический процесс решения динамического программирования, Лит. матем. сб., **X**, 3 (1970).
3. В. Бистрицкас, Оптимальное управление непрерывным процессом динамического программирования в бесконечном интервале времени, Лит. матем. сб., **X**, 4 (1970).
4. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.

DISKRETINIO OPTIMALAUS VALDYMO PROCESO KONVERGENCIJOS Į TOLYDINĮ KLAUSIMU

V. Bistrickas

(*Reziumė*)

Darbe parodoma, kad diskretinio optimalaus valdymo (1) proceso valdymo sritys, kai $\Delta\to0$, konverguoja į tolydinio analogo valdymo sritis.

ON THE CONVERGENCE OF DISCRETE OPTIMUM CONTROL PROCESS TO ITS CONTINUOUS ANALOGUE

(*Summary*)

V. Bistrickas

On the paper is proved that the control regions of discrete optimum control process (1) converge to the control regions of its continuous analogue when $\Delta\to0$.