XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
1971

УДК 513.7(02)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА

В. И. Близникас

Некоторые задачи движения механических систем, подчиненных добавочным неголономным связям, приводят к понятию неголономного многообразия (в пространстве конфигураций механической системы). Если пространство конфигураций механической системы является n-мерным римановым пространством V_n, то заданием $n-m$ неголономных связей в каждом локальном пространстве E_n (A) риманова пространства V_n определяется m-мерный пучок направлений. Поле этих m-мерных пучков направлений и называется неголономной m-мерной поверхностью $V_n{}^m$ риманова пространства V_n. Следует заметить, что

$$\dim V_n^m = n \qquad (1 \leqslant m \leqslant n-1).$$

В. В. Вагнер заметил [2], что к понятию неголономного многообразия можно прийти независимо от задач механики, т.е. обобщая основные положения геометрии подпространств на тот случай, когда поле m-мерных пучков направлений, при определении подпространства локального касательного пространства в каждой точке, уже не задает семейства m-мерных подпространсть пространства V_n.

Довольно полная библиография работ по неголономной геометрии приведена в монографиях Г. Врэнчану [9] и Т. Михайлеску [8] (в обзорной статье Р. М. Щербакова [7] дан перечень некоторых работ по геометрии неголономных поверхностей трехмерного евклидова пространства, но интересные исследования Д. М. Синцова [4], В. В. Вагнера [2] и Я. П. Бланка [1] остались не отмеченными). Следует отметить, что в работе М. Р. Рогового [6] неголономная гиперповерхность евклидова пространства E_n определяется при помощи системы дифференциальных уравнений, которые являются противоречивыми.

В этой заметке методом Г. Ф. Лаптева [3] рассматривается неголономная гиперповерхность риманова пространства (без кручения).

§ 1. Основные уравнения

Структурные уравнения n-мерного риманова пространства V_n имеют вид $(i, j, = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha,\ \beta = 1, 2, \ldots, n-1)$:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i,\ \ D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jpq}^i \omega^p \wedge \omega^q, \tag{1.1}$$

где R^i_{jpq} – тензор кривизны риманова пространства. 1-формы ω^i и ω^i_j определяют главные линейные части отображения соседнего локального пространства $E_n\,(u+du)$ точки $A\,(u+du)$ на исходное $E_n\,(u)$ [3]:

$$A\,(u+du)\to \mathbf{A}\,(u,\ du)\cong \omega^i\mathbf{e}_i\,(u),$$

$$\mathbf{e}_i\,(u+du)\to \mathbf{e}_i\,(u,\ du)\cong \mathbf{e}_i\,(u)+\omega^k_i\mathbf{e}_k\,(u), \tag{1.2}$$

причем

$$\nabla g_{ij}\equiv dg_{ij}-g_{kj}\omega^k_j-g_{jk}\omega^k_j=0, \tag{1.3}$$

где $g_{ij}=(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ и $\{A,\mathbf{e}_i\}$ – репер локального касательного пространства $E_n\,(A)$ точки A риманова пространства V_n.

Дифференциальные уравнения гиперповерхности V_{n-1} риманова пространства V_n можно записать в следующем виде:

$$\omega^i=\Lambda^i_\alpha\Theta^\alpha,\ (\nabla\Lambda^i_\alpha)\wedge\Theta^\alpha=0, \tag{1.4}$$

где

$$D\Theta^\alpha=\Theta^\beta\wedge\Theta^\alpha_\beta,\ D\Theta^\alpha_\beta=\Theta^\gamma_\beta\wedge\Theta^\alpha_\gamma+\Theta^\gamma\wedge\Theta^\alpha_{\beta\gamma}. \tag{1.5}$$

Так как ранг $\|\Lambda^i_\alpha\|=n-1$, то векторы $\mathbf{\Lambda}_\alpha=\Lambda^i_\alpha\mathbf{e}_i$ образуют базискасательной гиперплоскости $E_{n-1}\,(A)\subset E_n\,(A)$. Если $\Lambda_\alpha=e_\alpha$, то

$$\Lambda^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta,\ \Lambda^n_\beta=0 \tag{1.6}$$

и в этом случае дифференциальные уравнения гиперповерхности имеют вид $(\Theta^\alpha\equiv\omega^\alpha)$

$$\omega^n=0,\ \omega^n_\alpha\wedge\omega^\alpha=0. \tag{1.7}$$

Величины Λ^i_α образуют дифференциально-геометрический объект, который называется первым фундаментальным дифференциально-геометрическим объектом $H^{(1)}$ гиперповерхности $V_{n-1}\subset V_n$. Дифференциальные уравнения поля дифференциально-геометрического объекта $H^{(1)}$, определенного на гиперповерхности V_{n-1}, имеют вид

$$\nabla\Lambda^i_\alpha=\Lambda^i_{\alpha\beta}\Theta^\beta,\ \Lambda^i_{\alpha\beta}=\Lambda^i_{\beta\alpha},$$

$$(\nabla\Lambda^i_{\alpha\beta}-\Lambda^i_\gamma\Theta^\gamma_{\alpha\beta}+\tilde{R}^i_{\alpha\beta\sigma}\Theta^\sigma)\wedge\Theta^\beta=0, \tag{1.8}$$

где

$$\tilde{R}^i_{\alpha\beta\gamma}=R^i_{kpq}\Lambda^k_\alpha\Lambda^p_\beta\Lambda^q_\gamma.$$

Если репер $\{A,\mathbf{e}_i\}$ частично канонизирован, то дифференциальные уравнения того же поля $H^{(1)}$ принимают вид

$$\omega^n_\alpha=\Lambda_{\alpha\beta}\omega^\beta,\ \Lambda_{\alpha\beta}=\Lambda_{\beta\alpha}, \tag{1.8'}$$

$$(\nabla\Lambda_{\alpha\beta}+\ \cdots)\wedge\omega^\beta=0.$$

Определение. Риманово пространство V_n с заданным полем дифференциально-геометрического объекта $H^{(1)}$ называется неголономной гиперповерхностью V^{n-1}_n риманова пространства V_n.

Очевидно, что неголономная гиперповерхность V^{n-1}_n риманова пространства V_n является n-мерной поверхностью касательного пучка риманова пространства, т.е. n-мерной секущей поверхностью этого пучка.

Из определения неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} риманова пространства V_n следует, что (в частично канонизированном репере) дифференциальные уравнения этой гиперповерхности имеют вид:

$$\omega_\alpha^n = a_{\alpha\beta}\omega^\beta + a_\alpha\omega^n, \tag{1.9}$$

$$\{\nabla a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}\omega_n^n - (R_{\alpha\beta\gamma}^n + a_\alpha a_{[\beta\gamma]})\,\omega^\gamma\} \wedge \omega^\beta +$$

$$+ \{\nabla a_\alpha - a_{\alpha\beta}\omega_n^\beta + (a_\alpha a_\beta - 2R_{\alpha\beta n}^n)\,\omega^\beta\} \wedge \omega^n = 0. \tag{1.10}$$

Развертывая внешние уравнения (1.10) по лемме Картана, мы получим

$$\nabla a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}\omega_n^n = a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma + b_{\alpha\beta}\omega^n,$$

$$\nabla a_\alpha - a_{\alpha\beta}\omega_n^\beta = c_{\alpha\beta}\omega^\beta + c_\alpha\omega^n, \tag{1.11}$$

где

$$a_{\alpha\,[\beta\gamma]} = R_{\alpha\beta\gamma}^n + a_\alpha a_{[\beta\gamma]},$$

$$c_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + 2R_{\alpha\beta n}^n + a_\alpha a_\beta. \tag{1.12}$$

Дифференциальными уравнениями (1.9) определяется на V_n поле гиперплоскостей. Отсюда следует, что элементом неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} является пара (A, Π), состоящая из точки A риманова пространства V_n и гиперплоскости Π, которая принадлежит касательному пространству $E_n(A)$ точки A. Пару (A, Π) будем называть *опорным элементом неголономной гиперповерхности* V_n^{n-1}, а гиперплоскость Π — *опорной гиперплоскостью*. Считаем, что $A \in \Pi$.

Если $\{A, \mathbf{e}_i\}$ подвижный репер касательного пространства $E_n(A)$, то уравнения ($\omega^i\mathbf{e}_i$ и $\omega_i^k\mathbf{e}_k$ — главные линейные части отображения (1.2)):

$$d\mathbf{A} = \omega^i\mathbf{e}_i, \quad d\mathbf{e}_i = \omega_i^k\mathbf{e}_k \tag{1.13}$$

определяют инфинитезимальные смещения репера $\{A, \mathbf{e}_i\}$ только вдоль кривых пространства V_n.

§ 2. Индуцированная метрика и метрическая нормаль

Так как $g_{ij} = (e_i, e_j)$, то метрика опорной гиперплоскости Π имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta). \tag{2.1}$$

Отсюда, в силу уравнений (1.3) и (1.9), мы получим

$$\nabla g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta,\,\gamma}\,\omega^\gamma + h_{\alpha\beta}\omega^n, \tag{2.2}$$

где

$$g_{\alpha\beta,\,\gamma} = g_{\alpha n}a_{\beta\gamma} + g_{n\beta}a_{\alpha\gamma}, \tag{2.3}$$

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha n}a_\beta + g_{n\beta}a_\beta, \tag{2.4}$$

т.е. величины $g_{\alpha\beta}$ образуют тензор, который называется метрическим тензором неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}.

В каждом локальном касательном пространстве $E_n(A)$ мы можем определить вектор, ортогональный к опорной гиперплоскости Π. Этот вектор называется метрической нормалью неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} и имеет вид

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_n + p^\alpha\mathbf{e}_\beta, \tag{2.5}$$

где

$$g_{n\alpha}+p^{\sigma}g_{\alpha\sigma}=0. \qquad (2.6)$$

Если метрика неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} невырожденная, т.е.

$$\det\|g_{\alpha\beta}\|\neq 0,$$

то

$$p^{\alpha}=-g^{\alpha\sigma}g_{n\sigma}, \qquad (2.7)$$

где

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma}. \qquad (2.8)$$

Единичный вектор метрической нормали неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} имеет вид

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{e}_n+p^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}}{H}, \qquad (2.9)$$

где

$$H=\sqrt{g_{nn}+g_{n\alpha}p^{\alpha}} \qquad (2.10)$$

и

$$dH-H\omega_n^n=H_{\alpha}\omega^{\alpha}+H'\omega^n, \qquad (2.11)$$

причем

$$H_{\alpha}=Ha_{\beta\alpha}p^{\beta}. \qquad (2.12)$$

и

$$H'=Ha_{\alpha}p^{\alpha}. \qquad (2.13)$$

§ 3. Поляритет Пантази

1. *Интегральные кривые.* Пусть K – произвольная кривая риманова пространства V_n, дифференциальные уравнения которой имеют вид

$$\omega^i=l^i\Theta,\quad D\Theta=0. \qquad (3.1)$$

Если K^* – развертка кривой K на локальное касательное пространство $E_n\,(A)$ точки $A\in V_n$, то касательный вектор этой развертки (он называется касательным вектором кривой K) имеет вид

$$\frac{dA}{\Theta}=l^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}+l^{n}\mathbf{e}_{n}. \qquad (3.2)$$

Дифференцируя уравнения (3.1) внешним образом, мы получим

$$dl^n+l^n\omega_n^n=(l^n_{(1)}-l^{\alpha}a_{\alpha\beta}l^{\beta}-a_{\alpha}l^{\alpha}l^{n})\,\Theta, \qquad (3.3)$$

$$dl^{\alpha}+l^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}+l^{n}\omega_n^{\alpha}=l^{\alpha}_{(1)}\Theta. \qquad (3.4)$$

Если в римановом пространстве V_n задана неголономная гиперповерхность V_n^{n-1}, то любой кривой K риманова пространства V_n соответствует кривая $(K,\,\Pi)$ на неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}, т.е. однопараметрическое семейство опорных элементов (A,Π). Кривая K называется *центроидой кривой* $(K,\,\Pi)$, а кривая $(K,\,\Pi)$ – *лифтом кривой* K. Развертка кривой $(K,\,\Pi)$ состоит из однопараметрического семейства гиперплоскостей $\Pi\,(K^*)$ пространства $E_n\,(A)$, направляющая кривая которой совпадает с разверткой центроиды кривой $(K,\,\Pi)$. Дифференциальные уравнения кривой $(K,\,\Pi)$ имеют вид (3.1) и (1.9). Из дифференциальных уравнений (3.3) следует, что l^n является относительным инвариантом кривой (K, П).

Определение. Кривая (K, П) неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} риманова пространства V_n называется *интегральной кривой* (или *центроидальной кривой*) неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}, если относительный инвариант l^n этой кривой тождественно равен нулю.

Если $l^n=0$, то касательный вектор развертки K^* центроиды K принадлежит опорной гиперплоскости.

2. *Поляритет Пантази.* Пусть (K, П) – произвольная кривая неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} и П (K^*) – развертка этой кривой. Так как П (K^*) является однопараметрическим семейством гиперплоскостей и П $(K^*)\subset \subset E_n(A)$, то характеристика этого семейства имеет вид

$$x^n=0,\quad a_{\alpha\beta}x^\alpha l^\beta+a_\alpha x^\alpha l^n+l^n=0, \tag{3.5}$$

т.е. характеристика семейства П (K^*) является ($n-2$)-мерной плоскостью пространства $E_n(A)$. Таким образом, в каждом локальном касательном пространстве $E_n(A)$ устанавливается соответствие, т.е. любому вектору $\mathbf{l}=l^i\mathbf{e}_i\in \in E_n(A)$ соответствует ($n-2$)-мерная плоскость (3.5). Это соответствие называется *поляритетом Пантази* (см. [8]).

3. *Аффинная нормаль.* Из (3.5) следует, что на неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} риманова пространства V_n существуют такие кривые (K, П), вдоль разверток П (K^*) которых опорные гиперплоскости П смещаются параллельно. Это будет тогда и только тогда, когда

$$a_{\alpha\beta}l^\beta+a_\alpha l^n=0,\quad l^n\neq 0, \tag{3.6}$$

т.е. когда характеристикой семейства П (K^*) является несобственная ($n-2$)-мерная плоскость опорной гиперплоскости П. Такие направления естественно назвать *аффинной нормалью* неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}.

Если $\det\|a_{\alpha\beta}\|\neq 0$, то неголономная гиперповерхность V_n^{n-1} имеет единственную аффинную нормаль. Если

$$\text{ранг}\,\|a_{\alpha\beta}\|=p<n-1,$$

то аффинные нормали неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} в каждом E_n (A образуют ($n-p$)-мерную плоскость (аффинно-нормальная плоскость неголономной гиперповерхности). Такие неголономные гиперповерхности естественно назвать сингулярными неголономными гиперповерхностями.

§ 4. Нормальная и геодезическая кривизна интегральной кривой

Так как длина дуги центроиды K интегральной кривой (K, П) неголономной гиперповерхности определяется при помощи следующей формулы ($\Theta>0$):

$$ds=F\Theta, \tag{4.1}$$

где

$$F=\sqrt{g_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta}, \tag{4.2}$$

то единичный вектор касательной развертки K^* центроиды K этой кривой имеет вид

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{l^\alpha\mathbf{e}_\alpha}{F}\,. \tag{4.3}$$

Так как

$$dF = F'\Theta, \tag{4.4}$$

где

$$F' = \frac{1}{2F}(g_{\alpha\beta,\,\sigma} l^\alpha l^\beta l^\sigma + 2 g_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta_{(1)}), \tag{4.5}$$

то (вдоль развертки)

$$\frac{d\tau}{ds} = \tau^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \frac{\mathring{a}_{(\alpha\beta)} l^\alpha l^\beta}{g_{\sigma\rho} l^\sigma l^\rho}\,\mathbf{n}, \tag{4.6}$$

где

$$\tau^\alpha = \frac{F(l^\alpha_{(1)} - F' l^\alpha) + a_{\beta\gamma} l^\beta l^\gamma p^\alpha}{g_{\sigma\rho} l^\sigma l^\rho}, \tag{4.7}$$

$$\mathring{a}_{\alpha\beta} = H a_{\alpha\beta}, \tag{4.8}$$

и вектор $\frac{d\tau}{ds}$ называется вектором первой абсолютной кривизны интегральной кривой (K, П) и равен сумме двух векторов $\tau^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ и $k_{(n)}\,\mathbf{n}$, первый из которых будем называть вектором геодезической кривизны интегральной кривой (K, П) а второй – вектором нормальной кривизны рассматриваемой кривой. Длины этих векторов определяются следующими формулами:

$$k_{(n)}| = \frac{\mathring{a}_{(\alpha\beta)} l^\alpha l^\beta}{g_{\sigma\rho} l^\sigma l^\rho}, \tag{4.9}$$

$$k_{(g)} = \sqrt{g_{\alpha\beta} \tau^\alpha \tau^\beta} \tag{4.10}$$

и

$$k^2_{(1)} = k^2_{(g)} + k^2_{(n)}. \tag{4.11}$$

Определение. Скаляры $k_{(1)}$, $k_{(g)}$ и $k_{(n)}$ называются, соответственно, *первой абсолютной кривизной*, *геодезической кривизной* и *нормальной кривизной* интегральной кривой (K, П) неголономной гиперповерхности V^{n-1}_n.

Обратные значения этих кривизн называются *радиусами кривизны* интегральной кривой (K, П). Заметим, что вектор нормальной кривизны $k_{(n)}\mathbf{n}$ зависит только от направлении касательной к развертке центроиды рассматриваемой интегральной кривой, но не зависит от $l^\alpha_{(1)}$. Отсюда следует теорема (аналог теоремы Менье, см. [5], стр. 78):

Теорема Менье. Проекция вектора первой абсолютной кривизны интегральной кривой (K, П) неголономной гиперповерхности V^{n-1}_n на метрическую нормаль этой гиперповерхности постоянна для всех интегральных кривых, имеющих в центре опорного элемента П неголономной гиперповерхности V^{n-1}_n общую касательную.

Если φ – угол между векторами $\frac{d\tau}{ds}$ и $k_{(n)}n$, то

$$k_{(n)} = k \cos \varphi. \tag{4.12}$$

Эта формула называется *формулой Менье* для неголономной гиперповерхности V^{n-1}_n риманова пространства V_n.

Интегральные кривые (K, П) неголономной гиперповерхности V^{n-1}_n, нормальная кривизна которых равна нулю, будем называть *асимптотическими* *кривыми* этой гиперповерхности. Асимптотические направления опорной гиперплоскости характеризуются следующими соотношениями

$$a_{(\alpha\beta)} l^\alpha l^\beta = 0. \tag{4.13}$$

Очевидно, что асимптотические направления в опорной гиперплоскости образуют $(n-2)$-мерный конус второго порядка, который называется *асимптотическим конусом* опорной гиперплоскости П неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}.

Интегральные кривые (K, Π) неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}, геодезическая кривизна которых равна нулю, будем называть *геодезическими кривыми*.

§ 5. Линии кривизны

1. *Главные кривизны первого рода.* Нам теперь надо исследовать закон изменения нормальной кривизны $k_{(n)}$ интегральной кривой (K, Π) при повороте касательной к развертке центроиды в опорной гиперплоскости, т.е. отыскать стационарные значения нормальной кривизны $k_{(n)}$.

Определение. Стационарные значения нормальной кривизны интегральной кривой (K, Π) неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} называются *главными кривизнами первого рода*, а направления касательной, которые им соответствуют, – *главными направлениями первого рода* опорной гиперплоскости неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}.

Из (4.9) следует, что

$$(k_{(n)} g_{\alpha\beta} - \mathring{a}_{(\alpha\beta)}) l^\alpha l^\beta = 0. \tag{5.1}$$

Так как $k_{(n)} = k_{(n)}(l^1, \ldots, l^{n-1})$, то необходимые условия стационарности нормальной кривизны $k_{(n)}$ имеют вид

$$\frac{\partial k_{(n)}}{\partial l^\alpha} = 0$$

или

$$(k_{(n)} g_{\alpha\beta} - \mathring{a}_{(\alpha\beta)}) l^\beta = 0. \tag{5.2}$$

Эта система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда

$$\det \| k_{(n)} g_{\alpha\beta} - \mathring{a}_{(\alpha\beta)} \| = 0. \tag{5.3}$$

Если метрика опорной гиперплоскости неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} положительно определенная, то корни уравнения (5.3) действительные и, в общем случае, в любой опорной гиперплоскости неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} существуют $(n-1)$ главных направлений первого рода.

Уравнение (5.3) можно привести к следующему виду:

$$\mathfrak{R}_0 k_{(n)}^{n-1} - \mathfrak{R}_1 k_{(n)}^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} \mathfrak{R}_{n-2} k_{(n)} + (-1)^{n-1} \mathfrak{R}_{n-1} = 0, \tag{5.4}$$

где $\mathfrak{R}_a$ $(a=0, 1, \ldots, n-1)$ – упорядоченная сумма всех различных определителей $(n-1)$-го порядка, составленных из элементов матрицы $\| g_{\alpha\beta} \|$, в которой a столбцов заменены соответствующими столбцами матрицы $\| \mathring{a}_{(\alpha\beta)} \|$. Например, когда $n-1=4$, то $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ и $\mathfrak{R}_3$ имеют вид:

$$\mathfrak{R}_1=\begin{vmatrix}\mathring{a}_{(11)} & g_{12} & g_{13} & g_{14}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathring{a}_{(41)} & g_{42} & g_{43} & g_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12} & \mathring{a}_{(13)} & g_{14}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{41} & g_{42} & \mathring{a}_{(43)} & g_{44}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}g_{11} & \mathring{a}_{(12)} & g_{13} & g_{14}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{41} & \mathring{a}_{(42)} & g_{43} & g_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13} & \mathring{a}_{(14)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & \mathring{a}_{44}\end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{R}_2=\begin{vmatrix}\mathring{a}_{(11)} & \mathring{a}_{(12)} & g_{13} & g_{14}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathring{a}_{(41)} & \mathring{a}_{(42)} & g_{43} & g_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathring{a}_{(11)} & g_{12} & \mathring{a}_{(13)} & g_{14}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathring{a}_{(41)} & g_{42} & \mathring{a}_{(43)} & g_{44}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}\mathring{a}_{(11)} & g_{12} & g_{13} & \mathring{a}_{(14)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathring{a}_{(41)} & g_{42} & g_{43} & \mathring{a}_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}g_{11} & \mathring{a}_{(12)} & a_{(13)} & g_{14}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{41} & \mathring{a}_{(42)} & \mathring{a}_{(43)} & g_{44}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}g_{(11)} & \mathring{a}_{(12)} & g_{13} & \mathring{a}_{(14)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{41} & \mathring{a}_{(42)} & g_{43} & \mathring{a}_{(44)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12} & \mathring{a}_{(13)} & \mathring{a}_{(14)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{41} & g_{42} & \mathring{a}_{(43)} & \mathring{a}_{(44)}\end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{R}_3=\begin{vmatrix}\mathring{a}_{(11)} & \mathring{a}_{(12)} & \mathring{a}_{(13)} & g_{14}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathring{a}_{(41)} & \mathring{a}_{(42)} & \mathring{a}_{(43)} & g_{(44)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}g_{11} & \mathring{a}_{(12)} & \mathring{a}_{(13)} & \mathring{a}_{(14)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{41} & \mathring{a}_{(42)} & \mathring{a}_{(43)} & \mathring{a}_{(44)}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}\mathring{a}_{(11)} & g_{12} & \mathring{a}_{(13)} & \mathring{a}_{(14)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathring{a}_{(41)} & g_{42} & \mathring{a}_{(43)} & \mathring{a}_{(44)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathring{a}_{(11)} & \mathring{a}_{(12)} & g_{13} & \mathring{a}_{(14)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathring{a}_{(41)} & \mathring{a}_{(42)} & g_{43} & \mathring{a}_{(44)}\end{vmatrix}.$$

Заметим, что

$$\mathfrak{R}_0=\det\|g_{\alpha\beta}\|,\quad \mathfrak{R}_{n-1}=\det\|\mathring{a}_{(\alpha\beta)}\|. \tag{5.5}$$

Определение. Инвариант $K_p\ (p=1, 2, \ldots, n-1)$, определенный равенством $(\alpha_1\neq\alpha_2\neq\ \ldots\ \neq\alpha_p)$

$$K_p=\frac{1}{(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}\sum_{\alpha_1=1}^{n-1}\sum_{\alpha_2=1}^{n-1}\cdots\sum_{\alpha_p-1}^{n-1}k_{\alpha_1}k_{\alpha_2}\cdots k_{\alpha_p}, \tag{5.6}$$

где k_{α_p} – корни уравнения (5.4), называется *p-той кривизной первого рода* рассматриваемой неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}.

Очевидно, что

$$K_p=\frac{(-1)^p}{(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}\cdot\frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{R}_0}. \tag{5.7}$$

Так как

$$K_1 = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_0} = -\frac{1}{(n-1)\,\mathfrak{R}_0}\left\{\begin{vmatrix} \mathring{a}_{(11)} & g_{12} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathring{a}_{(n-1,1)} & g_{n-1,2} & \cdots & g_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + \right.$$

$$+\begin{vmatrix} g_{11} & \mathring{a}_{(12)} & g_{13} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n-1,1} & \mathring{a}_{(n-1,2)} & g_{n-1,3} & \cdots & g_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + \cdots + \tag{5.8}$$

$$\left. + \cdots + \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,n-2} & \mathring{a}_{(1,n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,n-1} & \mathring{a}_{(n-1,n-1)} \end{vmatrix}\right\}$$

и $\mathfrak{R}_0 = \det \| g_{\alpha\beta} \|$, то первая кривизна первого рода (средняя кривизна первого рода) имеет вид

$$K_1 = -\frac{1}{n-1}\, g^{\alpha\beta}\mathring{a}_{(\alpha\beta)}. \tag{5.9}$$

2. *Линии кривизны первого рода.* Заметим, что главные направления первого рода неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} всегда ортогональны. Пусть k_1 и k_2 различные корни уравнения (5.4). Тогда главные направления, соответствующие этим корням, определяются системами

$$(k_1 g_{\alpha\beta} - \mathring{a}_{(\alpha\beta)})\, l_1^\alpha = 0, \quad (k_2 g_{\alpha\beta} - \mathring{a}_{(\alpha\beta)})\, l_2^\alpha = 0. \tag{5.10}$$

Если первую систему свернем с l_2^β, а вторую — с l_1^β, то получим

$$(k_1 - k_2)\, g_{\alpha\beta} l_1^\alpha l_2^\beta = 0,$$

т.е. главные направления $l_1^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ и $l_2^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, соответствующие различным корням уравнения (5.4), всегда ортогональные.

Определение. Интегральные кривые (K, Π) неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}, нормальные кривизны которых экстремальны, называются *линиями кривизны первого рода* неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} (придерживаемся терминологии Д. М. Синцова [4] и Я. П. Бланка [1]).

Если метрика риманова пространства V_n положительно определенная, то линии кривизны первого рода неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} всегда являются действительными и ортогональными, причем ортогональность понимается в смысле индуцированной метрики.

Если $\overset{(p)}{\varphi}$ есть угол между вектором (4.6) и главным направлением первого рода, которое соответствует корню k_p уравнения (5.4), то справедлива формула Эйлера:

$$k_{(1)} = \sum_{p=1}^{n-1} k_p \cos^2 \overset{(p)}{\varphi}\,. \tag{5.11}$$

Для неголономной гиперповерхности евклидова пространства эта формула доказана Д. М. Синцовым [4].

3. *Линии кривизны второго рода.* Если K^* развертка центроиды K интегральной кривой (K, Π) неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}, то в пространстве $E_n\,(A)$ можно построить линейчатую поверхность

$$N\,(K^*) \subset E_n\,(A),$$

образующими которой являются образы метрических нормалей неголономной гиперплоскости V_n^{n-1}, а направляющая кривая совпадает с кривой K^*. Эту линейчатую поверхность будем называть ассоциированной линейчатой поверхностью интегральной кривой (K, Π) (для ценнтра A опорного элемента (A, Π)).

Определение. Если ассоциированная линейчатая поверхность $N(K^*)$ интегральной кривой (K, Π) является развертывающейся поверхностью, то интегральная кривая (K, Π) называется *линией кривизны второго рода* неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}.

Произвольную точку этой поверхности можно записать так

$$L = A + \rho\mathbf{n}. \tag{5.12}$$

Если ρ является функцией точки кривой K^*, то конец вектора $\mathbf{L}$ описывает кривую, лежащую на линейчатой поверхности $\mathbf{n}(K^*)$. Направление касательной к этой кривой задается вектором $\frac{d\mathbf{L}}{\Theta}$. Отсюда следует, что линейчатая поверхность $\mathbf{n}(K^*)$ будет развертывающейся поверхностью тогда и только тогда, когда вектор $\frac{d\mathbf{L}}{\Theta}$ параллельный вектору $\mathbf{n}$. Так как 1-форма

$$\nabla p^\alpha - p^\alpha \omega_n^n + \omega_n^\alpha - p^\alpha p^\beta \omega_\beta^n \tag{5.13}$$

вдоль интегральной кривой (K, Π) имеет вид

$$\nabla p^\alpha - p^\alpha \omega_n^n + \omega_n^\alpha - p^\alpha p^\beta \omega_\beta^n = -H^2 g^{\sigma\alpha} a_{\alpha\beta} l^\beta \Theta, \tag{5.14}$$

то

$$\frac{d\mathbf{L}}{\Theta} = (\cdot\cdot\cdot)\,\mathbf{n} + \{l^\alpha + \rho\,(-H g^{\sigma\alpha} a_{\sigma\beta} l^\beta)\}\,\mathbf{e}_\alpha. \tag{5.15}$$

Отсюда следует, что поверхность $\mathbf{n}(K^*)$ является развертывающейся поверхностью тогда и только тогда, когда

$$(\delta_\beta^\alpha + \rho B_\beta^\alpha)\, l^\beta = 0, \tag{5.16}$$

где

$$B_\beta^\alpha = -g^{\sigma\alpha} \mathring{a}_{\sigma\beta}. \tag{5.17}$$

Система линейных и однородных уравнений (5.6) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда

$$\det \| \delta_\beta^\alpha + \rho B_\beta^\alpha \| = 0$$

или $(t\rho = 1)$

$$\det \| B_\beta^\alpha + t\delta_\beta^\alpha \| = 0. \tag{5.18}$$

Если

$$B\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_p \\ \alpha_1 \cdots \alpha_p \end{pmatrix}$$

— главный минор p-го порядка $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ матрицы $\| B_\beta^\alpha \|$, то уравнение (5.18) можно переписать в следующем виде:

$$t^{n-1} + \mathfrak{A}_1 t^{n-2} + \mathfrak{A}_2 t^{n-3} + \cdots + \mathfrak{A}_{n-2} t + \mathfrak{A}_{n-1} = 0, \tag{5.19}$$

где

$$\mathfrak{A}_1 = B_\alpha^\alpha, \quad \mathfrak{A}_2 = \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant n-1} B\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}, \ \ldots,$$

$$\mathfrak{A}_p = \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leqslant n-1} B\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_p \\ \alpha_1 \cdot\cdot \alpha_p \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathfrak{A}_{n-1} = \det \| B_\beta^\alpha \|. \tag{5.20}$$

Определение. Корни уравнения (5.19) называются *главными кривизнами второго рода* неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}, а инвариант H_p, определенный равенством

$$H_p = \frac{\mathfrak{A}_p}{(n-1)(n-2)\,\cdots\,(n-p+1)}\,, \tag{5.21}$$

называется *p-той кривизной второго рода* неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} риманова пространства V_n.

Так как

$$\mathfrak{A}_1 = B_\alpha^\alpha = -g^{\alpha\beta}\mathring{a}_{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}\mathring{a}_{(\alpha\beta)},$$

то первая кривизна второго рода (средняя кривизна второго рода) имеет вид

$$H_1 = -\frac{1}{n-1}\,g^{\alpha\beta}\mathring{a}_{(\alpha\beta)}. \tag{5.22}$$

Отсюда, в силу (5.9), следует теорема (аналогичная теорема для неголономной поверхности евклидова порстранства доказана Д. М. Синцовым и Я. П. Бланком).

Теорема Синцова — Бланка. Для неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} риманова пространства V_n средняя кривизна первого рода всегда совпадает со средней кривизной второго рода.

§ 6. Гиперсферическая индикатриса

1. *Гиперсферическая индикатриса.* Если K^* развертка центроиды K интегральной кривой (K, Π) неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}, то каждой образующей ассоциированной линейчатой поверхности $n\,(K^*)$ можно поставить в соответствие точку единичной гиперсферы $S_{n-1}\,(A)$. Тогда на $S_{n-1}\,(A)$, как в $(n-1)$-мерном эллиптическом пространстве, определяется кривая, которая и называется *гиперсферической индикатрисой* кривой (K, Π).

Так как вдоль интегральной кривой (K, Π) неголономной гиперповерхности V_n^{n-1} 1-форма (5.13) имеет вид (5.14), то

$$d\mathbf{n} = \overset{\circ}{\Theta}{}^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \tag{6.1}$$

где

$$\overset{\circ}{\Theta}{}^\alpha = B_\beta^\alpha l^\beta \Theta.$$

Отсюда следует, что

$$d\mathbf{n}^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, l^\alpha l^\beta\,(\Theta)^2, \tag{6.2}$$

где

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\sigma\lambda} B_\alpha^\sigma B_\beta^\lambda. \tag{6.3}$$

Величины $\gamma_{\alpha\beta}$ образуют тензор, который называется *метрическим тензором гиперсферической индикатрисы* (квадратичная форма (6.2) определяет главную линейную часть угла между смежными метрическими нормалями неголономной гиперповерхности V_n^{n-1}).

2. *Гиперсферическая нормальная кривизна.* Единичный касательный вектор гиперсферической индикатрисы интегральной кривой (K, Π) имеет вид

$$\mathbf{t} = \frac{B_\beta^\alpha l^\beta}{\sqrt{\gamma_{\sigma\lambda} l^\sigma l^\lambda}}\,\mathbf{e}_\alpha. \tag{6.4}$$

Отсюда следует, что первый вектор кривизны гиперсферической индикатрисы интегральной кривой (K, П) имеет вид ($d\sigma=\sqrt{\gamma_{\alpha\beta}l^{\alpha}l^{\beta}\Theta}$):

$$\frac{d\mathbf{t}}{d\sigma}=(\cdot\cdot\cdot)\,\mathbf{e}_{\alpha}+\frac{B_{\alpha\eta}l^{\alpha}l^{\beta}}{\gamma_{\sigma\lambda}l^{\sigma}l^{\lambda}}\,\mathbf{n}, \tag{6.5}$$

где

$$B_{\alpha\beta}=\mathring{a}_{\sigma(\alpha}B^{\sigma}_{\beta)}. \tag{6.6}$$

Вектор

$$\frac{B_{\alpha\beta}l^{\alpha}l^{\beta}}{\gamma_{\text{ɔ}\lambda}l^{\sigma}l^{\lambda}}\,\mathbf{n}$$

будем называть *вектором нормальной гиперсферической кривизны* интегральной кривой (K, П), а его длину – *нормальной гиперсферической кривизной* рассматриваемой кривой, т.е.

$$\chi=\frac{B_{\alpha\beta}l^{\alpha}l^{\beta}}{\gamma_{\sigma\lambda}l^{\sigma}l^{\lambda}}\,. \tag{6.7}$$

Вектор

$$\frac{d\mathbf{t}}{d\sigma}-\chi\mathbf{n}$$

называется *вектором геодезической кривизны гиперсферической индикатрисы* интегральной кривой (K, П), а его длина – гиперсферической геодезической кривизной (или геодезическим кручением) рассматриваемой кривой, очевидно, что всегда $\chi=-1$.

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
1.XII.1969

Литература

1. Я. П. Бланк, Связь между гауссовой кривизной и линиями кривизны второго рода системы интегральных кривых уравнений Пфаффа, Сообщен. Харьковск. матем. об-ва, 2, 75–76 (1928).
2. В. В. Вагнер, Дифференциальная геометрия неголономных многообразий, Казань, 1939.
3. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского мат. об-ва, 2, 275–382 (1953).
4. Д. М. Синцов, Свойства системы интегральных кривых пфаффова уравнения в n-переменных, Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, сер. VII, 10, 1275–1294 (1931).
5. И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии 2, ГИИЛ, М. (1948).
6. М. Р. Роговой, К метрической теории неголономных гиперповерхностей в w-мерном пространстве, Украинский геометрический сб., вып. 5–6, 126–138 (1968).
7. Р. Н. Щербаков, Линейчатая дифференциальная геометрия трехмерного пространства, Итоги науки, Алгебра. Топология. Геометрия (1965), 265–321, М., 1967.
8. T. Mihăilescu, Geometrie diferenţială proietivă, Bucureşti, Acad. RPP, 1958.
9. L. Vranceanu, Les espaces non-holonomes, Mémorial des Sc. Math., fasc. LXXXV, Paris, Gauthier-Villars, 1936.

RYMANO ERDVĖS NEHOLONOMINIO HIPERPAVIRŠIAUS DIFERENCIALINĖ GEOMETRIJA

V. Bliznikas

(Reziumė)

Rymano erdvės neholonominio hiperpaviršiaus diferencialines lygtis galima užrašyti šitokiu pavidalu:

$$\omega_\alpha^n = a_{\alpha\beta}\omega^\beta + a_\alpha\omega^n, \quad a_{\alpha\beta} \neq a_{\beta\alpha}. \tag{1}$$

Surasta objekto $(a_{\alpha\beta}, a_\alpha)$ geometrinė interpretacija. Išnagrinėta neholonominio hiperpaviršiaus kreivumo teorija, t.y. surasti neholonominio hiperpaviršiaus pirmos ir antros eilės kreivumai. Įrodytas Sincovo – Blanko teoremos analogas. Be to, suhipersferinės indikatrisės pagalba surasti neholonominio hiperpaviršiaus hipersferiniai kreivumai.

Darbas yra atliktas G. Laptevo invariantiniu metodu.

ON THE DIFFERENTIAL GEOMETRY ON THE NON-HOLONOMIC HYPERSURFACE OF THE RIEMANNIAN SPACE

V. Bliznikas

Summary)

The differential equations of the non-holonomic hypersurfase of the Riemannian space we can write as follows

$$\omega_\alpha^n = a_{\alpha\beta}\omega^\beta + a_\alpha\omega^n, \quad a_{\alpha\beta} \neq a_{\beta\alpha}.$$

The geometrical interpretation of the object $(a_{\alpha\beta}, a_\alpha)$ is given and the theory of curvature of non-ho lonomic hypersurface is considered (the curvatures of the first and second kind of the non-holonomic hypersurface are obtained). The analog of the theorem of Sincow – Blank is proved. The hyperspheric curvatures of non-holonomic hypersurface are obtained by means of the hyperspheric indicatris.

The paper is written applying the method of G. Laptew.