1971

УДК 517.949.2

О НЕОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Гилис

В настоящей работе изучается неоднородная система дифференциально-разностных уравнений

$$A_1 F'(z)+A_2 F(z)+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{m_1} A_{kl}(z) F^{(l)}(z+\alpha_k)+B_1 F'(z+\alpha_m)+$$
$$+B_2 F(z+\alpha_m)=G(z), \tag{1}$$

в которой неизвестная $F(z)$, ее производная $F^{(l)}(z)$ $(l=0, 1, \ldots, m_1)$ и свободный член $G(z)$ являются одностолбцевыми матрицами

$$F(z)=\begin{bmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \vdots \\ f_\nu(z) \end{bmatrix}, \quad F^{(l)}(z)=\begin{bmatrix} f_1^{(l)}(z) \\ f_2^{(l)}(z) \\ \vdots \\ f_\nu^{(l)}(z) \end{bmatrix}, \quad G(z)=\begin{bmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \\ \vdots \\ g_\nu(z) \end{bmatrix},$$

а коэффициенты A_1, A_2, B_1,B_2 и $A_{kl}(z)$ $(k=1, \ldots, m-1;\ l=0, 1, \ldots, m_1)$ – квадратные размера $\nu\times\nu$ матрицы.

На протяжении всей работы мы предполагаем, что выполнены такие условия:

1) *шаги* $\alpha_0=0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *– действительные числа и*

$$0<\alpha_1<\ldots<\alpha_m;$$

2) *главные коэффициенты* A_1, A_2, B_1 и B_2, *входящие в члены, соответствующие крайним шагам* α_0 *и* α_m *– постоянные матрицы, элементы которых – произвольные комплексные числа*;

3) *ни один из определителей* $|A_1|$ *и* $|B_1|$ *не равен нулю*;

4) *все другие коэффициенты* $A_{kl}(z)$ $(k=1, \ldots, m-1;\ l=0, 1, \ldots, m_1)$ *– целые матрицы конечного порядка, т.е. все элементы этих матриц – целые функции конечного порядка*;

5) *матрица* $G(z)$ *– целая.*

При этих условиях доказывается теорема.

Теорема. *Система уравнений* (1) *имеет хотя бы одно целое решение. Если, помимо указанных условий, еще известно, что* $G(z)$ *– целая матрица конечного порядка, то система уравнений* (1) *имеет целое решение конечного порядка.*

Системы вида (1) в случае, когда матрицы A_1 и B_1 – нулевые, а A_2 и B_2 – невырожденные целые матрицы конечного порядка, изучались в работе Л. Навицкайте [1]. Чисто разностные уравнения с целыми коэффициентами конечного порядка изучались в работах Н. Нёрлунда [3], [4], А. Нафталевича [2].

§ 1. Формальные решения

Для решения системы дифференциально-разностных уравнений (1) воспользуемся методом двусторонних итераций. Для этого систему уравнений (1) запишем в виде

$$F'(z)+AF(z)=L[F(z)]+A_1^{-1}G(z), \tag{1.1}$$

или

$$F'(z)+BF(z)=H[F(z)]+B_1^{-1}G(z-\alpha_m), \tag{1.2}$$

где

$$A=A_1^{-1}A_2, \quad B=B_1^{-1}B_2, \tag{1.3}$$

$$L[F(z)]=-A_1^{-1}\left[\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{m_1}A_{kl}(z)F^{(l)}(z+\alpha_k)+\right.$$

$$\left.+B_1F'(z+\alpha_m)+B_2F(z+\alpha_m)\right], \tag{1.4}$$

и

$$H[F(z)]=-B_1^{-1}\left[\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{m_1}A_{kl}(z-\alpha_m)F^{(l)}(z+\alpha_k-\alpha_m)+\right.$$

$$\left.+A_1F'(z-\alpha_m)+A_2F(z-\alpha_m)\right]. \tag{1.5}$$

Последовательности итераций для обеих систем уравнений (1.1) и (1.2) строятся одним и тем же способом. Поэтому подробно остановимся на одной из этих систем, для определенности на систему уравнений (1.1).

Фундаментальную матрицу решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см. (1.3))

$$F'(z)+AF(z)=0$$

обозначим через $K_1(z)$, а обратную к ней (как это общепринято) – через $K_1^{-1}(z)$. Тогда, приняв за нулевое приближение $\Phi_0^*(z)\equiv 0$ ($\Phi_0(z)$ – нулевой столбец), следующее приближение $\Phi_1(z)$ получим как частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (1.1), в правую сторону которой подставляем $F(z)=\Phi_0(z)\equiv 0$, т.е. $\Phi_1^*(z)$ определяется как частное решение системы

$$\Phi_1'^*(z)+A\Phi(z)=L[\Phi_0^*(z)]+A_1^{-1}G(z).$$

Как известно, частное решение этой системы представляется в виде

$$\Phi_1^*(z)=\int_{z_0}^{z}K_1(z)K_1^{-1}(\zeta)\{L[\Phi_0^*(\zeta)]+A_1^{-1}G(\zeta)\}d\zeta,$$

или как следует из (1.4)

$$\Phi_1^*(z)=\int\limits_{z_0}^{z} K_1(z)K_1^{-1}(\zeta)A_1^{-1}G(\zeta)\,d\zeta,$$

где z_0 — произвольная конечная точка комплексной плоскости. Все последующие приближения $\Phi_2^*(z)$, $\Phi_3^*(z)$, ... определяются аналогичным способом и в итоге получаем рекуррентную формулу

$$\Phi_{n+1}^*(z)=\int\limits_{z_0}^{z} K_1(z)K_1^{-1}(\zeta)\{L[\Phi_n(\zeta)]+A_1^{-1}G(\zeta)\}\,d\zeta. \quad (1.7)$$

Очевидно, любое приближение $\Phi_n^*(z)$, $n=1\ldots$ является целой одностолбцевой матрицей.

Если ряд

$$M[G(z)]=\Phi_0^*(z)+[\Phi_1^*(z)-\Phi_0^*(z)]+\ldots \quad (1.8)$$

равномерно сходится в любом конечном круге, то его сумма $M[G(z)]$ представляет целое решение системы (1).

Вполне аналогично для системы уравнений (1.2) получим последовательность приближений

$$\psi_0^*(z)\equiv 0,$$

$$\psi_{n+1}^*(z)=\int\limits_{z_0}^{z} K_2(z)K_2^{-1}(\zeta)\{H[\psi_n^*(\zeta)]+B_1^{-1}G(\zeta-\alpha_m)\}\,d\zeta, \quad (1.9)$$

где $K_2(z)$ — фундаментальная матрица решений для линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$F'(z)+BF(z)=0. \quad (1.10)$$

Исходя из этих приближений, построим (ср. с (1.7)) еще одно формальное решение системы (1)

$$N[G(z)]=\psi_0^*(z)+[\psi_1^*(z)-\psi_0^*(z)]+\ldots \quad (1.11)$$

Если этот ряд равномерно сходится в любом конечном круге, то его сумма (как и сумма ряда (1.7)) является целым решением системы (1).

Заметим, что ряды (1.7) и (1.11) сходятся только при довольно сильных ограничениях на матрицу $G(z)$. С другой стороны можно предполагать, что ряд (1.7), соответственно (1.11), сходится, если матрица $G(z)$ достаточно быстро стремится к нулевой матрице при $z\to\infty$ в угле $|\arg z|<\delta$, соответственно в угле $\pi-|\arg z|<\delta$.

Это предположение приводит нас к основной идее метода двусторонних итераций.

Матрица $G(z)$ представляется в виде суммы двух матриц:

$$G(z)=G_1(z)+G_2(z),$$

из которых матрица $G_1(z)$ быстро стремится к нулевой матрице при $z\to\infty$ в угле $|\arg z|<\delta$, а $G_2(z)$ — в угле $\pi-|\arg z|<\delta$. Решение системы уравнений (1) получаем в виде

$$F(z)=M[G_1(z)]+N[G_2(z)].$$

Как будет показано в дальнейшем, в случае, когда $G_1(z)$ стремится достаточно быстро к нулевой матрице при $z\to\infty$ в угле $|\arg z|<\delta$ последовательность приближения $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, ... — для системы уравнений

$$F'(z)+AF(z)=L[F(z)]+A_1^{-1}G_1(z) \tag{1.12}$$

можно представить и такими формулами:

$$\Phi_0(z)\equiv 0,$$

$$\Phi_{n+1}(z)=\int_{\infty}^{z} K_1(z)K_1^{-1}(\zeta)\{L[\Phi_n(\zeta)]+A_1^{-1}G_1(\zeta)\}\,d\zeta,$$

$$n=0,1,2,\ldots, \tag{1.13}$$

где интегрирование ведется по лучу, параллельному действительной оси $\zeta=t+i\operatorname{Im}z$, $\operatorname{Re}z\leqslant t<\infty$, соединяющему бесконечно удаленную точку с точкой z.

Аналогично последовательность приближений $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, ... системы уравнений

$$F'(z)+BF(z)=H[F(z)]+B_1^{-1}G_2(z-\alpha_m) \tag{1.14}$$

может быть представлена в виде

$$\psi_0(z)\equiv 0,$$

$$\psi_{n+1}(z)=\int_{\infty}^{z} K_2(z)K_2^{-1}(\zeta)\{H[\psi_n(\zeta)]+B_1^{-1}G_2(\zeta-\alpha_m)\}\,d\zeta,$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{1.15}$$

где интегрирование производится по лучу

$$\zeta=t+i\operatorname{Im}z,\qquad -\infty<t\leqslant\operatorname{Re}z.$$

Таким образом решение $F(z)$ системы дифференциально-разностных уравнений (1) будем искать в виде

$$F(z)=M[G_1(z)]+N[G_2(z)], \tag{1.16}$$

где

$$G_1(z)+G_2(z)\equiv G(z), \tag{1.17}$$

$$M[G_1(z)]=\Phi_0(z)+[\Phi_1(z)-\Phi_0(z)]+\ldots, \tag{1.18}$$

$$N[G_2(z)]=\psi_0(z)+[\psi_1(z)-\psi_0(z)]+\ldots, \tag{1.19}$$

а $\Phi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ $(n=0,1,2\ldots)$ определяются соотношениями (1.13) и (1.15). Ряды (1.18) и (1.19) назовем итерационными рядами.

§ 2. Общий член итерационных рядов

1. В этом параграфе доказывается несколько лемм о норме общего члена итерационных рядов (1.18) и (1.19).

При этом норму (как это общепринято) матрицы

$$D(z)=[d_{ij}(z)],\qquad i=1,\ldots,l;\quad j=1,\ldots,k$$

обозначим через $\| D(z) \|$ и определим

$$\| D(z) \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \sum_{j=1}^{k} | d_{ij}(z) |.$$

Заметим, что норма имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} &1) \quad \| D_1(z) + D_2(z) \| \leqslant \| D_1(z) \| + \| D_2(z) \|; \\ &2) \quad \| D_1(z)\, D_2(z) \| \leqslant \| D_1(z) \| \, \| D_2(z) \|; \\ &3) \quad \left\| \int_s D(z)\, dz \right\| \leqslant \int_s \| D(z) \| \, | dz |. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Матрицу назовем целой, если все ее элементы целые функции. Если матрица $D(z)$ — целая конечного порядка β, т.е. β — наибольший порядок роста ее элементов, то для любого $\varepsilon > 0$ имеется такая постоянная C, что для всех z

$$\| D(z) \| < Ce^{|z|^{\beta+\varepsilon}}. \tag{2.2}$$

Пусть β_1 и β_2 конечные порядки целых матриц $D_1(z)$ и $D_2(z)$, а $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеется такая постоянная C, $C = C(\varepsilon)$, что нормы матриц $D(z) = D_1(z) + D_2(z)$, $D^*(z) = D_1(z)\, D_2(z)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &1) \quad \| D(z) \| < Ce^{|z|^{\beta+\varepsilon}}; \\ &2) \quad \| D^*(z) \| < Ce^{|z|^{\beta+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

(Для доказательства достаточно применить свойства (2.1) и (2.2).)

2. Ряды (1.18) и (1.19) изучаются одним и тем же способом, поэтому ограничимся изучением одного только ряда (1.18).

Общий член этого ряда, как следует из (1.13), будет

$$\begin{aligned} &\Phi_1(z) - \Phi_0(z) = \int_{\infty}^{z} K_1(z) K_1^{-1}(\zeta) A_1^{-1} G_1(\zeta)\, d\zeta, \\ &\Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z) = \int_{\infty}^{z} K_1(z) K_1^{-1}(\zeta) L [\Phi_n(\zeta) + \Phi_{n-1}(\zeta)]\, d\zeta, \\ &n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$\zeta = t + i \operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Re} z \leqslant t < \infty$$

и $K_1(z)$ — фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений (1,6), а L — оператор, заданный формулой (1.4), и $G_1(z)$ — некоторая целая матрица.

Лемма 1. *Пусть β' — наибольший из порядков целых матриц $A_{kl}(z)$, $k = 1, \ldots, m-1$; $l = 0, 1, \ldots, m_1$ ($A_{kl}(z)$ — коэффициенты системы уравнений (1)), а*

$$\beta = \max(1, \beta'). \tag{2.5}$$

Если целая матрица $G_1(z)$ удовлетворяет в угле

$$|\arg z| \leqslant G_1(z), \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2} \tag{2.6}$$

условию

$$\| G_1(z) \| < e^{-|z|^{\mu}} \tag{2.7}$$

и

$$\mu > \beta + 1, \tag{2.8}$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *существуют такие постоянные* $a > 0$ *и* $C > 0$, *что в угле*

$$|\arg(z-a)| \leqslant \delta \tag{2.9}$$

общий член $\Phi_n(z) - \Phi_{n-1}(z)$ *итерационного ряда* (1.18) *является аналитической матрицей и его норма удовлетворяет неравенству*

$$\| \Phi_n(z) - \Phi_{n-1}(z) \| < C^n e^{-\{[\operatorname{Re} z + (n-1)\gamma]^{\mu} - [\operatorname{Re} z + (n-1)\gamma]^{\beta+\varepsilon}\}}, \tag{2.11}$$

где

$$\gamma = \frac{\alpha_1}{2},$$

α_1 — *наименьший положительный шаг системы уравнений* (1).

Доказательство. Для доказательства этой леммы воспользуемся методом математической индукции.

Принимая во внимание свойства норм матриц см. (2.1), из (2.3) имеем

$$\| \Phi_1(z) - \Phi_0(z) \| \leqslant \int_{\operatorname{Re} z}^{\infty} \| K_1(z) K_1^{-1}(\zeta) A_1^{-1} \| \, \| G_1(\zeta) \| \, |d\zeta| .$$

где

$$\zeta = t + i \operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Re} z \leqslant t < \infty.$$

Оценим теперь выражение, стоящее под знаком интеграла последнего неравенства.

Так как $K_1(z)$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то, как известно, элементы последней являются функциями вида $P(z) \exp(\lambda z)$, где λ — некоторая постоянная, а $P(z)$ — многочлен. Поэтому порядок роста матрицы $K_1(z)$ не больше β.

Обратная матрица $K_1^{-1}(z)$ также является целой (так как определитель Вронского $|K_1(z)|$ — нигде не равен нулю) матрицей и имеет тот же порядок роста, что и $K_1(z)$.

Заметим еще, что при условии $|\arg z| < \delta$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, выполнено неравенство

$$|z| \leqslant st,$$

где $s = 1 + \operatorname{tg} \delta$ и t — произвольное число не меньше $\operatorname{Re} z$. Аналогично, для переменного интегрирования ζ,

$$\zeta = t + i \operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Re} z \leqslant t < \infty,$$

имеем

$$|\zeta| \leqslant st.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ имеется такая постоянная C, что

$$\| K_1(z) K_1^{-1}(\zeta) A_1^{-1} \| < C e^{t^{\beta+\varepsilon}}, \quad t = \operatorname{Re} \zeta. \tag{2.12}$$

В силу (2.8) число $\varepsilon > 0$ можно выбирать таким, чтобы $\beta + \varepsilon + 1 < \mu$. При таком выборе $\varepsilon > 0$ выражение

$$\mu [t + (n-1)\gamma]^{\mu-1} - n(\beta+\varepsilon)[t + (n-1)\gamma]^{\beta-1+\varepsilon}$$

стремится к $+\infty$, как в случае, когда $t\to+\infty$ и n — зафиксировано, так и в случае, когда t и n стремятся к бесконечности независимо друг от друга. Значит, существует такое число $a>0$, что

$$\mu\,[t+(n-1)\gamma]^{\mu-1}-n\,(\beta+\varepsilon)\,[t+(n-1)\gamma]^{\beta-1+\varepsilon}>1 \tag{2.13}$$

при $t\geqslant a$, $n=1, 2, \ldots$

Обозначим через Ω_τ пересечение угла $|\arg z|<\delta$ и полуплоскости $\operatorname{Re} z\geqslant\tau$. Из (2.7), (2.11), (2.12) и (2.13) следует, что в области Ω_a выполнено неравенство

$$\Phi_1(z)-\Phi_0(z)<C\int\limits_{\operatorname{Re} z}^{\infty} e^{t^{\beta+\varepsilon}-t^{\mu}}\,dt<$$

$$<C\int\limits_{\operatorname{Re} z}^{\infty} e^{-(t^{\mu}-t^{\beta+\varepsilon})}\,[\mu t^{\mu-1}-(\beta+\varepsilon)\,t^{\beta-1+\varepsilon}]\,dt=Ce^{-[(\operatorname{Re} z)^{\mu}-(\operatorname{Re} z)^{\beta+\varepsilon}]},$$

т.е. мы доказали неравенство (2.10) для случая $n=1$.

Напомним, что интеграл, стоящий в правой части (2.3), брался по лучу $\zeta=t+i\,Im\,z$, $Re\,z\leqslant t<\infty$. В силу неравенства (2.7) мы не изменим значения этого интеграла, если будем интегрировать по контуру, составленному из луча действительной положительной оси $t_0\leqslant t<\infty$, где $t_0\geqslant a$ — зафиксированная точка, лежащая в угле (2.9), и из отрезка, соединяющего точку t_0 с точкой z. Отсюда легко следует, что матрица $\Phi_1(z)-\Phi_0(z)$ — целая.

Предположим теперь, что матрица $\Phi_p(z)-\Phi_{p-1}(z)$ — аналитическая в угле (2.9) и ее норма в этом угле удовлетворяет неравенству (2.10) при $p=n$ и оценим норму матрицы $\Phi_{n+1}(z)-\Phi_n(z)$.

Так как функция $\exp\{-[t+(n-1)\gamma]^{\mu}-n\,[t+(n-1)\gamma]^{\beta+\varepsilon}$, убывающая при $t\geqslant a$ (см. (2,13), то из неравенства (2.10) (оно выполнено по предположению индукций) следует, что

$$M_n(t)=\max_{\zeta\in\Omega_t}\|\Phi_n(\zeta)-\Phi_{n-1}(\zeta)\|<C^n e^{-\{[t+(n-1)\gamma]^{\mu}-[t+(n-1)\gamma]^{\beta+\varepsilon}\}}. \tag{2.14}$$

Кроме того, расстояние ρ от точки $\zeta+\alpha_k=t+\alpha_k+i\operatorname{Im} z$, где $\alpha_k\geqslant\alpha_1=2\gamma$ — шаг системы уравнений (1), до границы области $\Omega_{t+\gamma}$ не меньше $\gamma\sin\delta$. Поэтому по известным оценкам производных от аналитических функций

$$\|\Phi_n^{(l)}(\zeta+\alpha_k)-\Phi_{n-1}^{(l)}(\zeta+\alpha_k)\|<C_1 M_n(t+\gamma),$$

где $t=\operatorname{Re}\zeta$ и $C_1=\dfrac{m_1}{[\min(\rho,\ 1)]^{m_1}}$, $l\leqslant m_1$. Значит, (см. (2.14)) при $\operatorname{Re}\zeta=t\geqslant a$

$$\|\Phi_n^{(l)}(\zeta+\alpha_k)-\Phi_{n-1}^{(l)}(\zeta+\alpha_k)\|<C_1C^n e^{-[(t+n\gamma)^{\mu}-(t+n\gamma)^{\beta+\varepsilon}]}. \tag{2.15}$$

Для сокращений записей обозначим

$$A_{m0}(z)=B_2,\quad A_{m1}(z)=B_1,\quad A_{ms}(z)\equiv 0\quad s=2,\ \ldots,\ m_1,$$

где B_1 и B_2 — постоянные матрицы, входящие в выражение (1.4) для определения оператора L. Тогда оператор L примет (см. (1.4)) вид

$$L\,[F(z)]=-A_1^{-1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m_1}A_{kl}(z)\,F^{(l)}(z+\alpha_k).$$

Из последнего и (2.3) имеем

$$\Phi_{n+1}(z)-\Phi_n(z)=$$
$$=\int\limits_{\infty}^{z} K_1(z)K_1^{-1}(\zeta)A_1^{-1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m_1}A_{kl}(\zeta)\,[\Phi_n^{(l)}(\zeta+\alpha_k)-\Phi_{n-1}^{(l)}(\zeta+\alpha_k)]\,d\zeta,$$
$$\zeta=t+i\,\mathrm{Im}\,z,\quad \mathrm{Re}\,z\leqslant t<\infty,$$

откуда

$$\|\Phi_{n+1}(z)-\Phi_n(z)\|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{\mathrm{Re}\,z}\|K_1(z)K_1^{-1}(\zeta)A_1^{-1}\|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m_1}\|A_{kl}(\zeta)\|\max_{k,l}\|\Phi_n^{(l)}(\zeta+\alpha_k)- \tag{2.16}$$
$$-\Phi_{n-1}^{(l)}(\zeta+\alpha_k)\|\,|d\zeta|,\qquad \zeta=t+i\,\mathrm{Im}\,z,\qquad \mathrm{Re}\,z\leqslant t<\infty.$$

Выкладками, вполне аналогичными использованным при доказательстве неравенства (2.12), доказываем, что

$$\|K_1(z)K_1^{-1}(\zeta)A_1^{-1}\|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m_1}\|A_{kl}(\zeta)\|<C_2e^{t^{\beta+\varepsilon}}, \tag{2.17}$$

если $|\arg z|<\delta,\ 0<\delta<\frac{\pi}{2}$ и $t=\mathrm{Re}\,\zeta\geqslant a$.

Из (2.13), (2.15), (2.16) и (2.17) получаем, что при $\mathrm{Re}\,z\geqslant a$ имеет место неравенство

$$\|\Phi_{n+1}(z)-\Phi_n(z)\|<C^{n+1}\int\limits_{\mathrm{Re}\,z}^{\infty}e^{t^{\beta+\varepsilon}-[(t+n\gamma)^{\mu}-n\,(t+n\gamma)^{\beta+\varepsilon}]}\,dt<$$
$$<C^{n+1}\int\limits_{\mathrm{Re}\,z}^{\infty}e^{-[(t+n\gamma)^{\mu}-(n+1)\,(t+n\gamma)^{\beta+\varepsilon}]}\,[\mu\,(t+n\gamma)^{\mu-1}-$$
$$-(n+1)\,(\beta+\varepsilon)\,(t+n\gamma)^{\beta-1+\varepsilon}]\,dt=$$
$$=C^{n+1}e^{-[(\mathrm{Re}\,z+n\gamma)^{\mu}-(n+1)\,(\mathrm{Re}\,z+n\gamma)^{\beta+\varepsilon}]},$$

что и требовалось доказать. Из него, как и в случае $n=1$, следует, что матрица $\Phi_{n+1}(z)-\Phi_n(z)$ – целая.

Замечание. Из неравенства (2.10) следует, если z лежит в угле (2.9), то для любого $\eta>0$ имеется такая постоянная C, что

$$\|\Phi_n(z)-\Phi_{n-1}(z)\|<Ce^{-[(\mathrm{Re}\,z)^{\mu-\eta}+n^{\mu-\eta}]}. \tag{2.18}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда система дифференциально-разностных уравнений*

$$F'(z)+AF(z)=L\,[F(z)]+A_1^{-1}G_1(z)$$

имеет целое решение.

Доказательство. В силу (2.18) ряд

$$F_1(z)=M\,[G_1(z)]=[\Phi_1(z)-\Phi_0(z)]+[\Phi_2(z)-\Phi_1(z)]+\ \dots \tag{1.18}$$

равномерно сходится в угле (2.9). Поэтому матрица $F_1(z)$ является аналитической в этом угле. Кроме того, из того же неравенства (2.18) и (1.18) следует, что

$$\|F_1(z)-\Phi_n(z)\| < Ce^{-(\operatorname{Re} z)^{\mu-\eta}} \sum_{p=n+1}^{\infty} e^{\mu-\eta} <$$

$$< Ce^{-(\operatorname{Re} z)^{\mu-\eta}} e^{-(n+1)^{\mu-\eta}} \sum_{p=n+2}^{\infty} e^{-p^{\mu-\eta}+(n+1)^{\mu-\eta}} < C_1 e^{-(\operatorname{Re} z)^{\mu-\eta}-(n+1)^{\mu-\eta}}$$

и

$$\|F_1(z)\| < C_1 e^{-(\operatorname{Re} z)^{\mu-\eta}},$$

где C_1 — некоторая постоянная.

Пользуясь этими неравенствами, перейдем к пределу в равенстве

$$\Phi_{n+1}(z)=\int_{\infty}^{z} K_1(z)K_1^{-1}(\zeta)\{L[\Phi_n(\zeta)]+A_1^{-1}G_1(\zeta)\}d\zeta,$$

$$\zeta=t+i\operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Re} z\leqslant t<\infty. \tag{1.13}$$

Мы получим, что в угле (2.9)

$$F_1(z)=\int_{\infty}^{z} K_1(z)K_1^{-1}(\zeta)\{L[F_1(\zeta)]+A_1^{-1}G_1(\zeta)\}d\zeta, \tag{2.19}$$

где

$$\zeta=t+i\operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Re} z\leqslant t<\infty.$$

В этом интеграле можно взять за контур интегрирования луч (положительной действительной оси) $x_0\leqslant\zeta<\infty$ $(x_0\geqslant a)$ и отрезок прямой, соединяющий точку x_0 с точкой z. Таким образом, матрица $F_1(z)$ является аналитическим решением системы дифференциально-разностных уравнений (1.12) в угле (2.9).

Пользуясь методом шагов, покажем, что матрица $F_1(z)$ является целым решением системы дифференциально-разностных уравнений (1.12).

В самом деле из аналитичности матрицы $F_1(z)$ (а это мы уже доказали) в области (2.9) следует аналитичность матрицы

$$L[F(z)]=-A_1^{-1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m_1} A_{kl}(z)F^{(l)}(z+\alpha_k)$$

области (2.9), сдвинутой на $-\alpha_1$, т.е. в угле $|\arg[z-(a+\alpha_1)]|<\delta$. В силу (2.19) будет аналитической в сдвинутом угле и матрица $F_1(z)$. Повторяя это рассуждение, мы докажем, что матрица $F_1(z)$ является аналитической в угле (2.9), сдвинутом на $-2\alpha_1$, $-3\alpha_1$. Значит, матрица $F_1(z)$ будет целым решением системы уравнений (1.12).

Замечание. 1. Вполне аналогично доказывается, что и система дифференциально-разностных уравнений (1.14) имеет целое решение $F_2(z)$, если порядок роста коэффициентов $A_{kl}(z)$ $(k=1, \ldots, m-1;\ l=0, 1, \ldots, m_1)$ оператора H (см. (1.5)), как и в лемме 1, не больше β', а $G_2(z)$ — целая матрица, удовлетворяющая в угле

$$\pi-|\arg z|<\delta, \quad 0<\delta<\frac{\pi}{2}$$

условию

$$\| G_2(z) \| < e^{-|z|^{\mu}},$$

где

$$\mu > \beta + 1, \quad \beta = \max(1, \beta').$$

2. Этих лемм, как будет показано в следующем параграфе, достаточно для доказательства существования целого решения системы дифференциально-разностных уравнений (1).

Для оценки роста целого решения системы уравнений (1) нам понадобится еще следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и кроме того,* $G_1(z)$ — *целая матрица конечного порядка* $\varkappa'$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *имеются такие числа* $h > 0$ *и* C, *что в круге* $|z| < R$

$$\| \Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z) \| < Ce^{R^{\varkappa+\varepsilon}}, \quad \varkappa = \max(\varkappa', \beta + 1) \tag{2.20}$$

при $n \leqslant hR$;

$$\| \Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z) \| < Ce^{-n^{\mu-\varepsilon}} \tag{2.21}$$

при $n > hR$.

Доказательство. Зафиксируем число δ_1, удовлетворяющее условию $0 < \delta_1 < \delta$, где δ имеет такой же смысл, что и в лемме 1, и обозначим через $U(x_0)$ угол

$$U(x_0): |\arg(z - x_0)| \leqslant \delta_1, \quad x_0 = -\frac{R}{\sin \delta_1}$$

(вершина угла $U(x_0)$ лежит на отрицательной действительной оси и его стороны касаются окружности $|z| = R$). В силу неравенства $\delta_1 < \delta$, все точки угла $U(x_0)$, достаточно удаленные от начала координат, лежат в угле $|\arg(z-a)| < \delta$, где a — число, определенное в лемме 1.

Обозначим еще

$$M_n(x_0) = \max_{z \in U(x_0)} \| \Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z) \|. \tag{2.22}$$

Равенства (2.3) перепишем в виде

$$\Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z) = \int_{z_1}^{z} K_1(z) K_1^{-1}(\zeta) L [\Phi_n(\zeta) - \Phi_{n-1}(\zeta)] \, d\zeta +$$

$$+ \int_{\infty}^{z_1} K_1(z) K_1^{-1}(\zeta) L [\Phi_n(\zeta) - \Phi_{n-1}(\zeta)] \, d\zeta = I_1 + I_2, \tag{2.13}$$

где $z \in U(x_0)$ и z_1 — точка пересечения прямой $\zeta = t + i \operatorname{Im} z$, $\operatorname{Re} z \leqslant t < \infty$ с одной из сторон угла

$$|\arg(z - a)| < \delta.$$

По замечанию к лемме 1 интеграл

$$I_2 = K_1(z) K_1^{-1}(z_1) \int_{\infty}^{z_1} K_1(z_1) K_1^{-1}(\zeta) L [\Phi_n(\zeta) - \Phi_{n-1}(\zeta)] \, d\zeta,$$

$$\zeta = t + i \operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Re} z \leqslant t < \infty$$

допускает оценку

$$\| I_2 \| < C \| K_1(z) K_1^{-1}(z_1) \| e^{-(n+1)^{\mu-\varepsilon}}.$$

В дальнейшем все встреченные постоянные, хотя они, возможно, различны, обозначаем одной и той же буквой C. Подчеркнем, что C не зависит от R.

Заметим, что при достаточно большом R, расстояние от начала координат до любой точки z, лежащей в угле $U(x_0)$, но вне угла $|\arg(z-a)| < \delta$, не больше CR. В частности, $|z| < CR$ и $|z_1| < CR$.

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ имеется такая постоянная C, что

$$\| I_2 \| < C \exp [R^{\beta+\varepsilon} - (n+1)^{\mu-\varepsilon}]. \tag{2.24}$$

Для оценки нормы интеграла I_1 (см. (2.23) и (2.22)) аналогичным рассуждением, как и при доказательстве леммы 1, получим

$$\| I_1 \| < C e^{R^{\beta+\varepsilon}} M_{n-1}(x_0+\gamma), \tag{2.25}$$

где γ – число, определенное в лемме 1.

Принимая во внимание (2.22), из (2.23), (2.24) и (2.25) имеем

$$M_n(x_0) < C \exp R^{\beta+\varepsilon} [M_{n-1}(x_0+\gamma) + e^{(n+1)^{\mu-\varepsilon}}].$$

Обозначим еще

$$\tilde{M}_n(x_0) = \max [M_n(x_0),\ e^{-(n+2)^{\mu-\varepsilon}}].$$

Тогда

$$M_n(x_0) < C \exp R^{\beta+\varepsilon} \tilde{M}_{n-1}(x_0+\gamma)$$

и также (в силу того, что $\exp(-n^{\mu-\varepsilon})$ убывает с возрастанием n)

$$\tilde{M}_n(x_0) < C \exp R^{\beta+\varepsilon} \tilde{M}_{n-1}(x_0+\gamma)$$

при $n = 1, 2, \ldots$

Из этого неравенства легко следует

$$\tilde{M}_n(x_0) < C^n \exp (nR^{\beta+\varepsilon}) M_0(x_0+n\gamma). \tag{2.26}$$

Нам осталось оценить величину $\tilde{M}_0(x_0+n\gamma)$. Если $n > hR$, где $h > 0$ – достаточно большое число, то точка $x_0+n\gamma$ лежит в угле $|\arg(z-a)| \leqslant \delta$ и по замечанию к лемме 1

$$\tilde{M}_0(x_0+n\gamma) < C \exp - (x_0+n\gamma)^{\mu-\eta}.$$

В соединении с (2.26) это неравенство дает

$$\tilde{M}_n(x_0) < C^{n+1} \exp [nR^{\beta+\varepsilon} - (x_0+n\gamma)^{\mu-\eta}].$$

Так как $\mu > \beta+1$, то числа $\varepsilon > 0$ и η можно было так зафиксировать, что $\mu - \eta > \beta + 1 + \varepsilon$. Тогда при $n > hR$ в круге $|z| < R$

$$\| \Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z) \| \leqslant \tilde{M}_n(x_0) < Ce^{-n^{\mu-\varepsilon}},$$

т.е. мы доказали неравенство (2.21).

Нам осталось рассмотреть те значения n, для которых точки $x_0+n\gamma$ не лежат в угле $|\arg(z-a)| < \delta$.

Для этого заметим, что

$$\tilde{M}_0(x_0+n\gamma) \leqslant \tilde{M}_0(x_0)$$

и

$$\tilde{M}_0(x_0) \leqslant \max\left[\max_{z\in U(x_0)} \left\| \int_{\infty}^{z} K_1(z) K_1^{-1}(\zeta) A_1^{-1} G_1(\zeta)\, d\zeta \right\| e^{-1}\right].$$

Так как порядок матрицы $G_1(z)$ не больше $\varkappa$, то в точках z, лежащих в угле $U(x_e)$, но не попадающих в угол $|\arg(z-a)| < \delta$,

$$\| G_1(z) \| < C \exp R^{\varkappa+\varepsilon}.$$

Используя это неравенство, выкладками, аналогичными приведенным при оценке нормы матрицы $\Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z)$, мы получим

$$\|\Phi_1(z) - \Phi_0(z)\| \leqslant \left\| \int_{z_1}^{z} K_1(z) K_1^{-1}(\zeta) A_1^{-1} G_1(\zeta)\, d\zeta \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{\infty}^{z_1} K_1(z) K_1^{-1}(\zeta) A_1^{-1} G_1(\zeta)\, d\zeta \right\| < Ce^{R^{\varkappa+\varepsilon}}$$

для любого z из угла $U(x_0)$. Пользуясь этим неравенством из (2.26), имеем

$$\tilde{M}_n(x_0) < C^{n+1} \exp(nR^{\beta+\varepsilon} + R^{\varkappa+\varepsilon}).$$

Приняв во внимание условие $n \leqslant hR$, мы получаем, что при $|z| < R$ (см. (2.22))

$$\|\Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z)\| \leqslant \tilde{M}_n(x_0) < C \exp R^{\varkappa+\varepsilon},$$

что и требовалось доказать (см. (2.20)).

Замечание. Вполне аналогично доказывается, что если выполнены условия замечания к лемме 2 и кроме того $G_2(z)$ — целая матрица конечного порядка $\varkappa'$, то для любого z имеются такие числа $h > 0$ и $C > 0$, что в круге $|z| < R$

$$\|\psi_{n+1}(z) - \psi_n(z)\| < Ce^{R^{\varkappa+\varepsilon}}$$

при $n \leqslant hR$;

$$\|\psi_{n+1}(z) - \psi_n(z)\| < Ce^{-n^{\mu-\varepsilon}}$$

при $n > hR$.

§ 3. Существование целого решения

1. В этом параграфе докажем сформулированную в начале этой работы теорему. Кроме того дадим оценку для порядка роста целого решения системы дифференциально-разностных уравнений (1) в случае, когда $G(z)$ — целая матрица конечного порядка.

Обозначим через $T[F(z)]$ левую часть системы уравнений (1)

$$T[F(z)] = A_1^{-1} F'(z) + A_2 F(z) + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=0}^{m_1} A_{kl}(z) F^{(l)}(z+\alpha_k) +$$

$$+ B_1 F'(z+\alpha_m) + B_2 F(z+\alpha_m) \qquad (3.1)$$

и покажем:

1) *если выполнены все условия, указанные в начале этой работы, то система уравнений*

$$T[F(z)]=G(z) \tag{1}$$

имеет целое решение;

2) *пусть* $\varkappa=\max(\beta'+1, \varkappa', 2)$, *где по-прежнему* β' — *наибольший из порядков роста коэффициентов* $A_{kl}(z)$ $(k=1, \ldots, m-1;\ l=0, \ldots, m_1)$ *системы уравнений* (1) *и* $\varkappa'$ — *порядок роста правой части* $G(z)$ *упомянутой системы.*

Тогда для любого числа ρ, $\rho>\varkappa$ *существует целое решение системы* (1), *порядок роста которого не больше* ρ.

Как показано в работе Л. Навицкайте [1], для заданной целой матрицы $G(z)$ и любого числа $\mu>0$ существуют целые матрицы $G_1(z)$, $G_2(z)$ и число $\delta>0$ такие, что $G(z)\equiv G_1(z)+G_2(z)$, а

$$\|G_1(z)\|<e^{-|z|^{\mu}} \tag{3.2}$$

в угле $|\arg z|<\delta$ и

$$\|G_2(z)\|<e^{-|z|^{\mu}} \tag{3.3}$$

в угле $\pi-|\arg z|\leqslant\delta$.

Число μ выберем так, чтобы было $\mu>\beta+1$, где $\beta=\max(\beta', 1)$. Рассмотрим две системы уравнений

$$T[F(z)]=G_1(z) \tag{3.4}$$

и

$$T[F(z)]=G_2(z), \tag{3.5}$$

где $T[F(z)]$ задано равенством (3.1). Первая из этих систем сводится к (1.12), а вторая — к (1.14). В силу (3.2) и (3.3) эти системы уравнений удовлетворяют всем условиям леммы 2 и замечанию к ней. Следовательно, каждое из этих систем (3.4) и (3.5) имеет по целому решению, скажем, $F_1(z)$ и $F_2(z)$.

Очевидно, что матрица (см. (1.16) и (1.17))

$$F(z)=F_1(z)+F_2(z)$$

является целым решением системы уравнений (1).

Предположим теперь, что правая часть $G(z)$ системы (1) имеет конечный порядок роста $\varkappa'$ и $\rho>\varkappa$, где $\varkappa$ — вышеопределенное число.

Тогда (см. [1]) для любой целой матрицы $G(z)$ существуют целые матрицы $G_1(z)$ и $G_2(z)$, порядок которых не больше ρ, и число $\delta>0$ такое, что

$$G(z)\equiv G_1(z)+G_2(z),$$

а нормы матриц $G_1(z)$ и $G_2(z)$ удовлетворяют неравенствам

$$\|G_1(z)\|<e^{-|z|^{\rho}} \quad \text{при} \quad |\arg z|\leqslant\delta$$

и

$$\|G_2(z)\|<e^{-|z|^{\rho}} \quad \text{при} \quad \pi-|\arg z|\leqslant\delta.$$

Рассмотрим теперь определенные в § 1 ряды

$$M[G_1(z)]=[\Phi_1(z)-\Phi_0(z)]+[\Phi_2(z)-\Phi_1(z)]+\ldots \tag{1.18}$$

и

$$N[G_2(z)]=[\psi_1(z)-\psi_0(z)]+[\psi_2(z)-\psi_1(z)]+\ldots \tag{1.19}$$

По лемме 3 и замечанию к ней эти ряды сходятся равномерно в любом конечном круге.

Чтобы оценить порядок роста сумм этих рядов (для определенности рассмотрим ряд (1.13)), запишем

$$M[G_1(z)] = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

где

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n=1}^{[h,R]} [\Phi_n(z) - \Phi_{n-1}(z)]$$

и

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{n=[hR]+1}^{\infty} [\Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z)],$$

а $h>0$ — число, определенное в лемме 3. Из той же леммы следует, что

$$\left\| \sum\nolimits_2 \right\| < C,$$

где C — постоянная, и для любого $\varepsilon>0$

$$\left\| \sum\nolimits_1 \right\| < hRC_1 e^{R^{\sigma+\varepsilon}} < Ce^{R^{\sigma+\varepsilon}}.$$

Отсюда легко следует, что порядок роста матрицы $M[G_1(z)]$ не больше σ. Таким же будет и порядок роста матрицы $N[G_2(z)]$, а, следовательно, и решения $M[G_1(z)]+N[G_2(z)]$ системы дифференциально-разностных уравнений (1).

2. Укажем еще некоторые системы дифференциально-разностных уравнений, которые изучаются аналогично системе вида (1).

Прежде всего это системы уравнений (1), в которых или $A_1 \equiv 0$ и A_2 — постоянная невырожденная матрица или $B_1 \equiv 0$ и B_2 — постоянная невырожденная матрица. (Случай, когда $A_1 \equiv B_1 \equiv 0$, а A_2 и B_2 — обе невырожденные матрицы, изучался, как уже было указано, в работе [3].)

Методом двусторонних итераций можно также решить и системы дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{l=0}^{p} A_l F^{(l)}(z) + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=0}^{m_1} A_{kl}(z) F^{(l)}(z+\alpha_k) + \\ + \sum_{l_1=0}^{q} B_{l_1} F^{(l_1)}(z+\alpha_m) = G(z), \tag{3.6}$$

где $A_{kl}(z)$ $(k=1, 2, \ldots, m-1;\ l=0, 1, \ldots, m_1)$, как и в системе (1) — целые матрицы конечного порядка роста, A_l и B_{l_1} $(l=0, 1, \ldots, p;\ l_1=0, 1, \ldots, q)$ — постоянные матрицы того же размера, а A_p и B_q — обе невырожденные матрицы.

Укажем здесь вкратце метод решения такой системы.

Как и в случае системы (1), матрицу $G(z)$ представляем в виде

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z),$$

где $G_1(z)$ — стремится быстро к нулевой матрице в угле $|\arg z| \leqslant \delta$ а $G_2(z)$ — в угле $\pi - |\arg z| < \delta$. Левую часть системы (3.6) обозначим через

$$T[F(z)] = \sum_{l=0}^{p} A_l F^{(l)}(z) + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=0}^{m_1} A_{kl}(z) F^{(l)}(z+\alpha_k) + \sum_{l_1=0}^{q} B_{l_1} F^{(l_1)}(z+\alpha_m)$$

и рассмотрим системы

$$T[F(z)] = G_1(z) \tag{3.7}$$

и

$$T[F(z)] = G_2(z). \tag{3.8}$$

Обе системы (3.7) и (3.8) решаются аналогично, поэтому подробнее рассмотрим одну из этих систем, для определенности (3.7). Сделаем замену

$$F(z) = F_1(z), \quad F'(z) = F_2(z), \ \ldots, \ F^{(p-1)}(z) = F_p(z)$$

и обозначим через $\Phi(z)$ новую неизвестную матрицу

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \\ \vdots \\ F_p(z) \end{bmatrix}.$$

Как нетрудно убедиться, система (3.7) сведется к следующей:

$$A_1^* \Phi'(z) + A^* \Phi(z) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{p_1} A_{kl}^*(z) \Phi^{(l)}(z+\alpha_k) = G_1^*(z),$$

где A_1^* — постоянная невырожденная матрица (размера $p\nu \times p\nu$), A_2^* — постоянная матрица, $A_{kl}^*(z)$ — целые матрицы с конечным порядком роста и $G_1^*(z)$ — целая матрица, стремящаяся достаточно быстро к нулю в угле $|\arg z| < \delta$. Целое решение для этой системы строится таким же способом, как и для системы (1.12).

Аналогично решается и система дифференциально-разностных уравнений (3.8): в ней следует сделать такую замену:

$$F(z) = F_1(z), \quad F_1'(z) = F_2(z), \ \ldots, \ F^{(q-1)}(z) = F_q(z).$$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. А. Г. Нафталевичу за весьма ценные указания по работе.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
20.XII.1969

Литература

1. Л. Навицкайте, О линейной системе дифференциально-разностных уравнений с целыми коэффициентами конечного порядка, Лит. матем. сб., **X**, 3, 4 (1970), 497–515, 765–782.
2. А. Г. Нафталевич, О применении метода итераций для решения разностного уравнения, Матем. сб. 57(99), 2, 151–178 (1962).
3. N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, Berlin, 1924.
4. N. E. Nörlund, Sur l'existence de solutions d'une équation linéaire aux différences finies, Ann. Éc. Norm. (3),31, 205–221 (1914).

TIESINĖS NEHOMOGENINĖS DIFERENCIALINIŲ-SKIRTUMINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS KLAUSIMU

A. Gylys

(Reziumė)

Nagrinėjama diferencialinių-skirtuminių lygčių sistema

$$A_1 F'(z)+A_2 F(z)+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{m_1} A_{kl}(z)\, F^{(l)}(z+\alpha_k)+B_1 F'(z+\alpha_m)+B_2 F(z+\alpha_m)=G(z),$$

$$0<\alpha_1<\ldots<\alpha_m; \qquad (1)$$

čia nežinomasis $F(z)$ — vieno stulpelio matrica, A_1, A_2, B_1, B_2 — pastovios matricos ir $A_{kl}(z)$ — sveikos baigtinės eilės matricos.

Įrodoma teorema. *Jei determinantai* $|A_1|\neq 0$, $|B_1|\neq 0$ *ir* $G(z)$ *yra sveika matrica (sveika baigtinės eilės matrica), tai* (1) *sistema turi sveiką sprendinį (baigtinės eilės sveiką sprendinį).*

ÜBER LINEARE INHOMOGENE SYSTEME VON DIFFERENTIAL-DIFFERENZENGLEICHUNGEN

A. Gylys

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wird das in Matrixbezeichnungen geschriebene System von Differential-Differenzengleichungen

$$A_1 F'(z)+A_2 F(z)+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{m_1} A_{kl}(z)\, F^{(l)}(z+\alpha_k)+B_1 F'(z+\alpha_m)+B_2 F(z+\alpha_m)=G(z),$$

$$0<\alpha_1<\ldots<\alpha_m, \qquad (1)$$

untersucht ($F(z)$ bedeutet eine Spalte, die von ν unbekannten Funktionen gebildet ist). Wir lassen zu, dass A_1, A_2, B_1, B_2 quadratische Zahlenmatrizen und $A_{kl}(z)$ ganze Matrizen mit endlicher Wachstumsordnung sind, und beweisen das folgende Theorem:

Wenn die Determinante $|A_1|\neq 0$, $|B_1|\neq 0$ und $G(z)$ eine ganze Spalte ist, so besitzt das System (1) eine ganze Lösung.

Wenn ausserdem die Ordnung der ganzen Spalte $G(z)$ endlich ist, so besitzt das System (1) eine ganze Lösung von endlicher Ordnung.