XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1971

УДК 519.21

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ МЕР КАК СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПУАССОНОВСКОЙ МЕРЕ

Б. Григелионис

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ – основное вероятностное пространство и пусть задана возрастающая система σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, таких, что $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$, $\mathscr{F}_t = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \mathscr{F}_{t+\varepsilon} = \mathscr{F}_{t+0}$, $t \geqslant 0$. Будем предполагать что σ-алгебры $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$ наполнены по мере $\mathbf{P}$.

Говорим, что последовательность $m+1$-мерных случайных векторов (τ_k, X_k), $k \geqslant 1$, таких, что $0 < \tau_k \leqslant \infty$, а X_k принимает значения в m-мерном евклидовом пространстве $(R_m, \mathscr{B}_m)$, задает целочисленную случайную меру на σ-алгебре $\mathscr{B}[0, \infty) \times \mathscr{B}_m$*), согласованную с системой σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$, если почти всюду по мере $\mathbf{P}$ (п.в.) на множестве $\{\omega : \tau_k(\omega) < \infty\}$, $|X_k| > 0$, п.в. на множестве $\{\omega : \tau_k(\omega) < \infty\} \cup \{\omega : \tau_l(\omega) < \infty\}$ $\tau_k \neq \tau_l$, $k \neq l$, и $\{\tau_k \leqslant t, X_k \in \Gamma\} \in \mathscr{F}_t$ для всех $t > 0$, $k \geqslant 1$, $\Gamma \in \mathscr{B}_m$. Определим ее равенством:

$$p(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_A(\tau_k, X_k), \qquad A \in \mathscr{B}[0, \infty) \times \mathscr{B}_m,$$

где χ_A – индикатор множества A.

Обозначим

$$p(t, \Gamma) = p([0, t] \times \Gamma), \qquad \Gamma \in \mathscr{B}_m,$$

и допустим, что для всех $t < \infty$ и $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{p(t, U_\varepsilon) < \infty\} = 1, \text{ где } U_\varepsilon = \{x : |x| \geqslant \varepsilon\}.$$

Случайную меру $p(A)$, $A \in \mathscr{B}[0, \infty) \times \mathscr{B}_m$, называем пуассоновской, если для всех непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_k$, таких, что $A_i \in \mathscr{B}[0, \infty) \times \mathscr{B}_m$ и $\mathbf{E}\, p(A_i) < \infty$, $i = 1, \ldots, k$, $k \geqslant 1$, значения $p(A_1), \ldots, p(A_k)$ взаимно независимы и имеют пуассоновское распределение.

Основной целью настоящей работы является исследование условий, при которых для данной целочисленной случайной меры $p(A)$ можно построить, возможно, в определенном расширении основного вероятностного пространства пуассоновскую меру $\tilde{p}(A)$ со средним $\mathbf{E}\,\tilde{p}(A) = \int\limits_A \frac{dx\,dt}{|x|^{m+1}}$, которую мы будем называть стандартной, так что

$$p(t, \Gamma) = \int\limits_0^t \int\limits_{R_m} \chi_\Gamma\big(\varphi(s, x)\big)\, \tilde{p}(ds, dx),$$

*) $\mathscr{B}[0, \infty)$ – σ-алгебра борелевских подмножеств интервала $[0, \infty)$.

где $\varphi(s, x)$ — определенная случайная функция со значениями в R_m, а интеграл понимается в смысле К. Ито [1]. Прежде, чем перейти к точных формулировкам, приведем ряд понятий и фактов теории мартингалов (см. [2]—[6]).

2. Случайный процесс $X(t)$, $t \geqslant 0$, принимающий значения в некотором измеримом пространстве, мы будем называть согласованным с системой σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$, если при каждом t случайная величина X_t является $\mathcal{F}_t$-измеримой.

Обозначим $\mathfrak{M}^{(m)}$ класс всех m-мерных непрерывных справа интегрируемых с квадратом мартигалов относительно системы σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$. Подкласс $\mathfrak{M}^{(m)}$ непрерывных п.в. мартингалов будем обозначать $\mathfrak{M}_c^{(m)}$.

Класс m-мерных случайных процессов $X(t)$, $t \geqslant 0$, согласованных с $\mathcal{F}_t$, таких, что существует возрастающая последовательность $\{T_n\}$ моментов остановок (м.о.)*), $T_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$, и $X_{t \wedge T_n} \in \mathfrak{M}^{(m)}$ для всех $n \geqslant 1$**), мы обозначим $\mathfrak{M}^{(m),\,\mathrm{loc}}$.

Далее, обозначим $\mathfrak{A}^+$ множество всех естественно возрастающих процессов (см. [4], [5]) $A(t)$, $t \geqslant 0$, согласованных с $\mathcal{F}_t$ и $\mathbf{E}\,A(t) < \infty$ для всех $t < \infty$, $\mathfrak{A} = \{A : A = A_1 - A_2,\ A_1,\ A_2 \in \mathfrak{A}^+\}$. Аналогично определяются классы случайных процессов $\mathfrak{M}_c^{(m),\,\mathrm{loc}}$, $\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{A}^{\mathrm{loc}}$, $\mathfrak{A}_c^{\mathrm{loc}}$. При $m=1$ верхний индекс (m) всюду будем опускать.

Известно [5], что для любых X, $Y \in \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}$ существует единственный с точностью до эквивалетности процесс $\langle X, Y \rangle \in \mathfrak{A}^{\mathrm{loc}}$, такой, что п.в.

$$\mathbf{E}\left[\Big(X(t \wedge T_n) - X(s \wedge T_n)\Big)\Big(Y(t \wedge T_n) - Y(s \wedge T_n)\Big) \,\Big|\, \mathcal{F}_s\right] =$$
$$= \mathbf{E}\left[\langle X, Y \rangle_{t \wedge T_n} - \langle X, Y \rangle_{s \wedge T_n} \,|\, \mathcal{F}_s\right]$$

для всех $t \geqslant s \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ и всех $\{T_n\}$, таких, что $X(t \wedge T_n)$, $Y(t \wedge T_n) \in \mathfrak{M}$.

Следуя [5], для каждого $X \in \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}$ определим класс случайных процессов $\mathbf{L}(\langle X \rangle)$ таким образом.

Пусть $\mathbf{\Phi}$ — класс измеримых случайных процессов $\Phi(t)$, $t \geqslant 0$, таких, что $\Phi(T)$ $\mathcal{F}_T$— измерима для всех м.о. T,

$\mathbf{\Phi}_{rc}$ — класс ограниченных непрерывных справа, имеющих пределы слева случайных процессов и

$$\mathbf{L}(\langle X \rangle) = \mathbf{\Phi} \cap \bar{\mathbf{\Phi}}_{rc},$$

где $\bar{\mathbf{\Phi}}_{rc} = \bigcup\limits_{\{T_n\}} \bar{\mathbf{\Phi}}_{rc}^{\{T_n\}}$ (суммируется по множеству всех монотонных последовательностей м.о. $\{T_n\}$, таких, что $T_n \uparrow \infty$ и $X(t \wedge T_n) \in \mathfrak{M}$ для всех $n \geqslant 1$), а $\bar{\mathbf{\Phi}}_{rc}^{\{T_n\}}$ является замыканием $\mathbf{\Phi}_{rc}$ по системе полунорм

$$\|\Phi\|_{\langle X \rangle(t)}^{T_n} = \left[\mathbf{E}\left(\int_0^{t \wedge T_n} \Phi^2(s)\, d\langle X \rangle_s\right)\right]^{1/2}, \qquad n \geqslant 1,\ t \in (0, \infty).$$

---

*) Неотрицательная случайная величина T называется м.о., если $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ для всех $t \geqslant 0$ и $\mathbf{P}\{T < \infty\} = 1$.

**) $a \wedge b = \min(a, b)$.

Из результатов работы [5] (см. также [6]) следует, что для каждого $X \in \mathfrak{M}^{loc}$ и $\Phi \in \mathbf{L}(\langle X \rangle)$ существует единственный с точностью до эквивалентности $Y \in \mathfrak{M}^{loc}$ такой, что для всех $Z \in \mathfrak{M}^{loc}$ п.в.

$$\langle Y, Z \rangle_t = \int_0^t \Phi(s)\, d\langle X, Z \rangle_s.$$

Y называется стохастическим интегралом от Φ по X и обозначается

$$Y(t) = \int_0^t \Phi(s)\, dX(s).$$

3. Рассмотрим теперь целочисленную случайную меру $p(A)$, $A \in \mathscr{B}[0, \infty) \times \mathscr{B}_m$, заданную последовательностью $\{(\tau_k, X_k)\}$, согласованную с системой σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$, и предположим, что существует функция $\Pi(t, \Gamma) = \Pi(t, \omega, \Gamma)$, $(t, \omega, \Gamma) \in [0, \infty) \times \Omega \times \mathscr{B}_m$, являющаяся мерой по Γ при фиксированных (t, ω), при каждом $\Gamma \in \mathscr{B}_m$ $\mathscr{B}[0, \infty) \times \mathscr{F}$ — измеримая и $\Pi(T, \Gamma)$ $\mathscr{F}_T$ — измеримая для каждого м.о. T, для некоторой последовательности м.о. $\{T_n\}$, $T_n \uparrow \infty$

$$\mathbf{E}\left(\int_0^{t \wedge T_n} \Pi(s, U_\varepsilon)\, ds\right) < \infty \text{ при всех } n \geqslant 1,\ \varepsilon > 0,\ t > 0,$$

и такая, что

$$q(t, \Gamma) = p(t, \Gamma) - \int_0^t \Pi(s, \Gamma)\, ds \in \mathfrak{M}^{loc} \tag{*}$$

для всех $\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Лемма 1 (ср. [7]). *При вышеделанных предположениях для всех* Γ_1, $\Gamma_2 \in \mathscr{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$$\langle q(\cdot, \Gamma_1), q(\cdot, \Gamma_2) \rangle_t = \int_0^t \Pi(s, \Gamma_1 \cap \Gamma_2)\, ds. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть последовательность м.о. $\{T_n\}$, $T_n \uparrow \infty$, такая, что $q(t \wedge T_n, \Gamma_i) \in \mathfrak{M}$, $i = 1, 2$. Для краткости обозначим

$$q(t \wedge T_n, \Gamma) = q_n(t, \Gamma),\ p(t \wedge T_n, \Gamma) = p_n(t, \Gamma)$$

и

$$\int_0^{t \wedge T_n} \Pi(s, \Gamma)\, ds = \Pi_n(t, \Gamma).$$

Пусть $0 < \delta < 1$. Для фиксированных $0 < s < t < \infty$, очевидно, можно выбрать последовательность м.о. $\{\sigma_n\}$ так, что $\sigma_0 \equiv s$, $\sigma_k \leqslant \sigma_{k+1}$, $k \geqslant 0$, существует $k_0 = k_0(\omega) < \infty$, такое, что п.в. $\sigma_k = t$ при всех $k \geqslant k_0$, и

$$\sup_{u,\, v \in [\sigma_k,\, \sigma_{k+1})} |Y_n(u) - Y_n(v)| \leqslant \delta,\ k \geqslant 0,$$

где

$$Y_n(t) = \big(p_n(t, \Gamma_1), p_n(t, \Gamma_2), \Pi_n(t, \Gamma_1), \Pi_n(t, \Gamma_2)\big).$$

Имеем, что

$$\left(q_n(t,\ \Gamma_1)-q_n(s,\ \Gamma_1)\right)\left(q_n(t,\ \Gamma_2)-q_n(s,\ \Gamma_2)\right)=$$

$$=\sum_{i,\,j=1}^{\infty}\left(q_n(\sigma_i,\ \Gamma_1)-q_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_1)\right)\left(q_n(\sigma_j,\ \Gamma_2)-q_n(\sigma_{j-1},\ \Gamma_2)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(q_n(\sigma_i,\ \Gamma_1)-q_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_1)\right)\left(q_n(\sigma_i,\Gamma_2)-q_n(\sigma_{i-1},\Gamma_2)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\left(q_n(\sigma_i,\ \Gamma_1)-q_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_1)\right)q_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_2)+\Big(q_n(\sigma_i,\ \Gamma_2)-$$

$$-q_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_2)\Big)\,q_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_1)\Big]. \tag{2}$$

Поскольку для всех $i\geqslant 1$ и $k=1, 2$

$$\Pi_n(\sigma_i,\Gamma_k)-\Pi_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_k)\leqslant\delta, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(p_n(\sigma_i,\ \Gamma_1)-p_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_1)\right)\left(p_n(\sigma_i,\ \Gamma_2)-p_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_2)\right)=$$

$$=p_n(t,\ \Gamma_1\cap\Gamma_2)-p_n(s,\ \Gamma_1\cap\Gamma_2) \tag{4}$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(p_n(\sigma_i,\ \Gamma_k)-p_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_k)\right)=p_n(t,\Gamma_k)-p_n(s,\ \Gamma_k), \tag{5}$$

то из (3)—(5) получаем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(q_n(\sigma_i,\ \Gamma_1)-q_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_1)\right)\left(q_n(\sigma_i,\Gamma_2)-q_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_2)\right)=$$

$$=p_n(t,\ \Gamma_1\cap\Gamma_2)-p_n(s,\ \Gamma_1\cap\Gamma_2)+R_n(s,\ t,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2), \tag{6}$$

где

$$R_n(s,\ t,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2)=-\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\left(\Pi_n(\sigma_i,\ \Gamma_1)-\Pi_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_1)\right)\Big[\Big(p_n(\sigma_i,\ \Gamma_2)-$$

$$-p_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_2)\Big)-\left(\Pi_n(\sigma_i,\ \Gamma_2)-\Pi_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_2)\right)\Big]+\Big(p_n(\sigma_i,\ \Gamma_1)-$$

$$-p_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_1)\Big)\left(\Pi_n(\sigma_i,\ \Gamma_2)-\Pi_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_2)\right)\Big\}$$

и

$$|R_n(s,\ t,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2)|\leqslant\delta\left(p_n(t,\ \Gamma_1)+p_n(t,\ \Gamma_2)+\Pi_n(t,\ \Gamma_1)\right). \tag{7}$$

Обозначим

$$q_k=\sum_{i=1}^{k}\Big[\left(q_n(\sigma_i,\ \Gamma_1)-q_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_1)\right)q_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_2)+$$

$$+\left(q_n(\sigma_i,\Gamma_2)-q_n(\sigma_{i-1},\Gamma_2)\right)q_n(\sigma_{i-1},\ \Gamma_1)\Big]$$

и заметим, что $\{q_k, \mathscr{F}_{\sigma_k}, k\geqslant 1\}$ является мартингалом, поскольку из известных свойств мартингалов (см., например, [2], гл. VII), имеем, что $(q_n(\sigma_k, \Gamma_j), \mathscr{F}_{\sigma k}, k\geqslant 0)$, $j=1, 2$, являются мартингалами и

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\leqslant u\leqslant t}\left(q_n(u, \Gamma_j)\right)^2\right]\leqslant 4\,\mathbf{E}\left(q_n(t, \Gamma_j)\right)^2<\infty, \qquad j=1,\ 2. \tag{8}$$

Покажем, что

$$\mathbf{E}\,|q_k|\leqslant C<\infty, \tag{9}$$

где C не зависит от k.

В силу того, что при каждом $k\geqslant 2$ п.в.

$$\mathbf{E}(q_k\,|\,\mathscr{F}_s)=\mathbf{E}\left(\mathbf{E}(q_k\,|\,\mathscr{F}_{\sigma_1})\,|\,\mathscr{F}_s\right)=0,$$

то из (9) будет следовать, что п.в.

$$\mathbf{E}(q_\infty\,|\,\mathscr{F}_s)=0. \tag{10}$$

Имеем, что

$$q_k=\left(q_n(\sigma_k, \Gamma_1)-q_n(s, \Gamma_1)\right)\left(q_n(\sigma_k, \Gamma_2)-q_n(s, \Gamma_2)\right)-$$
$$-\sum_{i=1}^{k}\left(q_n(\sigma_i, \Gamma_1)-q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_1)\right)\left(q_n(\sigma_i, \Gamma_2)-q_n(\sigma_{i-1}, \Gamma_2)\right). \tag{11}$$

Из (3) – (7) и (11) получаем, что

$$|q_k|\leqslant\frac{1}{2}\Big[\sup_{s\leqslant u\leqslant t}\left(q_n(u, \Gamma_1)-q_n(s, \Gamma_1)\right)^2+\sup_{s\leqslant u\leqslant t}\Big(q_n(u, \Gamma_2)-$$
$$-q_n(s, \Gamma_2)\Big)^2\Big]+p_n(t, \Gamma_1\cap\Gamma_2)+\delta\left(p_n(t, \Gamma_1)+p_n(t, \Gamma_2)+\Pi_n(t, \Gamma_1)\right).$$

Отсюда и (8) следует (9) и тем самым (10).

Теперь из (2), (6) и (10) находим, что

$$\mathbf{E}\left[\left(q_n(t, \Gamma_1)-q_n(s, \Gamma_1)\right)\left(q_n(t, \Gamma_2)-q_n(s, \Gamma_2)\right)|\,\mathscr{F}_s\right]=$$
$$=\mathbf{E}\left[\left(\Pi_n(t, \Gamma_1\cap\Gamma_2)-\Pi_n(s, \Gamma_1\cap\Gamma_2)\right)|\,\mathscr{F}_s\right]+$$
$$+\mathbf{E}\left(R_n(s, t, \Gamma_1, \Gamma_2)\,|\,\mathscr{F}_s\right). \tag{12}$$

Но, ввиду (7), п.в.

$$\left|\,\mathbf{E}\left(R_n(s, t, \Gamma_1, \Gamma_2)\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right)\right|\leqslant\ \delta\,\mathbf{E}\Big[\Big(2\Pi_n(t, \Gamma_1)+$$
$$+\Pi_n(t, \Gamma_2)\Big)\,\Big|\,\mathscr{F}_s\Big]. \tag{13}$$

Из (12) и (13) в силу произвольности δ следует (1). Лемма 1 доказана.

Перейдем к определению стохастических интегралов по мерам p и q.

Пусть $\mathbf{F}$-класс $\mathscr{B}[0, \infty)\times\mathscr{B}_m\times\mathscr{F}$ —измеримых функций $f(t, x)=f(t, x, \omega)$, таких, что при каждом фиксированном x $f(T, x)$ $\mathscr{F}_T$ – измерима для любого м.о. T. Обозначим $\mathbf{F}_P$ подкласс функций $f \in \mathbf{F}$, для которых суммы $\sum_{\tau_k \leqslant t} f(\tau_k, X_k)$, сходятся п.в. Значение этой суммы мы будем называть интегралом функции f по мере p и обозначать

$$P_f(t) = \int_0^t \int_{R_m} f(s, x) p(ds, dx).$$

Далее, обозначим $\mathbf{F}_Q$ подкласс функций $f \in \mathbf{F}$, таких, что

$$\mathbf{E}\left(\int_0^{t \wedge T_n} \int_{R_m} f^2(s, x) \Pi(s, dx) ds\right) < \infty$$

для некоторой последовательности $\{T_n\}$ м.о., $T_n \uparrow \infty$, и всех $n \geqslant 1$, $t > 0$.

Используя соотношение (1) стандартным образом для функций $f \in \mathbf{F}_Q$ интеграл по мере q, обозначаемый

$$Q_f(t) = \int_0^t \int_{R_m} f(s, x) q(ds, dx),$$

можно определить как единственный с точностью до эквивалентности процесс $Q_f \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}$, такой, что

1) если $f(s, x) = \Phi(s) \chi_\Gamma(x)$, $\Phi \in \mathbf{L}(\langle q(\cdot, \Gamma)\rangle)$, $\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то

$$Q_f(t) = \int_0^t \Phi(s) q(ds, \Gamma);$$

2) если $f_1, f_2 \in \mathbf{F}_Q$ и a_1, a_2 — действительные числа, то

$$Q_{a_1 f_1 + a_2 f_2} = a_1 Q_{f_1} + a_2 Q_{f_2};$$

3)

$$\mathbf{E} Q_f^2(t \wedge T_n) = \mathbf{E}\left(\int_0^{t \wedge T_n} f^2(s, x) \Pi(s, dx) ds\right)$$

для всех $n \geqslant 1$, $t > 0$ и каждой последовательности $\{T_n\}$ м.о., $T_n \uparrow \infty$, $Q_f(t \wedge T_n) \in \mathfrak{M}$.

Пусть $g = (g_1, \ldots, g_N)$, $f = (f_1, \ldots, f_N)$, где $g_i \in \mathbf{F}_P$, $f_i \in \mathbf{F}_Q$ и $f_i g_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$. Обозначим $H(t) = \left(H_1(t), \ldots, H_N(t)\right)$, где $H_i(t) = X_i(t) + A_i(t) + Q_{f_i}(t) + P_{g_i}(t)$, $X_i \in \mathfrak{M}_c^{\text{loc}}$, $A_i \in \mathfrak{A}_c^{\text{loc}}$, $i = 1, \ldots, N$.

Аналогично теореме 5.1 [5], имеет место следующая важная формула о преобразовании стохастических интегралов, являющаяся обобщенной формулой К. Ито [8] (см. также [5], [9] — [14]).

Лемма 2. *Пусть* $F(z_1, \ldots, z_N)$ — *дважды непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что либо* $\frac{\partial F}{\partial z_i}$, *либо* f_i, $i=1, \ldots, N$, *ограничены. Тогда верна формула*:

$$F\left(H(t)\right)-F\left(H(s)\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_{s}^{t} \frac{\partial F}{\partial z_i}\left(H(u)\right) dX_i(u)+$$

$$+\int_{s}^{t} \int_{R_m} \left[F\left(H(u)+f(u, x)\right)-F\left(H(u)\right)\right] q(du, dx)+$$

$$+\int_{s}^{t} \left\{ \int_{R_m} \left[F\left(H(u)+f(u, x)\right)-F\left(H(u)\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=1}^{N} f_i(u, x) \frac{\partial F}{\partial z_i}\left(H(u)\right)\right] \Pi(u, dx)\right\} du+P_G(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} \int_{s}^{t} \frac{\partial F}{\partial z_i}\left(H(u)\right) dA_i(u)+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int_{s}^{t} \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j}\left(H(u)\right) d\langle X_i, X_j\rangle_u,$$

где

$$G(t, x)=F\left(H(t)+g(t, x)\right)-F\left(H(t)\right).$$

4. Далее нам еще понадобятся следующие утверждения.

Лемма 3. *Если выполнено предположение* (*) п. 3, $\Pi(t, \Gamma)$ *не зависит от* ω *и для всех* $t\in(0, \infty)$

$$\int_{0}^{t} \int_{|x|\leqslant 1} |x|^2 \Pi(s, dx) ds<\infty,$$

то мера p *является пуассоновской.*

Если, кроме того, существует $X=(X_1, \ldots, X_r)\in\mathfrak{M}_c^{(r), \mathrm{loc}}$, *такой, что*

$$\langle X_i, X_j\rangle_t=\int_{0}^{t} a_{ij}(s) ds, \qquad i, j=1, \ldots, r,$$

где функции $a_{ij}(t)$ *не зависят от* ω, *то мера* p *и* X *независимы, а процесс* X *является гауссовским процессом с независимыми приращениями.*

Доказательство этой леммы, используя лемму 2, аналогично доказательству теоремы 2 [14], и мы его не приводим.

Обозначим

$$C_n=\{x: 2^n\leqslant|x|<2^{n+1}\},$$

$$C_n'(t)=\{x: r_n(t)\leqslant|x|<r_{n+1}(t)\},$$

где $r_n(t)$ определяются равенством

$$\int_{|x|\geqslant 2^n} \Pi(t, dx)=\int_{|x|\geqslant r_n(t)} \frac{dx}{|x|^{m+1}}, \qquad n=0, \pm 1, \ldots$$

Лемма 4. *При предположении* (*) *п.* 3 *существует функция* $\varphi(t, x) = \left(\varphi_1(t, x), \ldots, \varphi_m(t, x)\right)$, $\varphi_i \in \mathbf{F}$, $i=1, \ldots, m$, *такая, что для всех* $\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon>0$ и $t \in (0, \infty)$

$$\Pi(t, \Gamma) = \int_{R_m} \chi_\Gamma\left(\varphi(t, x)\right) \frac{dx}{|x|^{m+1}}$$

и

$$\varphi_t^{-1}(C_n) = C'_n(t)^{*)},$$

причем $\varphi_t^{-1}(\{x\})$ *состоит из единственной точки, если* $\Pi(t, \{x\})=0$, *является сферическим слоем* $C'_n(t, x) = \{y : r'_n(t, x) \leqslant |y| < r''_n(t, x)\} \subset C'_n(t)$, *если*

$$\Pi(t, \{x\}) > 0, \ x \in C_n, \ \textit{и} \ \Pi(t, \{x\}) = \int_{C'_n(t, x)} \frac{dy}{|y|^{m+1}}.$$

Доказательство леммы 4 является довольно очевидным изменением доказательства леммы 2 в [15], стр. 89.

Пусть случайный вектор $Y=(Y_1, \ldots, Y_m)$ имеет равномерное распределение в шаре $Q_1 = \{x : |x| < 1\}$, т.е.

$$\mathbf{P}\{Y \in \Gamma\} = \frac{\mu_m(\Gamma \cap Q_1)}{\mu_m(Q_1)},$$

где μ_m -мера Лебега в R_m.

Обозначим $Z=(Z_1, \ldots, Z_m)$, где

$$Z_i = \begin{cases} \dfrac{Y_i r r'}{|Y|\left(r+(r'-r)|Y|^m\right)} & \text{при } 0<r<r'<\infty, \\ \dfrac{Y_i r}{|Y|^{m+1}} & \text{при } r>0, \ r'=\infty, \end{cases} \tag{14}$$

$$Q_{rr'} = \{x : r \leqslant |x| < r'\}.$$

Лемма 5. *Имеем, что*

$$\mathbf{P}\{|Y| < \rho\} = \begin{cases} 0 & \textit{при } \rho \leqslant 0, \\ \rho^m & \textit{при } 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \\ 1 & \textit{при } \rho > 1, \end{cases} \tag{15}$$

$$\mathbf{P}\{Z \in \Gamma\} = c_{rr'}^{(m)} \int_{\Gamma \cap Q_{rr'}} \frac{dx}{|x|^{m+1}}, \tag{16}$$

где

$$c_{rr'}^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{rr'\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}(r'-r)} & \textit{при } r'<\infty, \\ \dfrac{r\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} & \textit{при } r'=\infty. \end{cases}$$

---

*) $\varphi_t^{-1}(\Gamma) = \{x : \varphi(t, x) \in \Gamma\}$.

Доказательство. Если обозначить $Q_\rho=\{x:|X|<\rho\}$, то будем иметь, что при $0\leqslant\rho\leqslant 1$

$$\mathbf{P}\{|Y|<\rho\}=\frac{\mu_m(Q_\rho)}{\mu_m(Q_1)} \tag{17}$$

и (15) следует из (17) и того, что, как хорошо известно,

$$\mu_m(Q_\rho)=\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}\rho^m}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Пусть далее $r'<\infty$. Тогда из (14) следует, что

$$|Z|=\frac{rr'}{r+(r'-r)|Y|^m}.$$

Отсюда имеем, что $\mathbf{P}\{|Z|<\rho\}=0$ при $\rho\leqslant r$ и $=1$ при $\rho\geqslant r'$, а при $r\leqslant\rho\leqslant r'$ в силу (15)

$$\mathbf{P}\{|Z|<\rho\}=\mathbf{P}\left\{|Y|^m>\frac{r}{\rho}\,\frac{r'-\rho}{r'-r}\right\}=1-\frac{r}{\rho}\,\frac{r'-\rho}{r'-r}=\frac{rr'}{r'-r}\int_r^\rho\frac{du}{u^2}. \tag{18}$$

С другой стороны, поскольку распределение вектора Y инвариантно относительно ортогональных поворотов системы координат около ее начала, то из (14) следует, что этим же свойством обладает и распределение вектора Z. Отсюда вытекает, что плотность $f(x)$ распределения вектора Z обладает свойством:

$$f(x)=f(|x|),\quad x\in R_m.$$

Поэтому при $r\leqslant\rho\leqslant r'$

$$\mathbf{P}\{|Z|<\rho\}=\int_{Q_{r\rho}}f(|x|)\,dx=\int_r^\rho f(u)\,s_m(u)\,du, \tag{19}$$

где $s_m(\rho)$ — площадь m-мерной сферы радиуса ρ,

$$s_m(\rho)=\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}\rho^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Сравнив (18) и (19), находим, что

$$f(\rho)=\frac{rr'\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}(r'-r)\rho^{m+1}}.$$

Случай $r'=\infty$ исследуется аналогично. Лемма 5 доказана.

5. Пусть в вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ последовательность $m+1$-мерных случайных векторов (τ_k, X_k), $k\geqslant 1$, задает целочисленную случайную меру p, согласованную с системой σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t\geqslant 0$. Мы будем также рассматривать вероятностное пространство $(\Omega',\mathcal{F}',\mathbf{P}')$, в котором определена последовательность независимых m-мерных случайных векторов $\{Y_k\}$, равномерно распределенных в шаре Q_1, и вероятностное пространство $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{F}},\hat{\mathbf{P}})$, в котором определена последовательность $m+1$-мерных случайных векторов $\{(\hat{\tau}_k,\hat{X}_k)\}$, задающая стандартную пуассоновскую меру $\hat{p}$, согласованную с системой σ-алгебр $\hat{\mathcal{F}}_t$, $t\geqslant 0$.

Пусть мера p удовлетворяет предположению (*) п. 3. На вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathbf{P}}) = (\Omega \times \Omega' \times \hat{\Omega}, \mathscr{F} \times \mathscr{F}' \times \hat{\mathscr{F}}, \mathbf{P} \times \mathbf{P}' \times \hat{\mathbf{P}})$ определим последовательность $m+1$ -мерных случайных векторов $(\tilde{\tau}_k, \tilde{X}_k)$, как объединение следующих двух последовательностей:

$$(\tilde{\tau}_{k1}, \tilde{X}_{k1}) = \begin{cases} \left(\tau_k, \varphi_{\tau_k}^{-1}(\{X_k\})\right) \text{ при } \tau_k < \infty \text{ и } \Pi(\tau_k, \{X_k\}) = 0, \\ \left(\tau_k, \dfrac{r_k r_k' Y_k}{|Y_k|(r_k + (r_k' - r_k)|Y_k|^m)}\right) = (\tau_k, Z_k) \text{ при } \tau_k < \infty \\ \qquad\qquad \text{ и } \Pi(\tau_k, \{X_k\}) > 0 \\ (\tau_k, 0) \quad \text{ при } \tau_k = \infty, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$r_k = r_n'(\tau_k, X_k), \; r_k' = r_n''(\tau_k, X_k),$$

если

$$X_k \in C_n, \; n = 0, \pm 1, \ldots,$$

и

$$(\tilde{\tau}_{k2}, \tilde{X}_{k2}) = \begin{cases} (\hat{\tau}_k, \hat{X}_k) \text{ при } (\hat{\tau}_k, \hat{X}_k) \in V_0, \\ (\infty, \hat{X}_k) \text{ при } (\hat{\tau}_k, \hat{X}_k) \,\overline{\in}\, V_0, \end{cases} \tag{21}$$

где $V_0 = \{(t, x) : |\varphi(t, x)| = 0\}$.

Далее, для простоты оставляя те же обозначения, все случайные величины будем считать определенными во всем пространстве $\tilde{\Omega}$, а также все подмножества и σ-алгебры как подмножества и σ-алгебры в $\tilde{\Omega}$ (см. [2], стр. 70). Среднее по мере $\tilde{\mathbf{P}}$ снова будем обозначать символом $\mathbf{E}$.

Если обозначить $K_t = \{k : \tau_k \leqslant t, \Pi(\tau_k, \{X_k\}) > 0\}$ и $\mathscr{F}_t' - \sigma$-алгебры, порожденные случайными событиями $\{Y_k \in \Gamma, k \in K_t\}$, $\Gamma \in \mathscr{B}_m$, $k \geqslant 1$, $t \geqslant 0$, то последовательность $(\tilde{\tau}_k, \tilde{X}_k)$, $k \geqslant 1$, задает некоторую целочисленную случайную меру $\tilde{p}$, согласованную с системой σ-алгебр $\tilde{\mathscr{F}}_t = \sigma(\mathscr{F}_t \cup \mathscr{F}_t' \cup \hat{\mathscr{F}}_t)$ $t \geqslant 0$.

Теорема 1. *При предположении* (*) *п.* 3. *случайная мера* $\tilde{p}$ *является стандартной пуассоновской мерой, такой, что для всех* $\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

$$p(t, \Gamma) = \int_0^t \int_{R_m} \chi_\Gamma\left(\varphi(s, x)\right) \tilde{p}(ds, dx). \tag{22}$$

Доказательство. Из (20) и (21) имеем, что для всех $A \in \mathscr{B}[0, \infty) \times \mathscr{B}_m$

$$\tilde{p}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_A(\tau_k, \tilde{X}_{k1}) + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A \cap V_0}(\hat{\tau}_k, \hat{X}_k),$$

а для всех $\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $t > 0$

$$\tilde{p}(t, \Gamma) = \sum_{\tau_k \leqslant t} \chi_\Gamma(\tilde{X}_{k1}) + \int_0^t \int_{R_m} V_0^\Gamma(s, x)\, \hat{p}(ds, dx) =$$

$$= \int_0^t \int_{R_m} V_1^\Gamma(s, x) p(ds, dx) + \int_0^t \int_{R_m} V_0^\Gamma(s, x)\, \hat{p}(ds, dx) -$$

$$- \int_0^t \int_{R_m} V_2^\Gamma(s, x) p(ds, dx), \tag{23}$$

где
$$V_0^\Gamma(s, x) = \chi_{V_0 \cap [0, \infty) \times \Gamma}(s, x), \quad V_1^\Gamma(s, x) = \chi_{\varphi_s^{-1}(\Gamma)}(x)$$
и
$$V_2^\Gamma(s, x) = \begin{cases} 1, \text{ если } s = \tau_k,\ x = X_k \text{ при некотором } k \geqslant 1, \\ \text{таком, что } \Pi(\tau_k, \{X_k\}) > 0 \text{ и } Z_k \in \Gamma, \\ 0 \text{ в противоположном случае.} \end{cases}$$

Пусть последовательность $\{T_n\}$ м.о., $T_n \uparrow \infty$, такая, что $q(t \wedge T_n, \Gamma) \in \mathfrak{M}$. Тогда из предположения (*) п.3, свойств стохастических интегралов и (23) имеем, что для всех $0 \leqslant s < t < \infty$ и $n \geqslant 1$ п.в.
$$\mathbf{E}\left(\tilde{p}(t \wedge T_n, \Gamma) - \tilde{p}(s \wedge T_n, \Gamma) \mid \tilde{\mathscr{F}}_s\right) = \mathbf{E}\left(\int_{s \wedge T_n}^{t \wedge T_n} \Pi\left(u, \varphi_u^{-1}(\Gamma)\right) du \mid \tilde{\mathscr{F}}_s\right) +$$
$$+\mathbf{E}\left(\int_{s \wedge T_n}^{t \wedge T_n} \int_{R_m} V_0^\Gamma(u, x) \frac{dx\, du}{|x|^{m+1}} \mid \tilde{\mathscr{F}}_s\right) - \mathbf{E}\left(\int_{s \wedge T_n}^{t \wedge T_n} \left[\Pi\left(u, \varphi_u^{-1}(\Gamma)\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_{R_m} \left(\chi_\Gamma(x) - V_0^\Gamma(u, x)\right) \frac{dx}{|x|^{m+1}}\right] du \mid \tilde{\mathscr{F}}_s\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left((t \wedge T_n - s \wedge T_n) \int_\Gamma \frac{dx}{|x|^{m+1}} \mid \tilde{\mathscr{F}}_s\right), \tag{24}$$
поскольку в силу лемм 4 и 5
$$\mathbf{E}\left(\int_{s \wedge T_n}^{t \wedge T_n} \int_{R_m} V_2^\Gamma(u, x) p(du, dx) \mid \tilde{\mathscr{F}}_s\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left\{\sum_{\substack{s \wedge T_n < \tau_k \leqslant t \wedge T_n \\ \Pi(\tau_k, \{X_k\}) > 0,\ \varphi(\tau_k, X_k) \in \Gamma}} \int_{\{r_k \leqslant |x| < r_k'\} \cap (R_m \setminus \Gamma)} \frac{dx}{|x|^{m+1}} \mid \tilde{\mathscr{F}}_s\right\} =$$
$$= \mathbf{E}\left\{\int_{s \wedge T_n}^{t \wedge T_n} \left(\Pi\left(u, \varphi_u^{-1}(\Gamma)\right) - \int_{R_m} \left(\chi_\Gamma(x) - V_0^\Gamma(u, x)\right) \frac{dx}{|x|^{m+1}}\right) du \mid \tilde{\mathscr{F}}_s\right\}$$

Из (24) и леммы 3 следует, что p является стандартной пуассоновской мерой.

Далее для всех $\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap U_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, находим, что
$$\int_0^t \int_{R_m} \chi_\Gamma\left(\varphi(s, x)\right) \tilde{p}(ds, dx) = \int_0^t \int_{R_m} \left(1 - V_0^\Gamma(s, x)\right) \chi_\Gamma\left(\varphi(s, x)\right) \times$$
$$\times \tilde{p}(ds, dx) = \sum_{\tau_k \leqslant t} \chi_\Gamma\left(\varphi(\tau_k, \tilde{X}_{k1})\right) = \sum_{\tau_k \leqslant t} \chi_\Gamma(X_k) = p(t, \Gamma),$$
так как из (20) и леммы 4 имеем, что
$$\chi_\Gamma\left(\varphi(\tau_k, \tilde{X}_{k1})\right) = \chi_\Gamma(X_k).$$
Теорема 1 доказана.

Поскольку из теоремы 1 и леммы 4 имеем, что для всех

$$\Gamma \in \mathscr{B}_m \cap U_\varepsilon, \ \varepsilon > 0, \qquad t \in (0, \infty)$$

$$q(t, \Gamma) = \int_0^t \int_{R_m} \chi_\Gamma \left(\varphi(s, x)\right) \tilde{q}(ds, dx),$$

где

$$\tilde{q}(ds, dx) = \bar{p}(ds, dx) - \frac{ds\, dx}{|x|^{m+1}},$$

то нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Следствие 1. *Если* $f \in \mathbf{F}_P$, *то*

$$\int_0^t \int_{R_m} f(s, x) p(ds, dx) = \int_0^t \int_{R_m} f\left(s, \varphi(s, x)\right) \bar{p}(ds, dx).$$

Если же $f \in \mathbf{F}_Q$, *то*

$$\int_0^t \int_{R_m} f(s, x) q(ds, dx) = \int_0^t \int_{R_m} f\left(s, \varphi(s, x)\right) \tilde{q}(ds, dx).$$

6. Как одно из приложений теоремы 1, рассмотрим задачу об отыскании условий, при которых m-мерный случайный процесс $\left(X(t), t \geqslant 0\right)$ с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbf{P})$, можно рассматривать как решение определенного стохастического уравнения К. Ито (см. [2], [14], [16], [17]).

Пусть $\mathscr{F}_t = \bar{\mathscr{F}}_{t+0}$, где $\bar{\mathscr{F}}_t$ — σ-алгебры, положенные случайными величинами $X(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, и пополненные по мере $\mathbf{P}$. Пусть (τ_k, X_k), $k \geqslant 1$, — в некотором порядке занумерованные моменты и величины скачков процесса $X(t)$, $t \geqslant 0$, полагая для тех k и ω, для которых (τ_k, X_k) не определены, $\tau_k = \infty$ и $X_k = 0$. Последовательность (τ_k, X_k), $k \geqslant 1$, очевидно, задает некоторую целочисленную случайную меру, называемую мерой скачков процесса $X(t)$, $t \geqslant 0$, согласованную с системой σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$.

Предположим, что выполнено предположение (*) п. 3 и $\Pi(t, \Gamma) = \Pi\left(t, X(t), \Gamma\right)$, где $\Pi(t, x, \Gamma)$ не зависит от ω. Обозначим

$$g(x) = \left(g_1(x), \ldots, g_m(x)\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ x & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) = x - g(x).$$

Имеем очевидно, что $f_i \in \mathbf{F}_P$ и допустим, что $f_i \in \mathbf{F}_Q$, $i = 1, \ldots, m$. Если обозначить $X_0(t) = X(t) - P_g(t) - Q_f(t)$, $t \geqslant 0$, то легко убедиться, что траектории процесса $X_0(t)$, $t \geqslant 0$, п.в. непрерывны (см. [14]).

Предположим теперь, что существуют функция $a(t, x) = \left(a_1(t, x), \ldots, a_m(t, x)\right)$ и матрица $A(t, x) = \| a_{ij}(t, x) \|_1^m$, такие, что функции $a_i(t, x)$, $a_{ij}(t, x)$, $i, j = 1, \ldots, m$, $\mathscr{B}[0, \infty) \times \mathscr{B}_m$ — измеримы, и случайный процесс

$$\tilde{X}(t) = X_0(t) - \int_0^t a\left(s, X(s)\right) ds \in \mathfrak{M}^{(m), \mathrm{loc}},$$

причем п.в.

$$\langle \tilde{X}_i, \tilde{X}_j \rangle = \int_0^t a_{ij}\left(s, X(s)\right) ds.$$

Пусть ранг $r(t)$ матрицы $A\left(t, X(t)\right)$ п.в. по мере $\mu_1 \times \mathbf{P}$ удовлетворяет неравенству $r(t) \leqslant r \leqslant m$, где r — целое число.

При вышеделанных предположениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 2*). *В определенном расширении основного вероятностного пространства можно построить r-мерный винеровский процесс $w(t) = \left(w_1(t), \ldots, w_r(t)\right)$ и независящую от него стандартную пуассоновскую меру $\tilde{p}$ такие, что процесс $X(t)$, $t \geqslant 0$, является решением стохастического уравнения К. Ито*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \hat{a}\left(s, X(s)\right) ds + \sum_{k=1}^{r} \int_0^t b_k\left(s, X(s)\right) dw_k(s) +$$
$$+ \int_0^t \int_{|y| \leqslant 1} \varphi\left(s, X(s), y\right) \tilde{q}(ds, dy) +$$
$$+ \int_0^t \int_{|y|>1} \varphi\left(s, X(s), y\right) \tilde{p}(ds, dy), \tag{25}$$

где

$$\hat{a}(t, x) = a(t, x) + \int\limits_{\substack{|\varphi(t, x, y)|>1 \\ |y| \leqslant 1}} \varphi(t, x, y) \frac{dy}{|y|^{m+1}} -$$
$$- \int\limits_{\substack{|\varphi(t, x, y)| \leqslant 1 \\ |y|>1}} \varphi(t, x, y) \frac{dy}{|y|^{m+1}},$$

$$\Pi(t, x, \Gamma) = \int_{R_m} \chi_\Gamma\left(\varphi(t, x, y)\right) \frac{dy}{|y|^{m+1}},$$

$b_k(t, x) = \sqrt{\lambda_k(t, x)}\, u_k(t, x)$, $u_k(t, x)$ — *ортонормированные собственные векторовы матрицы $A(t, x)$, соответствующие ненулевым собственным значениям $\lambda_k(t, x)$, $k = 1, \ldots, r$.*

Доказательство этой теоремы и вид расширения основного вероятностного пространства вытекает из теоремы 1, следствия 1, леммы 3 и нижеследующей леммы 6.

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_m) \in \mathfrak{M}_c^{(m),\mathrm{loc}}$ и п.в.

$$\langle X_i, X_j \rangle_t = \int_0^t a_{ij}(s)\, ds, \qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{**}$$

где ранг $r(t)$ матрицы $A(t) = \| a_{ij}(t) \|_1^m$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant r' \leqslant r(t) \leqslant r \leqslant m$ п.в. по мере $\mu_1 \times \mathbf{P}$.

---

*) Утверждение теоремы 2, очевидно, сохраняет силу и в том случае, когда $a(t, \cdot)$, $A(t, \cdot)$ и $\Pi(t, \cdot, \Gamma)$ (соответственно, $a(t, \cdot)$, $b_k(t, \cdot)$ и $\varphi(t, \cdot, y)$) являются измеримыми функционалами от $X(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega', \mathscr{F}', \mathbf{P}')$, на котором задан $r-r'$-мерный винеровский процесс, и обозначим

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathbf{P}}) = (\Omega \times \Omega', \mathscr{F} \times \mathscr{F}', \mathbf{P} \times \mathbf{P}').$$

Лемма 6. *При предположении* (* *) *на вероятностном пространстве* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ *можно построить r-мерный винеровский процесс* $w(t) = \left(w_1(t), \ldots, w_r(t)\right)$, *такой, что имеет место представление*:

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=1}^{r} \int_0^t b_k(s)\, dw_k(s),$$

где $b_k(t) = \sqrt{\lambda_k(t)}\, u_k(t)$, $u_k(t)$ — *ортонормированные собственные векторы матрицы* $A(t)$, *соответствующие ненулевым собственным значениям* $\lambda_k(t)$, $k = 1, \ldots, r$.

Доказательство этой леммы аналогично доказателству леммы 1 в [14].

Замечание 1. В случае, когда $\Pi(t, x, \Gamma) \equiv 0$, утверждение теоремы 2 является многомерным аналогом одной теоремы Дж. Л. Дуба ([2], стр. 259) (см. также [6]). Лемма 6 аналогично обобщает другой результат Дж. Л. Дуба ([2], стр. 403).

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы* 2 *и уравнение* (25) *имеет единственное непрерывное справа решение, то случайный процесс* $\left(X(t), t \geqslant 0\right)$ *обладает марковским свойством.*

В заключение отметим еще одно утверждение, вытекающее из леммы 3.

Теорема 3. *Пусть мера скачков p процесса* $X(t)$, $t \geqslant 0$, *удовлетворяет предположению* (*) п. 3, $\Pi(t, \Gamma)$ *не зависит от* ω *и для всех* $t \in (0, \infty)$

$$\int_0^t \int_{|x| \leqslant 1} |x|^2\, \Pi(s, dx)\, ds < \infty.$$

Если, кроме того, существуют функция $a(t) = \left(a_1(t), \ldots, a_m(t)\right)$ *и матрица* $A(t) = \| a_{ij}(t) \|_1^m$, *не зависящие от* ω, *такие, что*

$$\tilde{X}(t) = X(t) - \int_0^t a(s)\, ds - P_g(t) - Q_f(t) \in \mathfrak{M}^{(m),\, \mathrm{loc}}$$

и

$$\langle \tilde{X}_i, \tilde{X}_j \rangle_t = \int_0^t a_{ij}(s)\, ds,$$

то процесс $X(t)$, $t \geqslant 0$, *имеет независимые приращения и*

$$\mathbf{E} \exp\left\{ i \left(X(t), z\right) \right\} = \exp\left\{ i \int_0^t \left(a(s), z\right) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \left(z A(s), z\right) ds + \right.$$
$$+ \int_0^t \int_{|y| \leqslant 1} \left(e^{i(y, z)} - 1 - i(y, z)\right) \Pi(s, dy)\, ds +$$
$$\left. + \int_0^t \int_{|y| > 1} \left(e^{i(y, z)} - 1\right) \Pi(s, dy)\, ds \right\}.$$

Замечание 2. Если условия теоремы 3 выполнены при $a(t)\equiv 0, \Pi(t, \Gamma)\equiv 0$ и $a_{ij}(t)\equiv\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, то процесс $X(t)$, $t\geqslant 0$, является m-мерным винеровским процессом. Это утверждение является известной теоремой П. Леви (см. [2], [5], [18]).

Если же условия теоремы 3 выполнены при

$$a(t)\equiv(\lambda_1, \ldots, \lambda_m),\ A(t)\equiv 0,\ \Pi(t, \{e_k\})\equiv\lambda_k\geqslant 0, \qquad k=1, \ldots, m,$$

и

$$\Pi\left(t, R_m\setminus\bigcup_{k=1}^{m}\{e_k\}\right)\equiv 0,$$

где

$$e_k=(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-k}),$$

то процесс $X(t)$, $t\geqslant 0$, является m-мерным пуассоновским процессом. При $m=1$ аналогичное утверждение другим путем доказано С. Ватанабе в [7].

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
27.I.1970

Литература

1. K. Ito, On stochastic differential equations, Memoirs of Am. Math. Soc., 4 (1951), 1–51. (О стохастических дифференциальных уравнениях, Математика (сб. перев.), 1 : 1 (1957), 78–116.)
2. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
3. P. A. Meyer, A decomposition theorem for supermartingales, Ill. J. Math., 6 (1962), 193–205.
4. P. A. Meyer, Decomposition of supermartingales, The uniqueness theorem, Ill. J. Math., 7(1963), 1–17.
5. H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J., 30 (1967), 209–245.
6. P. A. Meyer, Integrales stochastiques, Séminaire de Probabilités I, Lecture Notes in Math., 39(1967), Springer.
7. S. Watanabe, On discontinuous additive functionals and Lévy measures of Markov processes, Japanese J. Math., 36 (1964), 53–70.
8. K. Ito, On a formula conserning stochastic differentials, Nagoya Math. Journ., 3 (1951) 55–65. (Об одной формуле касающейся стохастических дифференциалов, Математика (сб. перев.), 3:5 (1959), 131–141.)
9. Б. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963.
10. И. И. Гихман, А. Я. Дороговцев, Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений, Укр. матем. ж., **XVII**, 6(1965), 3–21.
11. А. В. Скороход, О локальном строении непрерывных марковских процессов, Теория вероятн. и ее применен., **XI**, 3(1966), 381–423.
12. А. В. Скороход, Однородные марковские процессы без разрывов второго рода, Теория вероятн. и ее применен., **XII**, 2(1967), 258–278.
13. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения, „Наукова думка", Киев, 1968.
14. Б. Григелионис, О марковском свойстве случайных процессов, Лит. матем. сб., **VIII**, 3 (1968), 93–106.
15. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Изд. КГУ, Киев, 1961.

16. G. Maruyama, Continuous Markov processes and stochas tic equations, Rendiconti Circolo Math. Palermo, 4 (1955), 1–43. (Непрерывные марковские процессы и стохастические уравнения, Математика (сб. перев.), 1:2 (1957), 125–159.)
17. Б. Григелионис, Об абсолютно непрерывной замене меры и марковском свойстве случайных процессов, Лит. матем. сб., **IX**, 1 (1969), 57–71.
18. P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement Brownien, Paris, 1948.

APIE ATSITIKTINIŲ MATŲ SU SVEIKOMIS REIKŠMĖMIS IŠREIŠKIMĄ STOCHASTINIAIS INTEGRALAIS PUASONO MATO ATŽVILGIU

B. Grigelionis

Reziumė)

Darbe nagrinėjami atsitiktiniai matai $p(A)$, $A\in\mathscr{B}[0,\infty)\times\mathscr{B}_m$, įgyjantieji tik sveikas neneigiamas reikšmes, ir randamos sąlygos, kada galima sukonstruoti standartinį Puasono matą $\tilde{p}$ tokiu būdu, kad apibrėžtai funkcijai $\varphi(t,x)$ būtų teisinga išraiška:

$$p([0,t]\times\Gamma)=\int_0^t\int_{R_m}\chi_\Gamma\left(\varphi(s,x)\right)\tilde{p}(ds,dx).$$

Gauti rezultatai taikomi rasti sąlygoms, kurioms esant duotas m-matis atsitiktinis procesas yra apibrėžtos stochastinės K. Ito lygties sprendinys. Taip pat rastos sąlygos lokalinių martingalų terminais, kurioms esant duotas m-matis atsitiktinis procesas turi nepriklausomus pokyčius.

ON REPRESENTATION OF INTEGER-VALUED RANDOM MEASURES BY MEANS OF STOCHASTIC INTEGRALS WITH RESPECT TO THE POISSON MEASURE

B. Grigelionis

Summary)

In the paper integer-valued random measures $p(A)$, $A\in\mathscr{B}[0,\infty)\times\mathscr{B}_m$ are examined and conditions, when we can construct the standard Poisson measure $\tilde{p}$ in such a way that for defined function $\varphi(t,x)$ representation

$$p([0,t]\times\Gamma)=\int_0^t\int_{R_m}\chi_\Gamma\left(\varphi(s,x)\right)\tilde{p}(ds,dx)$$

is valid, are obtained. Given results are applied for obtaining conditions when the given m-dimentional stochastic process is a solution of defined stochastic equation of K. Ito. Conditions in the terms of local martingales when the given m-dimentional stochastic process has independent increments are also found.