XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1971

УДК 519.21

ОДНА ЗАДАЧА ТЕОРИИ СУММИРОВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ИНДЕКСОМ

Д. Саас, Б. Фрайер*)

В работе Б. В. Гнеденко [1] изложены связи теории суммирования случайного числа независимых случайных величин с задачами теории массового обслуживания и теории надежности. Здесь рассматривается одна из проблем, поставленных в этой статье.

Пусть $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}, \ldots$ – независимые, одинаково распределенные при каждом n случайные величины $(n=1, 2, \ldots)$. Предположим, что случайные величины ν_n при каждом n принимают лишь целочисленные значения и не зависят от последовательности $\{\xi_{nk}\}$ $k=1, 2, \ldots$ Обозначим

$$S_k^{(n)}=\xi_{n1}+\ldots+\xi_{nk}.$$

В работе [2] доказано следующее предложение.

Предложение 1. Если существует последовательность $\{k_n\}$ целых чисел ($k_n \to \infty$ при $n \to \infty$) и функции распределения $\Phi(x)$ и $A(x)$ таковы, что при $n \to \infty$

$$\text{A.} \quad P(S_{k_n}^{(n)}<x) \to \Phi(x),$$

$$\text{B.} \quad P(\nu_n/k_n<x) \to A(x),$$

то имеет место соотношение

$$\text{C.} \quad P(S_{\nu_n}^{(n)}<x) \to \Psi(x).$$

Функция распределения $\Psi(x)$ определяется через характеристическую функцию

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\, d\Psi(x)=\int_0^{\infty} \varphi^y(t)\, dA(y),$$

где

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\, d\Phi(x).$$

Спрашивается, имеет ли место обратное предложение? Иными словами, если выполняются какие-либо два соотношения из **A**, **B** и **C**, то будет ли также выполняться третье?

* Работа выполнена в течение аспирантуры авторов на кафедре теории вероятностей в Московском Государственном университете.

Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях это действительно так. Так, например, если величины ξ_{nk} при любом n неотрицательны или симметричны и, кроме того, предельные распределения $A(x)$ и $\Phi(x-a)$, где a – действительно, не сводятся к

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при} \quad x>0,\end{cases}$$

то из A и C вытекает B и из B и C вытекает A. Однако, в общем случае пока не удалось доказать без добавочного аналитического предположения, что из B и C следует A. Нам пришлось дополнительно потребовать выполнения условия.

D. Из тождества

$$a\left(\varphi(t)\right)=a\left(\varphi^*(t)\right),$$

где $\varphi(t)$ и $\varphi^*(t)$ безгранично делимые характеристические функции и

$$a(z)=\int_0^\infty Z^y\,dA(y),$$

вытекает, что

$$\varphi(t)=\varphi^*(t).$$

Цель настоящей статьи состоит в доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. *Если условия* A и C *выполнены и* $\Phi(x-a)\not\equiv\varepsilon(x)$ *ни при одном* a, *то выполнено* B.

Теорема 2. *Если выполнены* B, C и D *и* $A(x)\not\equiv\varepsilon(x)$, *то выполнено также* A.

В доказательствах теорем используются понятия сходимости, собственной сходимости и стохастической ограниченности последовательностей функций распределения (случайных величин) в смысле Феллера ([3], VIII, §§ 1–2). Легко доказать следующие леммы (см. [3], V, § 5).

Лемма 1. *Если последовательности случайных величин* $\{X_n\}_n$ *и* $\{Y_n\}_n$ *стохастически ограничены, то и последовательность* $\{X_n+Y_n\}_n$ *стохастически ограничена*).*

Лемма 2. *Если независимые случайные величины* X *и* Y *симметричны, то для любого* x

$$P(|X+Y|>x)\geqslant\frac{1}{2}P(|X|>x).$$

Лемма 3. *Если* X *и* Y *независимые и одинаково распределенные случайные величины, медианы которых равны нулю, то*

$$P(|X-Y|>x)\geqslant\frac{1}{2}P(|X|>x)$$

для любого x.

Перейдем к доказательству теорем.

---

*) Символ $\{\ \}_m$ всегда будет обозначать последовательность по индексу $m=1, 2, \ldots$

Доказательство теоремы 1. Введем следующие обозначения:

$$f_n(t) = Me^{it\xi_{nk}},$$

$$\varphi_k^{(n)}(t) = Me^{itS_k^{(n)}}, \quad \psi_n(t) = Me^{itS_{\nu_n}^{(n)}},$$

$$A_n(x) = P(\nu < x), \quad a_n(z) = \int_0^\infty z^y dA_n(yk_n).$$

Предположим сначала, что последовательность $\{\nu_n/k_n\}_n$ стохастически ограничена. Если при этом последовательность $\{A_n(k_n x)\}_n$ не сходится, то можно выбрать подпоследовательности $\{n'\}$ и $\{n''\}$ индексов таким образом, чтобы

$$A_{n'}(k_{n'}x) \to A(x)$$

и

$$A_{n''}(k_{n''}x) \to A^*(x),$$

где $A(x)$ и $A^*(x)$ — различные функции распределения. Применив к той и другой последовательности предположение 1, получим, что

$$\psi(t) = \int_0^\infty \varphi^y(t)\, dA(y) = \int_0^\infty \varphi^y(t)\, dA^*(y). \tag{1}$$

Приняв во внимание, что $\varphi(t)$ является характеристической функцией невырожденного закона и функции $a(z)$ и $a^*(z) = \int_0^\infty z^y dA^*(y)$ регулярны в области $0 < |z| < 1$, из (1) получаем, что $a(z) = a^*(z)$ для $0 < z < 1$. Значит $A(x) = A^*(x)$. Это противоречит предположению, что $\{A_n(k_n x)\}_n$ не сходится. Итак, B выполняется.

Остается доказать, что $\{\nu_n/k_n\}_n$ стохастически ограничена.

Сначала предположим, что величины $\{\xi_{nk}\}$ распределены симметрично.

Равенство

$$P(|S_{\nu_n}^{(n)}| > x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(|S_k^{(n)}| > x) P(\nu_n = k) \tag{2}$$

вытекает из независимости ν_n от $\{\xi_{nk}\}_k$. Если $\{\nu_n/k_n\}_n$ не стохастически ограничена, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого целого числа r найдется индекс n_r, для которого

$$P\left(\frac{\nu_{n_r}}{k_{n_r}} \geqslant r\right) \geqslant \varepsilon_0. \tag{3}$$

Очевидно, что $n_r \to \infty$, если $r \to \infty$. По условию функции распределения $P(S_{k_{n_r}}^{n_r} < x)$ при $r \to \infty$ сходятся к невырожденной функции распределения и, тем самым, при $r \to \infty$

$$\varphi_{k_{n_r}}^{n_r}(t) \to \varphi(t).$$

Здесь $\varphi(t)$ — характеристическая функция невырожденного закона. Отсюда ясно, что последовательность $\{[\varphi_{k_{n_r}}^{n_r}(t)]^r\}_r$ во всех точках t, в которых $|\varphi(t)| \neq 1$, обязана сходиться к 0. Это означает, что любая ее сходящаяся подпоследовательность не может сходиться к непрерывной функции. Из этого следует, что последовательность функций распределения $P(S^{(n_r)}_{k_{n_r}\cdot r}<x)$ стохастически не ограничена.

Значит, существует число $\varepsilon_1>0$ такое, что для всех x

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} P(|S^{(n_r)}_{k_{n_r}\cdot r}|>x)\geqslant\varepsilon_1. \tag{4}$$

По лемме 2 для $k\geqslant k_{n_r}\cdot r$ имеет место следующее неравенство при всех x

$$P(|S^{(n_r)}_k|>x)\geqslant\frac{1}{2}P(|S^{(n_r)}_{k_{n_r}\cdot r}|>x). \tag{5}$$

Из (2—5) выводим, что для всех x

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} P(|S^{(n_r)}_{\nu_{n_r}}|>x)\geqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\sum_{k\geqslant k_{n_r}\cdot r}P(|S^{(n_r)}_k|>x)P(\nu_{n_r}=k)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\overline{\lim_{r\to\infty}} P(|S^{(n_r)}_{k_{n_r}\cdot r}|>x)P\nu_{n_r}\geqslant k_{n_r}\cdot r)\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_0,$$

что противоречит стохастической ограниченности $\{S^{(n)}_{\nu_n}\}_n$. Итак, в случае симметричных ξ_{nk} утверждение доказано.

Рассмотрим общий случай. Определим для всех n последовательность $\{\eta_{nk}\}_k$ независимых, одинаково распределенных случайных величин так, что

$$P(\eta_{nk}<x)=P(\xi_{nk}<x)$$

и последовательности $\{\xi_{nk}\}_k$ и $\{\eta_{nk}\}_k$ независимы. Пусть

$$G_{nk}=\xi_{nk}-\eta_{nk}.$$

Тогда G_{nk} имеет симметричное распределение. Далее

$$Me^{it(G_{n1}+\ldots+G_{nk_n})}=|\varphi^{(n)}_{k_n}(t))|^2\to|\varphi(t)|^2.$$

По условию $|\varphi(t)|^2$ является характеристической функцией невырожденного закона. Вместе с $\{S^{(n)}_{\nu_n}\}_n$ и $\{\eta_{n1}+\ldots+\eta_{n\nu_n}\}_n$ по лемме 1 стохастически ограничена и последовательность $\{G_{n1}+\ldots+G_{n\nu_n}\}_n$. Когда мы доказывали утверждение в симметричном случае, мы использовали лишь стохастическую ограниченность последовательности $\{S^{(n)}_{\nu_n}\}_n$. Поэтому можно применить доказанное утверждение к случайным величинам $\{G_{nk}\}$. В результате получим стохастическую ограниченность последовательности $\{\nu_n/k_n\}_n$.

Доказательство теоремы 2. Предположим сначала, что последовательность $\{S^{(n)}_{k_n}\}_n$ стохастически ограничена. Если при этом последовательность $\{P(S^{(n)}_{k_n}<x)\}_n$ не сходится, то можно выбрать последовательности $\{n'\}$ и $\{n''\}$ индексов таким образом, чтобы

$$P(S^{(n')}_{k_{n'}}<x)\to\Phi(x)$$

и

$$P(S^{(n'')}_{k_{n''}}<x)\to\Phi^*(x),$$

где $\Phi(x)$ и $\Phi^*(x)$ – различные функции распределения с соответствующими им характеристическими функциями $\varphi(t)$ и $\varphi^*(t)$. Применив к той и другой последовательности предложение 1, получаем, что для всех t

$$\psi(t)=\int_0^\infty \left(\varphi(t)\right)^y dA(y)=\int_0^\infty \left(\varphi^*(t)\right)^y dA(y).$$

Из классической теории суммирования следует, что $\varphi(t)$ и $\varphi^*(t)$ безгранично делимы. Так как по условию **D** $\varphi(t)\equiv\varphi^*(t)$, то утверждение **A** выполняется.

Остается доказать, что последовательность $\{S_{k_n}^{(n)}\}_n$ стохастически ограничена. Для этого понадобится лишь стохастическая ограниченность $\{S_{\nu_n}^{(n)}\}_n$.

Предположим сначала, что случайные величины $\{\xi_{nk}\}$ симметрично распределены. Из условия, наложенного на $A(x)$, следует, что существуют числа $\varepsilon>0$ и $b>0$ такие, что для достаточно больших n имеет место соотношение

$$P\left(\frac{\nu_n}{k_n}\geqslant b\right)\geqslant\alpha. \tag{7}$$

Заметим, что $\{S_{k_n}^{(n)}\}_n$ тогда и только тогда стохастически ограничена, когда последовательность $\{S_{[bk_n]}^{(n)}\}_n$ стохастически ограничена. Действительно, если одна из данных последовательностей, скажем, $\{S_{k_n}^{(n)}\}_n$ стохастически неограничена, то из нее можно выбрать подпоследовательность $\{S_{k_{n'}}^{(n')}\}_{n'}$, такую, что характеристические функции $\varphi_{k_{n'}}^{(n')}(t)=f_{n'}^{k_{n'}}(t)$ сходятся к пределу, не являющемуся непрерывным. Но тогда и предел

$$\lim_{n\to\infty} f_{n'}^{[bk_{n'}]}(t)$$

не непрерывный, значит последовательность $\{S_{[bk_n]}^{(n)}\}_n$ не может быть стохастически ограничена.

Если $\{S_{k_n}^{(n)}\}_n$ и, тем самым, $\{S_{[bk_n]}^{(n)}\}_n$ не стохастически ограничены, то существует число $\varepsilon_0>0$ такое, что для всех x

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P\left(|S_{[bk_n]}^{(n)}|>x\right)>\varepsilon_0. \tag{8}$$

На основании леммы 2 для $k\geqslant[bk_n]$ имеет место неравенство

$$P\left(|S_k^{(n)}|>x\right)\geqslant\frac{1}{2}\,P\left(|S_{[bk_n]}^{(n)}|>x\right) \tag{9}$$

при всех x. Из (2), (7), (8) и (9) получим следующие оценки:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P\left(|S_{\nu_n}^{(n)}|>x\right)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k\geqslant[bk_n]} P\left(|S_k^{(n)}|>x\right)P(\nu_n=k)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P\left(|S_{[bk_n]}^{(n)}|>x\right)P\left(\nu_n\geqslant[bk_n]\right)\geqslant\frac{1}{2}\,\alpha\varepsilon_0$$

при всех x, что противоречит стохастической ограниченности $\{S_{\nu_n}^{(n)}\}_n$. Итак, в случае симметричных ξ_{nk} утверждение доказано.

Обратимся теперь к общему случаю, и определим случайные величины $\{\eta_{nk}\}$, как в доказательстве теоремы 1. По лемме 1 $\{G_{n1}+\ldots+G_{n\nu_n}\}_n$ стохастически ограничена и из только что доказанного следует стохастическая ограниченность $\{G_{n1}+\ldots+G_{nk_n}\}_n$. Обозначим медиану случайной величины $S_{k_n}^{(n)}$ через m_n. Согласно лемме 3

$$P(|G_{n1}+\ldots+G_{nk_n}|>x)\geqslant\frac{1}{2}P(|S_{k_n}^{(n)}-m_n|>x),$$

откуда вытекает стохастическая ограниченность $\{S_{k_n}^{(n)}-m_n\}_n$. Остается доказать, что последовательность $\{m_n\}_n$ ограничена.

Пусть

$$\tilde{\xi}_{nk}=\xi_{nk}-\frac{m_n}{k_n}.$$

Из того, что последовательность $\{\tilde{\xi}_{n1}+\ldots+\tilde{\xi}_{nk_n}\}_n$ стохастически ограничена и из условия **B** на основании предложения 1 следует стохастическая ограниченность

$$\left\{\tilde{\xi}_{n1}+\ldots+\tilde{\xi}_{n\nu_n}=S_{\nu_n}^{(n)}-\frac{\nu_n}{k_n}m_n\right\}_n.$$

Применив лемму 1 к последовательностям

$$X_n=S_{\nu_n}^{(n)}$$

и

$$Y_n=-\left(S_{\nu_n}^{(n)}-\frac{\nu_n}{k_n}m_n\right),$$

получим, что $\left\{\frac{\nu_n}{k_n}m_n\right\}_n$ стохастически ограничена. Из того что предельное распределение случайных величин ν_n/k_n не сосредоточено в нуле, вытекает, что $\{m_n\}_n$ ограничена. Теорема доказана.

Замечание. Условие D всегда выполняется, если функция $a(z)$ имеет обратную в единичном круге функцию, как например в очень интересном случае показательного распределения $A(x)$, т. к.

$$a(z)=\frac{\lambda}{\lambda-\log z}.$$

Далее, легко доказать, что условие D верно, если $\int\limits_0^\infty x\,dA(x)<\infty$ и распределение $A(x)$ — арифметическое (или функции φ и φ^* — аналитические безгранично-делимые). Также имеет место следующее практически важное предложение.

Предложение 2. Если случайные величины ξ_{nk} неотрицательны или симметричны, то утверждение теоремы 2 верно без добавочного условия D.

Доказательство. Употребляем обозначения предыдущих доказательств. Если случайные слагаемые ξ_{nk} симметрично распределены, то все характеристические функции сумм $S_k^{(n)}$ действительны. Если величины ξ_{nk} — неотрицательны, то докажем теорему 2 с помощью преобразования Лапласа. Значит, функции $\varphi(t)$ и $\varphi^*(t)$ в тождестве (6) — действительны и $\varphi(t),\ \varphi^*(t)\in(0,1]$.

Так как функция $a(z)$ монотонна на интервале $(0, 1]$, из (6) следует $\varphi(t) = \varphi^*(t)$. Предложение доказано.

Авторы выражают благодарность Б. В. Гнеденко за постановку задачи, обсуждение и оформление результатов.

Московский Государственный университет

Берлин – Будапешт

Поступило в редакцию 11.V.1970

Литература

1. Б. В. Гнеденко, О связи теории суммирования независимых случайных величин с задачами теории массового обслуживания и теории надежности, REVUE ROUMAINE, MATH. PURES ET APPL., 12 (1967), 1243–1253.
2. Б. В. Гнеденко, Х. Фахим, Об одной теореме переноса, ДАН СССР, 187, 1 (1969), 15–17.
3. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 2, Москва, 1967.

VIENAS SUMAVIMO SU ATSITIKTINIU INDEKSU TEORIJOS UŽDAVINYS

D. Sasas, B. Frajeris

(*Reziumė*)

Nagrinėjamas nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų ribinis elgesys, kai dydžių skaičius atsitiktinis ir nepriklausąs nuo dydžių. Buvo žinomas teiginys: jeigu neatsitiktinio skaičiaus dydžių suma ir atitinkamai normuotas atsitiktinis indeksas turi ribinius pasiskirstymus, tai atsitiktinio skaičiaus dydžių suma taip pat konverguoja. Darbe nagrinėjami kai kurie šio teiginio apibendrinimai.

ON THE SUMS OF A RANDOM NUMBER OF RANDOM VARIABLES

D. Szász, B. Freyer

(*Summary*)

For every n let $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}, \ldots$ be independent, identically distributed random variables and ν_n is a random index, which is independent of the ξ_{nk}'s. Denote $S_k^{(n)} = \xi_{n1} + \ldots + \xi_{nk}$. Two converses of a theorem of Gnedenko and Fahim are proved, namely:

Theorem 1. *If there exists a sequence* $\{k_n\}_n$ *of integers* ($k_n \to \infty$), *such that conditions* A *and* C *are satisfied, then* B *is also valid.*

Theorem 2. *If there exists a sequence* $\{k_n\}_n$ *of integers* ($k_n \to \infty$) *such that contitions* B *and* C *are satisfied, and for arbitrary pair of infinitely divisible characteristic functions* $\varphi(t)$ *and* $\varphi^*(t)$ *from the identity*

$$\int_0^\infty [\varphi(t)]^y \, dA(y) \equiv \int_0^\infty [\varphi^*(t)]^y \, dA(y)$$

the identity

$$\varphi(t) \equiv \varphi^*(t)$$

follows, then A is also valid.