XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971

УДК 517. 53

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ПУАССОНА—ИЕНСЕНА С ДВОЙНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

В. П. Кабайла

1. Пусть $u(z)=u(r, \Theta)$ – гармоническая функция точки $z=re^{i\Theta}$ в круге $|z|<R\,(R>1)$. Известно, что для всех λ, $\lambda=\rho e^{i\varphi}$, $\rho<1$, справедлива формула Пуассона [1]:

$$u(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\Theta})\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\Theta-\varphi)}\,d\Theta=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} u(z)\,\frac{1-|\lambda|^2}{|1-\bar{\lambda}z|^2}\,ds \tag{1}$$

(последний интеграл – криволинейный по единичной окружности). Заметим, что формула (1) остается справедливой и в том случае, когда функция $u(z)$ гармонична только в круге $|z|<1$ и имеет в точках $e^{i\Theta}$ предельные значения $u(e^{i\Theta})$, которые обращаются в бесконечность в конечном числе точек отрезка $[0, 2\pi]$ так, что при этом выполняются условия обобщенной непрерывности и несобственный интеграл Римана $\int_0^{2\pi}|u(e^{i\Theta})|\,d\Theta$ сходится [2].

В настоящей статье доказывается, что для любой гармонической и интегрируемой в круге $|z|<1$ в смысле несобственного двойного интеграла Римана функции $u(z)$ справедливо равенство (аналог формулы Пуассона):

$$u(\lambda)=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1} u(z)\,\frac{(1-|\lambda|^2)^2}{|1-\bar{\lambda}z|^4}\,dS_z \tag{2}$$

(dS_z – элемент площади) для всех точек λ единичного круга $|z|<1$.

В дальнейшем тексте все двойные интегралы определяются как несобственные двойные интегралы в смысле Римана [3].

С помощью формулы (2) в статье доказывается, что для любой мероморфной в круге $|z|<R$ функции $f(z)$ любого ρ, $0<\rho<R$, и любого λ, $|\lambda|<\rho$, справедливо равенство (аналог формулы Пуассона – Иенсена):

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<\rho}\ln|f(z)|\,\rho^2\frac{(\rho^2-|\lambda|^2)^2}{|\rho^2-\bar{\lambda}z|^4}dS_z=\ln|c_\nu|+\nu\ln(\rho^2-|\lambda|^2)-\frac{\nu}{2}(1+\ln\rho^2)-$$
$$-\frac{1}{2}\ln\prod_{k=1}^{n(\rho)}\rho^2\left|\frac{\lambda_k-\lambda}{1-\bar{\lambda}_k\lambda}\right|^2\exp\left(1-\rho^2\left|\frac{\lambda_k-\lambda}{1-\bar{\lambda}_k\lambda}\right|^2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\ln\prod_{k=1}^{m(\rho)}\rho^2\left|\frac{\mu_k-\lambda}{1-\bar{\mu}_k\lambda}\right|^2\exp\left(1-\rho^2\left|\frac{\mu_k-\lambda}{1-\bar{\mu}_k\lambda}\right|^2\right), \tag{3}$$

где c_ν — первый неравный нулю коэффициент разложения в ряд Лорана в окрестности точки $z=\lambda$ функции $f(z)$:

$$f(z)=\sum_{k=\nu}^{\infty} c_k (z-\lambda)^k, \quad |z-\lambda|<1-|\lambda|, \quad \nu \lesseqgtr 0, \tag{4}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n(\rho)}$ — все не равные λ нули функции $f(z)$, принадлежащие кругу $|z|\leqslant\rho$, и $\mu_1, \ldots, \mu_{m(\rho)}$ — все не равные λ полюсы функции $f(z)$, принадлежащие кругу $|z|\leqslant\rho$. Кроме того, доказывается, что для аналитической в единичном круге функции $f(z)$ равенство

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1} \ln|f(z)| \frac{(1-|\lambda|^2)^2}{(1-\bar{\lambda}z)^4}\, dS_z = \ln\left|\frac{f^{(\nu)}(\lambda)}{\nu!}\right| +$$

$$+\nu\ln(1-|\lambda|^2)-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}\ln\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_k-\lambda}{1-\bar{\lambda}_k\lambda}\right|^2 \exp\left(1-\left|\frac{\lambda_k-\lambda}{1-\bar{\lambda}_k\lambda}\right|^2\right) \tag{5}$$

справедливо (при этом интеграл и бесконечное произведение в (5) сходится) тогда и только тогда, когда удовлетворено условие:

$$\iint\limits_{|z|<1} \ln^+|f(z)|\, dS_z<\infty. \tag{6}$$

Из формулы (5) и других соображений получается, что нули $\{\lambda_k\}$ аналитической в единичном круге функции $f(z)$, для которой выполняется (6) (функции класса A'), удовлетворяют условию:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)^2<\infty, \tag{7}$$

а последовательность $\{\lambda_k\}$ нулей функции, принадлежащей классу H'_p, $p>0$, [4], имеет показатель сходимости, не превышающий единицы, и удовлетворяет неравенству:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|\lambda_{k+1}|-|\lambda_k|)\,|\lambda_k|^{kp}\exp\left[p\sum_{j=1}^{k}(1-|\lambda_j|)\right]<\infty. \tag{8}$$

2. Пусть λ — точка круга $|z|<1$. Функция $T(z)=\dfrac{\lambda-z}{1-\bar{\lambda}z}$, очевидно, однолистно отображает круг $|z|\leqslant 1$ в себя, $T'(z)=\dfrac{|\lambda|^2-1}{(1-\bar{\lambda}z)^2}$ и $T^{-1}(z)\equiv T(z)$. Заметим, что если функция $u(z)$ — гармоническая в единичном круге, то сложная функция $u(T(z))$ тоже гармоническая в единичном круге.

Теорема 1. *Пусть функция $u(z)$ — гармоническая в круге $|z|<1$. Для того, чтобы было справедливо равенство* (2) *при любых λ, $|\lambda|<1$, необходимо и достаточно, чтобы функция $u(z)$ была интегрируема в круге $|z|<1$ (в смысле несобственного двойного интеграла Римана).*

Доказательство. Покажем, что из интегрируемости функции $u(z)$ в круге $|z|<1$ следует сходимость интеграла:

$$\iint\limits_{|z|<1} \left|u\big(T(z)\big)\right| dS_z. \tag{9}$$

Для этого сделаем замену $\zeta=T(z)$ в (9):

$$\iint\limits_{|z|<1} \left|u\big(T(z)\big)\right| dS_z = \iint\limits_{|\zeta|<1} |u(\zeta)| \frac{(1-|\lambda|^2)^2}{|1-\bar\lambda\zeta|^4} dS_\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}\right)^2 \iint\limits_{|\zeta|<1} |u(\zeta)|\, dS_\zeta < \infty,$$

так как из сходимости несобственного двойного интеграла Римана следует абсолютная сходимость этого интеграла. Кроме того, так как $u(T(z))$ — гармоническая, то

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z|<1} u\big(T(z)\big)\, dS_z = \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\rho r\,dr \int\limits_0^{2\pi} u\Big(T(re^{i\Theta})\Big)\, d\Theta = u\big(T(0)\big) = u(\lambda).$$

Произведя замену $\zeta=T(z)$ в двойном интеграле левой части последнего равенства, получаем равенство (2).

Если, наоборот, $u(z)$ — произвольная функция и справедливо (2), то

$$\iint\limits_{|z|<1} |u(z)| \frac{(1-|\lambda|^2)^2}{|1-\bar\lambda z|^4} dS_z \geqslant \left(\frac{1-|\lambda|}{1+|\lambda|}\right)^2 \iint\limits_{|x|<1} |u(z)|\, dS_z$$

и, следовательно, $u(z)$ — интегрируема.

Следствие 1. *Если* $u(z)$ — *гармоническая и интегрируема в круге* $|z|<\rho$, *то в точках* λ, $|\lambda|<\rho$, *справедливо равенство*:

$$u(\lambda) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<\rho} u(\zeta)\, \rho^2 \frac{(\rho^2-|\lambda|^2)^2}{|\rho^2-\bar\lambda\zeta|^4} dS_\zeta. \tag{10}$$

Это равенство получается из (2), записанного для функции $u(\rho z)$, заменой $\zeta=\rho z$.

Следствие 2. *Если* $f(z)$ — *аналитическая в круге* $|z|<\rho$ *функция и* $\iint\limits_{z|<\rho} |f(z)|\, dS_z < \infty$, *то для любого* λ, $|\lambda|<\rho$, *справедливо равенство*:

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z|<\rho} f(z)\, \rho^2 \frac{(\rho^2-|\lambda|^2)^2}{|\rho^2-\bar\lambda z|^4} dS_z. \tag{11}$$

3. Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в круге $|z|<R$ и пусть $\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{\nu}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность нулей $f(z)$ ($\nu\geqslant 0$, $0<|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots$). Пусть $n(\rho)$ — число точек последовательности $\{\lambda_k\}$ в круге $|z|\leqslant\rho$, $\rho<R$ и

$$b_{n(\rho)}(z) = z^\nu \prod_{k=1}^{n(\rho)} \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k} \frac{R(\lambda_k-z)}{R^2-\bar\lambda_k z}.$$

Очевидно, функция $F_\rho(z)=\frac{f(z)}{b_{n(\rho)}(z)}$ — аналитическая в круге $|z|<R$ и не равна нулю в некотором круге $|z|<R_1$, где $\rho<R_1<R$.

Лемма 1. *Если функция* $f(z)$ *— аналитическая в круге* $|z|<R$ *и* $\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{\nu}$, λ_1, $\lambda_2, \ldots$ *— последовательность нулей функции* $f(z)$ $(\nu\geqslant 0, 0<|\lambda_1|\leqslant \leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots)$, *то для любого* ρ, $0<\rho<R$, *справедливо равенство*:

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln|f(z)|\,dS_z=$$

$$=\ln\left|\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}\right|-\frac{\nu}{2}\left(1-\ln\rho^2\right)-\frac{1}{2}\ln\prod_{k=1}^{n(\rho)}\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\exp\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right). \qquad (12)$$

Доказательство. Функция $\ln\left|\frac{f(z)}{b_{n(\rho)}(z)}\right|$ — гармоническая и непрерывная в круге $|z|\leqslant\rho$, поэтому по формуле (11):

$$\left[\ln\left|\frac{f(z)}{b_{n(\rho)}(z)}\right|\right]_{z=0}=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln\left|\frac{f(z)}{b_{n(\rho)}(z)}\right|dS_z.$$

Замечая, что интегралы

$$\iint\limits_{|z|<\rho}\ln\left|\frac{R(\lambda_k-z)}{R^2-\bar{\lambda}_k z}\right|dS_z \quad \text{и} \quad \iint\limits_{|z|<\rho}\ln|f(z)|\,dS_z$$

сходятся, а

$$f(z)=c_\nu z^\nu+c_{\nu+1}z^{\nu+1}+\cdots, \quad |z|<1,$$

получаем:

$$\ln|c_\nu|-\sum_{k=1}^{n(\rho)}\ln|\lambda_k|+n(\rho)\ln R=$$

$$=\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln|f(z)|\,dS_z-\frac{\nu}{\pi\rho^2}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln|z|\,dS_z-$$

$$-\sum_{k=1}^{n(\rho)}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln\left|\frac{R(\lambda_k-z)}{R^2-\bar{\lambda}_k z}\right|dS_z. \qquad (13)$$

Очевидно,

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln|z|\,dS_z=-\frac{1}{2}\left(1-\ln\rho^2\right). \qquad (14)$$

Последний интеграл в равенстве (13) вычисляется так:

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln\left|\frac{R(\lambda_k-z)}{R^2-\bar\lambda_k z}\right|dS_z=$$

$$=\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{|z|<|\lambda_k|}\ln\left|\frac{R(\lambda_k-z)}{R^2-\bar\lambda_k z}\right|dS_z+\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{|\lambda_k|<|z|<\rho}\ln\left|\frac{R(\lambda_k-z)}{P^2-\bar\lambda_k z}\right|dS_z=$$

$$=\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\ln\frac{|\lambda_k|}{R}+\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi\rho^2}\int\limits_{|\lambda_k|+\varepsilon}^{\rho}rdr\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|\frac{R(\lambda_k-re^{i\Theta})}{R^2-\bar\lambda_k re^{i\Theta}}\right|d\Theta.$$

Последний интеграл в этом равенстве вычисляется с помощью формулы Пуассона–Иенсена [1], именно, для $|\lambda_k|<r<R$ получается:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|\frac{R(\lambda_k-re^{i\Theta})}{R^2-\bar\lambda_k e^{i\Theta}}\right|d\Theta=\ln\frac{r}{R},$$

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\int\limits_{|\lambda_k|}^{\rho}rdr\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|\frac{R(\lambda_k-re^{i\Theta})}{R^2-\bar\lambda_k e^{i\Theta}}\right|d\Theta=\ln\frac{\rho}{R}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right)-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\ln\frac{|\lambda_k|}{R}$$

и

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln\left|\frac{R(\lambda_k-z)}{R^2-\bar\lambda_k z}\right|dS_z=\ln\frac{\rho}{R}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right). \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в (13), получаем (12).

Лемма 2. *Если функция $f(z)$ — аналитическая в круге $|z|<1$, ν $(\nu\geqslant 0)$ — кратность нуля функции $f(z)$ в точке $z=0$ и $\{\lambda_k\}$ — последовательность нулевых точек функции $f(z)$, не совпадающих с точкой $z=0$, то существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|>\rho}\ln|f(z)|\,dS_z$$

и

$$\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln|f(z)|\,dS_z=\ln\left|\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}\right|-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|^2+\ln|\lambda_k|^2)=$$

$$=\ln\left|\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}\right|-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}\ln\prod_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2\exp(1-|\lambda_k|^2). \tag{16}$$

Доказательство. По лемме 1для функции $f(z)$ и любого ρ, $0<\rho<1$, справедливо равенство (12). Правая часть равенства (12) монотонно возрастает при возрастании ρ, так как

$$-\ln\left[\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\exp\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right)^3+\cdots$$

Следовательно, существует конечный или бесконечный предел правой и левой частей равенства (12) и

$$\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln|f(z)|\,dS_z=$$

$$=\ln\left|\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}\right|-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\lim_{\rho\to 1}\left[-\sum_{k=1}^{n(\rho)}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}+\ln\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right]\right. . \qquad (17)$$

Пусть $\varepsilon>0$. Если ряд в формуле (16) сходится, то для любых ρ и ρ_1, $0<\rho_1<\rho<1$, будут справедливы неравенства:

$$0\leqslant-\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|^2+\ln|\lambda_k|^2)+\sum_{k=1}^{n(\rho)}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}+\ln\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant-\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|^2+\ln|\lambda_k|^2)+\sum_{k=1}^{n(\rho_1)}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}+\ln\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n(\rho_1)}\left[(1-|\lambda_k|^2+\ln|\lambda_k|^2)-\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}+\ln\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right)\right]\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=n(\rho_1)+1}^{\infty}(1-|\lambda_k|^2+\ln|\lambda_k|^2)\right| .$$

Из сходимости ряда (16) следует, что существует такой ρ_1, $0<\rho_1<1$, что

$$\left|\sum_{k=n(\rho_1)+1}^{\infty}(1-|\lambda_k|^2+\ln|\lambda_k|^2)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть ρ_1 выбран так, чтобы выполнялось последнее неравенство. Тогда существует такой ρ_2, $\rho_1<\rho_2<1$, что неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n(\rho_1)}\left[(1-|\lambda_k|^2+\ln|\lambda_k|)-\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}+\ln\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right)\right]\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

выполняется, если только $\rho_2<\rho<1$. Следовательно,

$$\lim_{\rho\to 1}\sum_{k=1}^{n(\rho)}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}+\ln\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|^2+\ln|\lambda_k|^2).$$

Если ряд в (16) расходится, то для любого положительного числа K существует такой ρ_1, $0<\rho_1<1$, что

$$-\sum_{k=1}^{n(\rho_1)}(1-|\lambda_k|^2+\ln|\lambda_k|^2)>2K.$$

Следовательно, найдется такой ρ_2, $\rho_1<\rho_2>1$, чтобы выполнялось неравенство

$$-\sum_{k=1}^{n(\rho_1)}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho_2^2}+\ln\frac{|\lambda_k|^2}{\rho_2^2}\right)>K.$$

Тем более будет справедливо неравенство:

$$-\sum_{k=1}^{n(\rho_2)}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho_2^2}+\ln\frac{|\lambda_k|^2}{\rho_2^2}\right)>K,$$

т.е.

$$\lim_{\rho\to 1}\left[-\sum_{k=1}^{n(\rho)}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}+\ln\frac{|\lambda_k|^2}{\rho^2}\right)\right]=+\infty.$$

Таким образом, равенство (16) доказано.

Замечание. В равенстве (16) нулевые точки λ_k функции $f(z)$ можно считать пронумерованными в произвольном порядке, так как члены ряда в формуле (16) имеют одинаковые знаки и, следовательно, ряд (16) обладает переместительным свойством.

Следствие 1. *Для того, чтобы предел* $\lim\limits_{\rho\to 1-0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln|f(z)|\,dS_z$ *был конечным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)^2<\infty. \tag{18}$$

Действительно,

$$\lim_{|\lambda_k|\to 1}\frac{-(1-|\lambda_k|^2+\ln|\lambda_k|^2)}{(1-|\lambda_k|)^2}=2,$$

поэтому ряды (16) и (18) оба сходятся или оба расходятся.

Определение. *Классом A' будем называть класс аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, для которых*

$$\iint\limits_{|z|<1}\ln^+|f(z)|\,dS_z<\infty.$$

Следствие 2. *Если $f(z)\in A'$, то последовательность нулей $\{\lambda_k\}$ функции $f(z)$ удовлетворяет условию* (18).

Это утверждение следует из следствия 1 и неравенства:

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\Big|\ln|f(z)|\Big|\,dS_z=$$

$$=\frac{2}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\ln^+|f(z)|\,dS_z-\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<\rho}\ln|f(z)|\,dS_z\leqslant$$

$$\leqslant 2\iint\limits_{|z|<1}\ln^+|f(z)|\,dS_z-\ln\left|\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}\right|+\frac{\nu}{2}<\infty.$$

Теорема 2. *Если функция $f(z)$, $f(z)\not\equiv 0$ — мероморфна в круге $|z|<R$, числа ρ и λ удовлетворяют неравенствам $0\leqslant|\lambda|<\rho<R$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n(\rho)}$ — не равные числу λ нули функции $f(z)$, принадлежащие кругу $|z|\leqslant\rho$, и $\mu_1, \ldots, \mu_{m(\rho)}$ — не равные числу λ полюсы функции $f(z)$, принадлежащие кругу $|z|\leqslant\rho$, то справедливо равенство* (3), *где c_ν и ν определяются равенством* (4).

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f(z)$ — аналитическая (регулярная) в круге $|z|<R$.

Пусть $T_\rho(\zeta)=\rho^2\dfrac{\lambda-\zeta}{\rho^2-\bar\lambda\zeta}$. Очевидно, $z=T_\rho(\zeta)$ отображает однолистно круг $|\zeta|\leqslant\rho$ в круг $|z|\leqslant\rho$, $\dfrac{d}{d\zeta}T_\rho(\zeta)=\rho^2\dfrac{|\lambda|^2-\rho^2}{(\rho^2-\bar\lambda\zeta)^2}$ и $T_\rho^{-1}(\zeta)\equiv T_\rho(\zeta)$.

Функция $f(T_\rho(\zeta))$ будет аналитической в некотором круге $|\zeta|<R_1$ с радиусом $R_1>\rho$. Определим точки α_k равенством $\lambda_k=T_\rho(\alpha_k)$. Тогда $\alpha_k=T_\rho(\lambda_k)$ и нули функции $f(T_\rho(\zeta))$ в круге $|\zeta|<\rho$ будут $\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{\nu}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n(\rho)}$ ($\alpha_k\neq 0$, $\nu\geqslant 0$). По лемме 1, для функции $f(T_\rho(\zeta))$ справедливо равенство (12):

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\ln|f(T_\rho(\zeta))|\,dS_\zeta=\ln\left|\frac{\left[\frac{d^\nu}{d\zeta^\nu}f(T_\rho(\zeta))\right]_{\zeta=0}}{\nu!}\right|-$$
$$-\frac{\nu}{2}(1-\ln\rho^2)-\frac{1}{2}\ln\prod_{k=1}^{n(\rho)}\frac{|\alpha_k|^2}{\rho^2}\exp\left(1-\frac{|\alpha_k|^2}{\rho^2}\right). \tag{19}$$

Произведя замену $z=T_\rho(\zeta)$ в интеграле

$$\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\ln|f(T_\rho(\zeta))|\,dS_\zeta,$$

подставляя $\alpha_k=T_\rho(\lambda_k)$ и замечая, что

$$\frac{d^\nu}{d\zeta^\nu}f(T_\rho(\zeta))\Big|_{\zeta=0}=f^{(\nu)}(\lambda)\cdot\left[\frac{d}{d\zeta}T_\rho(\zeta)\right]^\nu_{\zeta=0}=f^{(\nu)}(\lambda)\left(\frac{|\lambda|^2}{\rho^2}-1\right),$$

из (19) получаем равенство (3) для рассматриваемого случая.

Рассмотрим случай, когда $f(z)$ — мероморфна в круге $|z|<R$. Функцию $f(z)$, очевидно, можно записать в виде отношения двух аналитических в круге $|z|<R$ функций $g(z)$ и $h(z)$:

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}.$$

Тогда $\ln|f(z)|=\ln|g(z)|-\ln|h(z)|$ и доказательство равенства (3) в общем случае сводится к применению доказанного равенства для аналитических функций $g(z)$ и $h(z)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в круге $|z|<1$, λ — точка круга $|z|<1$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность нулей функции $f(z)$ в круге $|z|<1$, не совпадающих с точкой λ, и ν ($\nu\geqslant 0$) — кратность нуля в точке $z=\lambda$. Для того, чтобы было справедливо равенство* (5), *необходимо и достаточно, чтобы $f\in A'$.*

Доказательство. Пусть

$$T(\zeta)=\frac{\lambda-\zeta}{1-\bar{\lambda}\zeta}, \quad \alpha_k=T(\lambda_k)=T^{-1}(\lambda_k).$$

Заметим, что если $f\in A'$, то

$$\iint\limits_{|\zeta|<1} \ln^+\left|f\big(T(\zeta)\big)\right| dS_\zeta=\iint\limits_{|z|<1} \ln^+|f(z)|\,\frac{(1-|\lambda|^2)^2}{|1-\bar{\lambda}z|^4}dS_z\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}\right)^2\iint\limits_{|z|<1} \ln^+|f(z)|\,dS_z<\infty,$$

т. е. функция $g(\zeta)=f\big(T(\zeta)\big)$ принадлежит классу A'. Из леммы 2 получается, что

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \ln\left|f\big(T(\zeta)\big)\right| dS_\zeta=$$

$$=\ln\left|\frac{\left[\frac{d^\nu}{d\zeta^\nu}f\big(T(\zeta)\big)\right]_{\zeta=0}}{\nu!}\right|-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2+\ln|\alpha_k|^2).$$

Произведя замену $z=T(\zeta)$ в двойном интеграле, подставляя $T(\lambda_k)$ вместо α_k и замечая, что

$$\left[\frac{d^\nu}{d\zeta^\nu}f\big(T(\zeta)\big)\right]_{\zeta=0}=f^{(\nu)}(\lambda)\,[T'(0)]^\nu=f^{(\nu)}(\lambda)\,(|\lambda|^2-1)^\nu,$$

после элементарных преобразований получаем равенство (5).

Следствие. Если $f(z)\in A'$, то для любой точки λ единичного круга справедливо неравенство:

$$|f(\lambda)|\leqslant e^{\frac{4A'(f)}{(1-|\lambda|)^2}}, \quad \text{где} \quad A'(f)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1} \ln^+|f(z)|\,dS_z. \tag{20}$$

Действительно, из равенства (5) в случае $f(\lambda)\neq0$ получается:

$$\ln|f(\lambda)|\leqslant\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1} \ln|f(z)|\,\frac{(1-|\lambda|^2)^2}{|1-\bar{\lambda}z|^4}\,dS_z\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}\right)^2\cdot\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<1} \ln^+|f(z)|\,dS_z,$$

откуда следует (20).

4. Из леммы 2, как было замечено (следствие 2), получается: если $f(z)\in A'$, то последовательность $\{\lambda_k\}$ нулевых точек функции $f(z)$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)^2<\infty$. Следующая теорема указывает необходимые условия, которым должны удовлетворять нулевые точки функции класса H_p', $p>0$ $\Big(H_p'$ — класс аналитических в единичном круге функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\iint\limits_{|z|<1}|f(z)|^p\,dS_z<\infty$ [4]$\Big)$.

Теорема 4. *Последовательность* $\{\lambda_k\}$ *нулевых точек функции* $f(z)$, $f(z)\in H_p'$, $p>0$, *имеет показатель сходимости* μ, *не превышающий единицу* $\left(\text{т. е. для любого } \varepsilon>0 \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)^{1+\varepsilon} \text{ сходится}\right)$ *и удовлетворяет неравенству*:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|\lambda_{k+1}|-|\lambda_k|)|\lambda_k|^{kp}\exp\left[p\sum_{j=1}^{k}(1-|\lambda_j|)\right]<\infty.$$

Доказательство. Пусть последовательность $\overbrace{0,\ldots,0}^{\nu}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(\nu\geqslant 0)$ нулевых точек функции $f(z)$ пронумерована в порядке возрастания модулей, $n(r)$ — число точек λ_k $(\lambda_k\neq 0)$ в круге $|z|\leqslant r$ и

$$N(r)=\int_0^r\frac{n(t)}{t}\,dt+\nu\ln r=\ln\prod_{k=1}^{n(r)}\frac{r}{|\lambda_k|}+\nu\ln r. \tag{21}$$

Вводим обозначение:

$$b(z,r)=\left(\frac{z}{r}\right)^{\nu}\prod_{k=1}^{n(r)}\frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\,\frac{r(\lambda_k-z)}{r^2-\bar{\lambda}_k z},$$

если $|\lambda_1|\leqslant r<1$, и $b(z,r)=\left(\frac{z}{r}\right)^{\nu}$, если $r<|\lambda_1|$. Для любого r, $0<r<1$, в круге $|z|\leqslant r$ функция $\left|\frac{f(z)}{b(z,r)}\right|^p (p>0)$ — субгармоническая и $|b(re^{i\Theta},r)|\equiv 1$, поэтому

$$\left[\left|\frac{f(z)}{b(z,r)}\right|^p\right]_{z=0}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(re^{i\Theta})}{b(re^{i\Theta},r)}\right|^p d\Theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^p\,d\Theta.$$

Умножая полученное равенство на $2r$ и интегрируя от 0 до ρ $(0<\rho<1)$, получаем:

$$2\int_0^{\rho}\left[\left|\frac{f(z)}{b(z,r)}\right|^p\right]_{z=0} r\,dr\leqslant\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|\leqslant\rho}|f(z)|^p\,dS_z\leqslant C<\infty,$$

т.е.

$$2\int_{|\lambda_1|}^{\rho} r^{p\nu+1}\prod_{k=1}^{n(r)}\frac{r^p}{|\lambda_k|^p}\,dr\leqslant C,\quad 0<\rho<1. \tag{22}$$

Из (21) и (22) получается, что

$$\int_0^1 e^{pN(r)}\,dr<\infty. \tag{23}$$

Из (23) следует:

$$\alpha(\rho)=\int_{\rho}^{1}e^{pN(r)}\,dr\geqslant e^{pN(\rho)}(1-\rho),$$

где $\lim\limits_{\rho\to 1}\alpha(\rho)=0$ и

$$N(\rho)\leqslant\frac{1}{p}\ln\frac{\alpha(\rho)}{1-\rho}.$$

Следовательно, порядок функции $N(r)$ $\left(\text{т. е. число } \overline{\lim\limits_{\rho\to 1}}\frac{\ln N(\rho)}{\ln\frac{1}{1-\rho}}\right)$ равен нулю:

$$\overline{\lim_{\rho\to 1}}\frac{\ln N(\rho)}{\ln\frac{1}{1-\rho}}\leqslant\overline{\lim_{\rho\to 1}}\frac{\ln\left[\frac{1}{p}\ln\frac{\alpha(\rho)}{1-\rho}\right]}{\ln\frac{1}{1-\rho}}=0. \tag{24}$$

Допустим, что показатель сходимости μ последовательности $\{\lambda_k\}$ больше единицы. Известно [5], что в случае $\mu>1$ порядок функции $N(r)$ равен $\mu-1>0$, что противоречит равенству (24). Следовательно, $\mu=1$.

Докажем неравенство (8). Из (22) получается:

$$\int\limits_{|\lambda_1|}^{\rho} r^{p\cdot n(r)}\prod_{k=1}^{n(r)}\frac{1}{|\lambda_k|^p}\,dr=\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{|\lambda_k|}^{|\lambda_{k+1}|} r^{p\,n(r)}\prod_{k=1}^{n(r)}\frac{1}{|\lambda_k|^p}\,dr\leqslant C_1<\infty$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda_{k+1}|^{kp+1}-|\lambda_k|^{kp+1}}{kp+1}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{|\lambda_j|}\right)^p<\infty. \tag{25}$$

Так как

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{|\lambda_j|}}{e^{\sum\limits_{j=1}^{k}(1-|\lambda_j|)}}=e^{-\sum\limits_{j=1}^{k}(\ln|\lambda_j|+1-|\lambda_j|)}\geqslant 1,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda_{k+1}|^{kp+1}-|\lambda_k|^{kp+1}}{kp+1}\,e^{\sum\limits_{j=1}^{k}(1-|\lambda_j|)}<\infty. \tag{26}$$

Целую часть действительного числа a обозначим $[a]$ и заметим, что

$$\frac{|\lambda_{k+1}|^{kp+1}-|\lambda_k|^{kp+1}}{kp+1}\geqslant\frac{|\lambda_{k+1}|^{[kp+1]}-|\lambda_k|^{[kp+1]}}{[kp+1]}=$$

$$=\frac{(|\lambda_{k+1}|-|\lambda_k|)\,(|\lambda_{k+1}|^{[kp]}+|\lambda_{k+1}|^{[kp]-1}|\lambda_k|+\cdots+|\lambda_k|^{[kp]})}{[kp+1]}\geqslant$$

$$\geqslant(|\lambda_{k+1}|-|\lambda_k|)\,|\lambda_k|^{[kp]}\geqslant(|\lambda_{k+1}|-|\lambda_k|)\,|\lambda_k|^{kp},$$

если $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots$, поэтому из (26) следует (8).

Замечание. Если $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)<\infty$, то справедливо и (8), но условие (8) может удовлетворяться и в случае $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)=\infty$, например, при $(1-|\lambda_k|)=\frac{1}{k\ln k}$ или при $p<1$ и $1-|\lambda_k|=\frac{1}{k}$.

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
25.IV.1970

Литература

1. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.-Л., Гостехиздат, 1950.
2. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.-Л., Гостехиздат, 1950.
3. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, III, М.-Л., Гостехиздат, 1949.
4. В. П. Кабайла, Некоторые свойства функций класса H_p' и задачи интерполирования, Лит. матем. сб., X, 3 (1970), 471–490.

PUASONO–JENSENO FORMULĖS ANALOGAS SU DVILYPIU INTEGRALU

V. Kabaila

(*Reziumė*)

Straipsnyje įrodoma, kad bet kokiai meromorfinei skritulyje $|z|<R$ funkcijai $f(z)$ ir bet kokiam teigiamam, mažesniam už R, skaičiui ρ yra teisinga lygybė (3), kuri analogiška žinomai Puasono–Jenseno formulei. Remiantis šia formule, įrodoma, kad analizinei vienetiniame skritulyje funkcijai $f(z)$ riba $\lim_{r\to 1}\iint_{|z|\le r}\ln|f(z)|\,dS_z$ yra baigtinė tada ir tik tada, kai funkcijos $f(z)$ nulinių taškų seka $\{\lambda_k\}$ patenkina sąlygą: $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)^2<\infty$. Atskiru atveju, kai $\iint_{|z|<1}\ln^+|f(z)|\,dS_z<\infty$ (t. y. $f\in A'$), tai funkcijos $f(z)$ nuliai patenkina sąlygą $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)^2<\infty$ ir yra teisinga (5) lygybė.

Jei analizinė vienetiniame skritulyje funkcija $f(z)$ patenkina sąlygą: $\iint_{|z|<1}|f(z)|^p\,dS_z<\infty$ $p>0$, (t. y. $f\in H_p'$ [4]), tai įrodoma, kad jos nulinių taškų sekos $\{\lambda_k\}$ konvergavimo rodiklis yra ne didesnis už 1, t. y. eilutė $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)^{\gamma}$ konverguoja, jei $\gamma>1$.

THE POISSON–JENSEN FORMULA WITH THE DOUBLE INTEGRAL

V. Kabaila

(*Summary*)

In the paper it has been proved:

1) the equality (3) (analogical the Poisson—Jensen formula) for any meromorphic in the circle $|z|<R$ function $f(z)$;

2) for any analytic in the circle $|z|<1$ function $f(z)$ the limit $\lim\limits_{\rho\to 1} \iint\limits_{|z|<\rho} \ln|f(z)|\, dS_z$ is finite if and only if the set $\{\lambda_k\}$ of zeroes of $f(z)$ contents the condition: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1-|\lambda_k|)^2 < \infty$; in particular, if $\iint\limits_{|z|<1} \ln^+ |f(z)|\, dS_z < \infty$, then $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1-|\lambda_k|)^2 < \infty$;

3) if the analytic in circle $|z|<1$ function contents the condition $\iint\limits_{|z|<1} |f(z)|^p\, dS_z < \infty$, $(p>0)$ then the set $\{\lambda_k\}$ of zeroes of $f(z)$ contents the condition: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1-|\lambda_k|)^{\gamma} < \infty$ for any $\gamma > 1$.