1971

УДК 513

О ЛОКАЛЬНЫХ ЦЕНТРО-КОНФОРМНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ОХВАТЫВАЮЩЕЙ ПСЕВДОГРУППЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

М. Т. Кондауров

Изучение дифференциально-геометрических пространств Веблена—Уайтхеда, связанных с псевдогруппой преобразований, начинается с изучения геометрического объекта, соответствующего заданной псевдогруппе преобразований. Смещение же локальных пространств, ассоциированных с точками базисного многообразия, вдоль кривых, лежащих на многообразии, позволяет построить теорию перенесений, связанную с геометрией многообразия.

Изучение геометрического объекта, однозначно определенного псевдогруппой преобразований

$$x^{i'}=\frac{a_i^{i'}x^i}{b_q x^q+1}+c^{i'}, \tag{1}$$

а также построение теории центро-проективных перенесений, наиболее глубоко связанной с геометрией дифференцируемого многообразия, проведено В. Г. Лемлейном [1].

На пути построения теории конформных перенесений [2] естественно поставить задачу отыскания геометрического объекта, однозначно определенного охватывающей псевдогруппой преобразований вида

$$x^{i'}=\frac{a_i^{i'}(x^i+\alpha^i g_{rs}x^r x^s)}{1+2\alpha_r x^r+\alpha_r\alpha^r g_{st}x^s x^t}+c^{i'} \tag{2}$$

(где $a_i^{i'}$, α_r, α^r—const, $\alpha_r=g_{rs}x^s$, $\det\|a_i^{i'}\|\neq 0$, g_{rs} — дважды ковариантный тензор), так как преобразования (2) становятся конформными (а локальные пространства, связанные с каждой точкой $M_0(x_0^i)$ многообразия — центро-конформными), если $\|a_i^{i'}\|$ — ортогональна.

В настоящей заметке отыскивается этот геометрический объект, выясняется его геометрический смысл, а при $n=1$, 2 устанавливается связь его с проективным пунктором.

Рассмотрим n-мерное риманово пространство $\{V^n\}$ с метрическим тензором g_{ij}.

Предложение 1. Система, состоящая из $\frac{n(n+3)}{2}$ функций $(u^i,\ g_{ij})$, преобразующихся при преобразовании локальных координатных систем

$$x^{i'}=x^{i'}(x^i) \tag{3}$$

по закону

$$\begin{cases} u^{i'} = \dfrac{\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\left(u^{i}-\dfrac{1}{2n}\,g^{il}\,\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{e}}\cdot g_{rs}u^{r}u^{s}\right)}{1-\dfrac{1}{n}\,\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{k}}\cdot u^{k}+\dfrac{1}{4n^{2}}\,g^{pq}\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{p}}\,\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{q}}\cdot g_{ts}u^{t}u^{s}}, \\ g_{i'j'} = \dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\cdot\dfrac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\cdot g_{ij}, \end{cases} \tag{4}$$

образует геометрический объект.

Доказательство. Легко проверить, что

$$g_{i'j'}u^{i'}u^{j'} = \\ = \frac{g_{ij}u^{i}u^{j}}{1-\dfrac{1}{n}\,\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{k}}\cdot u^{k}+\dfrac{1}{4n^{2}}\,g^{pq}\,\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{p}}\,\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{q}}\cdot g_{st}u^{s}u^{t}}. \tag{5}$$

Используя (5), предложение 1 доказывается непосредственной проверкой транзитивности закона преобразования компонент (u^{i}, g_{ij}).

Из (4) следует

$$\left.\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^{i}}\right|_{u^{i}=0} = \left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right|_{M_0}. \tag{6}$$

Следовательно, закон преобразования $(du^{i})_{u^{i}=0}$ совпадает с законом преобразования d_{x}^{i}, то есть $(du^{i})\,|_{u^{i}=0} \equiv dx^{i}$.

Предложение 2. При $u^{k}=0$ имеет место соотношение

$$\left.\frac{\partial \det \left\| \dfrac{\partial u^{r'}}{du^{r}} \right\|}{\partial u^{k}}\right|_{u^{i}=0} = \left.\frac{\partial \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{k}}\right|_{M_0}. \tag{7}$$

Доказательство. Прежде всего вычислим якобиан преобразования (2), воспользовавшись приведенной системой дифференциальных уравнений псевдогруппы преобразований (2)

$$\frac{\partial^{2} x^{p'}}{\partial x^{j}\,\partial x^{k}} = \frac{1}{n}\,\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{(j}}\,\frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{k)}} - \frac{1}{n}\,\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{m}}\,g^{ml}\,\frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{l}}\cdot g_{jk},$$

которая при $j=k$ дает

$$\frac{\partial^{2} x^{p'}}{(\partial x^{k})^{2}} = \frac{2}{n}\,\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{k}}\cdot\frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{k}} - \frac{1}{n}\,\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{m}}\,g^{ml}\,\frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{l}}\cdot g_{kk}. \tag{8}$$

Покажем, что система (8) удовлетворяется значением

$$-\frac{1}{n}\,\frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}} \right\|}{\partial x^{k}} = \frac{2\,(\alpha_{k}+\alpha_{r}\,\alpha^{r}\,g_{ks}\,x^{s})}{1+2\,\alpha_{r}\,x^{r}+\alpha_{r}\,\alpha^{r}\,g_{st}\,x^{s}\,x^{t}}. \tag{9}$$

Вводя обозначения

$$1+2\,\alpha_{r}\,x^{r}+\alpha_{r}\,\alpha^{r}\,g_{st}\,x^{s}\,x^{t}=\mathfrak{A},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^{k}}=\mathfrak{A}_{k},\quad g^{ml}\,\mathfrak{A}_{l}=\mathfrak{A}^{m},$$

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{k}} = \frac{1}{1+2\,\alpha_{r}\,x^{r}+\alpha_{r}\,\alpha^{r}\,g_{st}\,x^{s}\,x^{t}}\cdot\left[a_{k}^{p'}+2x^{r}\,(a_{k}^{p'}\,\alpha_{r}-a_{r}^{p'}\,\alpha_{k}+a_{l}^{p'}\,\alpha^{l}\,g_{kr})+\right.$$
$$\left.+\,x^{r}\,x^{s}\,(a_{k}^{p'}\,\alpha_{p}\,\alpha^{p}\,g_{rs}+4a_{l}^{p'}\,\alpha^{l}\,g_{kr}\,\alpha_{r}-2a_{s}^{p'}\,\alpha_{p}\,\alpha^{p}\,g_{kr}-2a_{l}^{p'}\,\alpha^{l}\,g_{rs}\,\alpha_{k})\right] = \frac{A_{k}^{p'}}{\mathfrak{A}^{2}} \tag{10}$$

и производя подстановку (9), левую и правую части (8) можно, соответственно, записать:

$$\frac{\dfrac{\partial A_k^{p'}}{\partial x^k}\cdot\mathfrak{A}-2\,\mathfrak{A}_k\cdot A_k^{p'}}{\mathfrak{A}^3}, \tag{11}$$

$$-2\frac{A_k^{p'}}{\mathfrak{A}^2}\cdot\frac{\mathfrak{A}_k}{\mathfrak{A}}+\frac{A_m^{p'}}{\mathfrak{A}^2}\cdot\frac{\mathfrak{A}^m}{\mathfrak{A}}\cdot g_{kk}. \tag{12}$$

Непосредственными же вычислениями получаем:

$$\frac{\partial A_k^{p'}}{\partial x^k}=2g_{kk}\,(a_l^{p'}\,\alpha^l+2a_l^{p'}\,\alpha^l\,\alpha_s\,x^s-a_l^{p'}\,x^l\,\alpha_r\,x^r), \tag{13}$$

$$A_m^{p'}\cdot\mathfrak{A}^m=2\,(a_l^{p'}\,\alpha^l+2a_l^{p'}\,\alpha^l\,\alpha_s\,x^s-a_l^{p'}\,x^l\,\alpha_r\,x^r)\cdot\mathfrak{A}. \tag{14}$$

Сопоставление (13) и (14) дает

$$\frac{\partial A_k^{p'}}{\partial x^k}\cdot\mathfrak{A}=A_m^{p'}\cdot\mathfrak{A}^m\cdot g_{kk}. \tag{15}$$

Наконец, (11), (12) и (15) дадут, что система (8) удовлетворяется значением (9).

Из (9) получаем:

$$\ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|=\ln\frac{c}{(1+2\alpha_r\,x^r+\alpha_r\,\alpha^r\,g_{st}\,x^s\,x^t)^n}\qquad (c\neq 0-\mathrm{const}),$$

но

$$\det\left\|\left(\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right)_{x^i=0}\right\|=\det\|a_r^{r'}\|,$$

и, следовательно,

$$\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|=\frac{\det\|a_r^{r'}\|}{(1+2\alpha_r\,x^r+\alpha_r\,\alpha^r\,g_{st}\,x^s\,x^t)^n}. \tag{16}$$

Если вместо преобразования (2) рассмотреть преобразование компонент (u^i) объекта (u^i, g_{ij}) из (4), то равенство (16) даст

$$\det\left\|\frac{\partial u^{r'}}{\partial u^r}\right\|=$$

$$=\frac{\det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\left(1-\dfrac{1}{n}\,\dfrac{\partial\ln\det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}\,u^k+\dfrac{1}{4n^2}\,g^{pq}\,\dfrac{\partial\ln\det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^p}\cdot\dfrac{\partial\ln\det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^q}\cdot g_{st}\,u^s\,u^t\right)^n}$$

и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial\det\left\|\dfrac{\partial u^{r'}}{\partial u^r}\right\|}{\partial u^k}\right|_{u^i=0}=\left.\frac{\partial\det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}\right|_{M_0}.$$

Итак, компоненты (u^i) объекта (u^i, g_{ij}) удовлетворяют не только (6), но и более сильному требованию (7).

Предложение 3. При преобразованиях (2) разности ($x^i-x_0^i$) преобразуются по закону преобразования компонент (u^i) объекта (u^i, g_{ij}).

Доказательство. Так как теперь рассматриваются только преобразования (2), то, учитывая (9), получаем:

$$\frac{1}{4n^2} g^{pq} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^q} = \frac{\alpha_r \alpha^r}{1 + 2\alpha_r x^r + \alpha_r \alpha^r g_{st} x^s x^t}. \tag{17}$$

Тогда, учитывая (10), (17) и (14), преобразование компонент (u^i) объекта (u^i, g_{ij}) для точки $x^i = x^i_0$ запишется в виде

$$u^{i'} = \frac{\left(\frac{A_i^{i'}}{\mathfrak{A}^2}\right)_{x^i = x^i_0} \cdot \left[u^i + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{A}^i}{\mathfrak{A}}\right)_{x^i = x^i_0} \cdot g_{st} u^s u^t\right]}{1 + \left(\frac{\mathfrak{A}_k}{\mathfrak{A}}\right)_{x^i = x^i_0} \cdot u^k + \left(\frac{\alpha_r \alpha^r}{\mathfrak{A}}\right)_{x^i = x^i_0} \cdot g_{st} u^s u^t} =$$

$$= \frac{(A_i^{i'})_{x^i = x^i_0} \cdot u^i + (a_l^{i'} \alpha^l + 2a_l^{i'} \alpha^l \alpha_s x^s_0 - a_l^{i'} x^l_0 \alpha_r \alpha^r) g_{st} x^s x^t}{[(\mathfrak{A})_{x^i = x^i_0} + (\mathfrak{A}_k)_{x^i = x^i_0} \cdot u^k + \alpha_r \alpha^r g_{st} u^s u^t] \cdot (\mathfrak{A})_{x^i = x^i_0}}. \tag{18}$$

Если теперь вместо (u^i) подставить $(x^i - x^i_0)$, а вместо $(\mathfrak{A})_{x^i = x^i_0}$, $(\mathfrak{A}_k)_{x^i = x^i_0}$, $(A_i^{i'})_{x^i = x^i_0}$ их значения из (10), то числитель и знаменатель выражения (18) можно, соответственно, записать

$$a_i^{i'} (x^i + \alpha^i g_{st} x^s x^t)(1 + 2\alpha_r x^r_0 + \alpha_r \alpha^r g_{st} x^s_0 x^t_0) -$$

$$- a_l^{i'} (x^l_0 + \alpha^l g_{st} x^s_0 x^t_0)(1 + 2\alpha_r x^r + \alpha_r \alpha^r g_{st} x^s x^t), \tag{19}$$

$$(1 + 2\alpha_r x^r + \alpha_r \alpha^r g_{st} x^s x^t)(1 + 2\alpha_r x^r_0 + \alpha_r \alpha^r g_{st} x^s_0 x^t_0). \tag{20}$$

(19) и (20) дают

$$u^{i'} = \frac{a_i^{i'} (x^i + \alpha^i g_{st} x^s x^t)}{1 + 2\alpha_r x^r + \alpha_r \alpha^r g_{st} x^s x^t} - \frac{a_l^{i'} (x^l + \alpha^l g_{st} x^s_0 x^t_0)}{1 + 2\alpha_r x^r_0 + \alpha_r \alpha^r g_{st} x^s_0 x^t_0} = x^{i'} - x^{i'}_0.$$

Этот факт устанавливает для компонент (u^i) по отношению к преобразованиям (2) свойство, аналогичное свойству векторов по отношению к линейным преобразованиям

$$x^{i'} = a_i^{i'} x^i + b^{i'}, \tag{21}$$

и свойству пункторов по отношению к преобразованиям (1). (При преобразованиях (21) разности $(x^i - x^i_0)$ преобразуются по векторному закону, а при преобразованиях (1) — по закону преобразования проективного пунктора [1].)

Рассмотрим отдельно случай $n = 1$. Полагая $g_{11} = g^{11} = 1$, имеем следующий закон преобразования для $u^1 = u$:

$$v = \frac{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0} \cdot u}{1 - \frac{1}{2} \left.\frac{dx}{dy}\right|_{M_0} \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{M_0} \cdot u}. \tag{22}$$

(6) и (7) дадут $\left.\frac{dv}{du}\right|_{u=0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0}$ и $\left.\frac{d^2 v}{du^2}\right|_{u=0} = \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{M_0}$.

Следовательно, в силу (22) компонента u преобразуется по пункторному закону, и ее можно геометрически интерпретировать так же, как и локальные центро-проективные пространства $\{P^1\}$, связанные с дифференцируемым многообразием $\{V^n\}$ [1].

Ограничиваясь при $n=2$ только теми преобразованиями (2), которые являются конформными, и полагая

$$\|g_{ij}\|=\|g^{ij}\|=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \alpha_i=\alpha^i,\ u^i=x^i-x_0^i,$$

получим двумерное локально-конформное многообразие (многообразие, определенное с точностью до произвольных невырожденных конформных преобразований локальных координатных систем). Преобразования (2) при $n=2$ будут определять некоторую аналитическую функцию $W=f(x^1, x^2)$, определяющую конформное преобразование, если

$$\begin{aligned}&a_1^{1'}=a_2^{2'}=a,\quad a_2^{1'}=-a_1^{2'}=0,\\ &\alpha_1=\alpha^1=b,\ \alpha_2=\alpha^2=0.\end{aligned} \tag{23}$$

Полагая же $x^1+ix^2=z$ и учитывая (23), имеем:

$$z'=x^{1'}+ix^{2'}=\frac{az}{bz+1}+c. \tag{24}$$

Но по отношению к преобразованиям (24) разность $(z-z_0)$ является проективным пунктором, причем

$$z-z_0=(x^1+ix^2)-(x_0^1+ix_0^2)=u^1+iu^2.$$

Следовательно, наше двумерное локально-конформное многообразие точек (u^1, u^2) одновременно можно рассматривать и как одномерное локально-проективное многообразие точек $z-z_0=u^1+iu^2$.

Отметим в заключение, что все сказанное имеет место и в том случае, если $\{V^n\}$ будет псевдоримановым или даже пространством Вейля.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность В. Г. Лемлейну, под руководством которого выполнялась настоящая работа.

Москва

Поступило в редакцию
2.VI.1969

Литература

1. В. Г. Лемлейн, Локальные центро-проективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии, Лит. матем. сб., **IV**, № 1, (1964), 65.
2. И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, 2.

APIE LOKALINES CENTROKONFORMINES ERDVES IR APRĖPIAMĄ TRANSFORMACIJŲ PSEUDOGRUPĘ

M. Kondaurovas

(*Reziumė*)

Straipsnyje yra nagrinėjama pseudogrupė, kurios pogrupiu yra konforminių transformacijų grupė. Surastas geometrinis objektas, atitinkantis minėtąjį pogrupį ir atskiru atveju randamas ryšys tarp projektyvinio punktoriaus ir minėto objekto komponentų.

ON LOCAL CENTER–CONFORMING SPACES INCLUDING PSEUDOGROUP OF THE TRANSFORMATIONS

M. Kondaurov

(*Summary*)

The pseudogroup including the pseudogroup of conforming transformations has been considered. A geometric object defined by the pseudogroup has been found. The geometric meaning of the object has been found and in some cases a certain connection of the object with the projective punctor has been ascertained.