УДК 519.21

О МАКСИМУМЕ ОДНОРОДНОГО НОРМАЛЬНОГО ПОЛЯ

Р. Лапинскас

Настоящая заметка посвящена исправлению и обобщению теоремы 2 из [1], а также близприлегающему обобщению теоремы из [5].

Рассмотрим действительное изотропное однородное гауссово поле $\eta=\eta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с $\mathbf{M}\eta\equiv 0$, $\mathbf{D}\eta\equiv 1$. Потребуем выполнения следующих условий:

а) корреляционная функция поля

$$r(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int e^{i(x,\lambda)} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_n$$

такова, что

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int |f'_{\lambda_i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_n<\infty;$$

б) $r(x_1, \ldots, x_n)\leqslant K<1$ при

$$|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\geqslant b;$$

в) существуют производные 4-го порядка от функции $r(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $x_1=\ldots=x_n=0$, и корреляционная матрица случайных величин $\eta(x_1, \ldots, x_n)$, $\eta'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$, $\eta''_{x_i x_j}(x_1, \ldots, x_n)$, $i, j=\overline{1, n}$

невырождена.

Обозначим

$$\eta(X, \ldots, X)=\max_{\substack{x_i\in[0,\,x]\\ i=1,2,\ldots,n}}\eta(x_1, \ldots, x_n).$$

Теорема 1. *Пусть наше случайное поле удовлетворяет условиям а), б), в). Тогда при любом $\varepsilon>0$ почти наверное (п.н.) найдется такое (случайное) x_0 $(x_0<\infty)$, что при всех $x>x_0$*

$$|\eta(X, \ldots, X)-\sqrt{2n\ln x}\,|<\frac{(1+\varepsilon)\ln\ln x}{\left(\frac{2n}{(n+1)^2}\ln x\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Доказательство.

Доказательство теоремы сводится к доказательству двух утверждений.

А. Пусть $\varepsilon>0$. П.н. найдется такое (случайное) x_1 ($x_1<\infty$), что при $x>x_1$ справедливо неравенство

$$\eta(X, \ldots, X)>L(x, \varepsilon)\equiv\sqrt{2n\ln x}-\frac{(1+\varepsilon)\ln\ln x}{\sqrt{\frac{2n}{(n+1)^2}\ln x}}.$$

Б. Пусть $\varepsilon>0$. П.н. найдется такое (случайное) x_2 ($x_2<\infty$), что при $x>x_2$ справедливо неравенство

$$\eta(X, \ldots, X)<M(x, \varepsilon)\equiv\sqrt{2n\ln x}+\frac{(1+\varepsilon)\ln\ln x}{\sqrt{\frac{2n}{(n+1)^2}\ln x}}.$$

Доказательство утверждения **А**.

Обозначим $C_\varepsilon(x)$ событие, состоящее в выполнении неравенства

$$\eta(X, \ldots, X)\leqslant L(x, \varepsilon).$$

Лемма 1. *Пусть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{C_\varepsilon(e^k)\} \tag{1}$$

сходится. Тогда с вероятностью 1 при всех достаточно больших x будет выполняться неравенство

$$\eta(X, \ldots, X)>\sqrt{2n\ln x}-\frac{(1+\varepsilon)\ln\ln x}{\sqrt{\frac{2n}{(n+1)^2}\ln x}}.$$

Доказательство леммы вполне аналогично доказательству из [2]. В силу леммы 1 для доказательства утверждения **А** достаточно установить сходимость ряда (1) при любом $\varepsilon>0$. Этим мы сейчас и займемся.

Определим (см. [1], [3])

$$a(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\begin{cases}1 & \text{при } \eta(x_1, \ldots, x_n)>c,\\ 0 & \text{при } \eta(x_1, \ldots, x_n)\leqslant c.\end{cases}$$

Тогда интеграл

$$b(x, x, \ldots, x)=\int_0^x\cdots\int a(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

будет мерой Лебега тех точек куба $\{0\leqslant x_i\leqslant x,\ i=\overline{1, n}\}$, где $\eta(x_1, \ldots, x_n)>c$, $c=\text{const}>0$.

Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{\eta(X, \ldots, X)\leqslant c\}=\mathbf{P}\{b(x, \ldots, x)=0\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\mathbf{D}\,b(x, x, \ldots, x)}{\mathbf{M}^2\,b(x, \ldots, x)}. \tag{2}$$

При этом

$$\mathbf{M}b(x, \ldots, x) > a_1 \frac{x^n}{c} \exp\left\{-\frac{c^2}{2}\right\}, \tag{3}$$

$$\mathbf{D}b(x, \ldots, x) < I = a_2 \underbrace{\int_0^x\int \cdots \int_0^x\int}_{n \text{ пар}} |r(x_2^{(1)} - x_1^{(1)}, \ldots$$

$$\ldots, x_2^{(n)} - x_1^{(n)}| \exp\left\{-\frac{c^2}{1 + |r(x_2^{(1)} - x_1^{(1)}, \ldots, x_2^{(n)} - x_1^{(n)})|}\right\} \times$$

$$\times dx_1^{(1)}\, dx_2^{(1)}, \ldots, dx_1^{(n)}\, dx_2^{(n)}, \tag{4}$$

$$|r(x_1, \ldots, x_n)| < \frac{a_3}{\max\limits_{i=\overline{1, n}} |x_i|}. \quad \text{(см. [1])} \tag{5}$$

Здесь и впредь a_i будут обозначать надлежащим образом подобранные константы.

Получим более выразительную оценку $\mathbf{D}b(x, \ldots, x)$.

Разобьем область интегрирования в I на 2 части: $I = I_1 + I_2$, где I_1 соответствует область интегрирования

$$B_1: \begin{cases} |x_2^{(1)} - x_1^{(1)}| > a_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |x_2^{(n)} - x_1^{(n)}| > a_4, \end{cases}$$

а I_2 соответствует остальная часть (B_2). Здесь константу a_4 выбираем таким образом, чтобы

$$|r(x_1, \ldots, x_n)| < \frac{1}{2n} \tag{6}$$

при

$$\max(|x_1|, \ldots, |x_n|) > a_4.$$

Объем B_2 равен

$$\left[x^2 - 2\frac{(x-a_4)^2}{2}\right]^n \leqslant a_5 x^n,$$

а так как $|r(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant 1$, то

$$I_2 \leqslant a_5 x^n \exp\left\{-\frac{c^2}{2}\right\}.$$

Для оценки I_1 воспользуемся (5) и (6):

$$I_1 < a_6 \exp\left\{\frac{2n}{2n+1} c^2\right\} \int \cdots \int_{a_4}^{x} (x - z_1) \times \ldots \times$$

$$\times (x - z_n) \frac{dz_1 \ldots dz_n}{\max(z_1, \ldots, z_n)} < a_7 x^{2n-1} \exp\left\{-\frac{2n}{2n+1} c^2\right\}.$$

Таким образом, получаем:

$$\mathbf{P}\{\eta(X, \ldots, X) \leqslant c\} <$$

$$< a_8 c^2 \exp\left\{\frac{c^2}{2}\right\} \frac{1}{x^n} + a_9 c^2 \exp\left\{\frac{c^2}{2n+1}\right\} \frac{1}{x}.$$

Положим теперь $c=L(t, \varepsilon)$. Видим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{C_\varepsilon(e^k)\} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{10}\, n \frac{1}{(\ln x)^{n(1+\varepsilon)+\varepsilon}} + \right.$$

$$\left. + a_{11} \frac{1}{(\ln x)^\varepsilon} \frac{1}{x^{\frac{1}{2n+1}}}\right)\Big|_{x=e^k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{10}\, n \frac{1}{k^{n(1+\varepsilon)+\varepsilon}} + a_{11} \frac{1}{k^\varepsilon} \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{2n+1}}\right)^k}\right) < \infty .$$

Отсюда по лемме 1 следует утверждение **А**.

Доказательство утверждения **Б**.

Обозначим через $B_\varepsilon(x)$ событие $\{\eta(X, \ldots, X) \geqslant M(x, \varepsilon)\}$. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 1, получаем, что из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{B_\varepsilon(e^k)\} \tag{7}$$

следует, что с вероятностью 1 при всех достаточно больших x будет выполняться

$$\eta(X, \ldots, X) < \sqrt{2n \ln x} + \frac{(1+\varepsilon)\ln\ln x}{\sqrt{\frac{2n}{(n+1)^2}\ln x}} .$$

Докажем сходимость ряда (7). Воспользуемся неравенством

$$\mathbf{P}\{\eta(X, \ldots, X) \geqslant M(x, \varepsilon)\} < \mathbf{M}\mathfrak{N}_{\max \geqslant M(x, \varepsilon)}[0, x],$$

где $\mathfrak{N}_{\max \geqslant h}[0, x]$ — число максимумов случайного поля в кубе $\{[0, x] \times \times \ldots \times [0, x]\}$, превышающих уровень h. Имеет место (ср. [4]) следующее равенство:

$$\mathbf{M}\mathfrak{N}_{\max \geqslant h}[0, 1] = \int_h^{\infty} G(z)\, dz ,$$

где $G(z)$ в случае $n=2$ выглядит следующим образом:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\sqrt{\eta_{x_1 x_1} \eta_{x_2 x_2}}}^{+\sqrt{\eta_{x_1 x_1} \eta_{x_2 x_2}}} \eta_{x_1 x_1} \eta_{x_2 x_2}\, \omega_6(z,\ 0,\ 0;$$

$$\eta_{x_1 x_1},\ \eta_{x_2 x_2},\ \eta_{x_1 x_2})\, d\eta_{x_1 x_2}\, d\eta_{x_1 x_1}\, d\eta_{x_2 x_2}.$$

Здесь $\omega_6(z;\ \eta_{x_1}, \eta_{x_2};\ \eta_{x_1 x_1}, \eta_{x_2 x_2}, \eta_{x_1 x_2})$ — совместная плотность распределения ординаты поля, его первых и вторых производных.

Для $G(z)$ можно получить следующие оценки:

1)

$$G(z) \leqslant A_2' \int\int_{-\infty}^{0} \eta_{x_1 x_1} \eta_{x_2 x_2}\, \omega_5(z;\ 0,\ 0,\ \eta_{x_1 x_1},\ \eta_{x_2 x_2}) \times$$

$$\times d\eta_{x_1 x_1}\, d\eta_{x_2 x_2} \leqslant A_2'' z^2 \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\};$$

2) если ввести

$$\omega_6^\varepsilon(z;\ 0,\ 0;\ \eta_{x_1x_1},\ \eta_{x_1x_2},\ \eta_{x_2x_2}) =$$

$$= \begin{cases} \omega_6(z;\ 0,\ 0;\ \eta_{x_1x_1},\ \eta_{x_1x_2},\ \eta_{x_2x_2}) & \text{при} \quad \eta_{x_1x_2} \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad \eta_{x_1x_2} > \varepsilon, \end{cases}$$

то тогда

$$G(z) \geqslant \int\int_{-\infty}^{0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_{x_1x_1}\eta_{x_2x_2}\omega_6^\varepsilon(z;\ 0,\ 0;\ \eta_{x_1x_1},\ \eta_{x_1x_2},\ \eta_{x_2x_2}) \times$$

$$\times d\eta_{x_2x_2}\, d\eta_{x_1x_1}\, d\eta_{x_1x_2} \geqslant A_2^m z^2 \exp\left\{ -\frac{z^2}{2} \right\}.$$

Таким образом, $G(z) \sim A_2 z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}$ при $z \to \infty$.

В общем случае записи выглядят сложнее, но также можно получить оценку

$$G(z) \sim A_n z^n \exp\left\{ -\frac{z^2}{2} \right\},$$

где A_n — константа, зависящая от n.

Отсюда следует, что

$$\mathbf{M}\mathfrak{N}_{\max \geqslant h}[0,\ x] < a_{13} h^{n-1} \exp\left\{ -\frac{h^2}{2} \right\} x^n.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{B_\varepsilon(e^k)\} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{14}(2n)^{\frac{n-1}{n}} (\ln x)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{x^n} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{(\ln x)^{(n+1)(1+\varepsilon)}} x^n \right) \Big|_{x=e^k} <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} a_{15} \frac{1}{k^{\frac{n+3}{2} + (n+1)\varepsilon}} < \infty, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Из сходимости данного ряда следует утверждение **В**, а тем самым и доказательство теоремы 1.

Частным случаем этой теоремы является теорема из [3] и теорема из [2], в доказательстве которой, по-видимому, содержится неточность (неверно неравенство (7)).

Теорему из [3] можно усилить и в другом направлении, что в одномерном случае сделано самим Крамером [5].

Теорема 2. *Если однородное нормальное поле $\eta = \eta(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ с $\mathbf{M}\eta \equiv 0$ и $\mathbf{D}\eta \equiv 1$ имеет непрерывно дифференцируемые реализации, удовлетворяет условию в) и условию сильного перемешивания (см. ниже), то для случайной величины* ω:

$$\eta(X,\ \ldots,\ X) = \sqrt{2n \ln x} + \frac{(n-1)\ln\ln x}{\sqrt{2n\ln x}} -$$

$$- \frac{\ln A_n}{\sqrt{2n\ln x}} + \frac{\omega}{\sqrt{2n\ln x}}$$

существует следующее предельное распределение:

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\{\omega\leqslant z\}=e^{-e^{-z}}.$$

Доказательство

Для доказательства потребуется ввести некоторые понятия, аналогичные [6].

Положим для любых конечных S, $V\in R^n$,

$$d(S, V)=\min_{\substack{s\in S\\ v\in V}}\|s-v\|=\min_{\substack{s\in S\\ v\in V}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(s_i-v_i)^2}\,.$$

Для любого конечного множества $S\in R^n$ обозначим $\mathfrak{M}_s$ σ-алгебру, порожденную событиями вида

$$\{\eta(\mathbf{x}_1)\in B_1,\ \ldots,\ \eta(\mathbf{x}_k)\in B_k\},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_i=(x_1^{(i)},\ \ldots,\ x_n^{(i)})\in S;$$

B_i, $i=\overline{1,\ k}$ — борелевские множества. Положим

$$\delta(S, V)=\sup_{\substack{C\in\mathfrak{M}_S\\ D\in\mathfrak{M}_V}}|\mathbf{P}(CD)-\mathbf{P}(C)\,\mathbf{P}(D)|.$$

Будем говорить, что поле обладает свойством сильного перемешивания, если для любого конечного $S\in R^n$

$$\delta(S, V)\leqslant\lambda_V\big(d(S, V)\big),$$

где $\lambda_V(d)\to 0$ при $d\to\infty$ и любом фиксированном V.

Назовем аддитивную случайную функцию $H(\Delta)$, $\Delta\in R^n$ слабо однородной, если распределение $H(\Delta)$ зависит лишь от объема множества Δ.

Пусть $H_n(\Delta)$, $n=1, 2, \ldots$ является последовательностью аддитивных слабо однородных функций, принимающих только целые, неотрицательные значения. Положим

$$\nu_r=\mathbf{M}H_r(\Delta_0),$$

где Δ_0 — множество объема 1.

Рассмотрим последовательность нормированных функций

$$\zeta_r(\Delta)=H_r\left(\frac{\Delta}{\nu_r}\right),$$

где $\frac{\Delta}{\nu_r}$ есть множество, состоящее из точек

$$\frac{x}{\nu_r}=\left(\frac{x_1}{\nu_r},\ \ldots,\ \frac{x_n}{\nu_r}\right),\quad x\in\Delta.$$

Положим $u_r(x, \ldots, x)=\mathbf{P}\ \{\zeta_r(K_x)=1\}$, где K_x — куб $\{[0, x]\times\ldots\times[0, x]\}$. Введем

$$\varphi_r(x,\ \ldots,\ x)=1-\frac{u_r(x,\ \ldots,\ x)}{x^n}.$$

Лемма 2. *Пусть $H_r(\Delta)$, $r=1, 2, \ldots$ — последовательность аддитивных, слабо однородных функций множества Δ, обладающих свойством сильного перемешивания, причем соответствующие функции*

$$\lambda^{(r)}(d) = \sup_{V\in R^n} \lambda_V^{(r)}(d) \to 0$$

равномерно при $d\to\infty$. Пусть, также $\nu_r\to 0$ при $r\to\infty$.

Если функции $\varphi_r(x, \ldots, x)$ таковы, что

$$\varphi_r(x, \ldots, x)\to 0 \quad \text{при} \quad r\to\infty,\ x\to 0,$$

то

$$\mathbf{P}\{\zeta_r(\Delta_1)=k_1, \ \ldots, \ \zeta_r(\Delta_m)=k_m\}\to$$

$$\to \frac{|\Delta_1|^{k_1} \ldots |\Delta_m|^{k_m}}{k_1! \ldots k_m!} e^{-(|\Delta_1|+\ldots+|\Delta_m|)}$$

при $r\to\infty$.

Здесь $|\Delta_i|$ — объем множества Δ_i, $i=\overline{1, m}$ и Δ_i — непересекающиеся множества.

Лемма 2 доказывается аналогично теореме 3.1 из [6].

Если в качестве $H(\Delta)$ взять число максимумов случайного поля $\eta(x_1, \ldots, x_n)$ в множестве Δ, то, в частности, получаем:

$$\lim_{c\to\infty} \mathbf{P}\left\{\mathfrak{N}_{\max\geq c}\left(0, \frac{y}{\sqrt[n]{\nu_c}}\right)=k\right\}=\frac{(y^n)^k}{k!} e^{-(y^n)}. \tag{10}$$

Как уже было

$$\nu_c=\mathbf{M}\{\mathfrak{N}_{\max\geq c}(0, 1)\}\sim A_n c^{n-1} e^{-\frac{c^2}{2}}, \tag{11}$$

где A_n — константа, зависящая от n.

Положим сейчас в (10) $k=0$, $y=e^{-\frac{z}{n}}$ и обозначим

$$x=\left(\frac{e^{-z}}{\nu_c}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{12}$$

Если фиксировать z, а c устремить в бесконечность, то из (10) получаем:

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\{\mathfrak{N}_{\max\geq c}(0, x)=0\}=e^{-e^{-z}}.$$

Так как

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{N}_{\max\geq c}[0, x]=0\}\sim\mathbf{P}\{\eta(X, \ \ldots, \ X)\leqslant c\},$$

то

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(X, \ \ldots, \ X)\leqslant c\}=e^{-e^{-z}}.$$

Из (10) и (12) получаем:

$$c^2=2n\ln x\left(1+\frac{\ln A_n+(n-1)\ln\ln x+z}{n\ln x}\right);$$

$$c\sim\sqrt{2n\ln x}+\frac{\ln A_n}{\sqrt{2n\ln x}}+\frac{(n-1)\ln\ln x}{\sqrt{2n\ln x}}+\frac{z}{\sqrt{2n\ln x}}+O\left((\ln x)^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Отсюда и следует утверждение теоремы 2.

Замечание. Требование теоремы 2 относительно выполнения условия сильного перемешивания, по-видимому, можно ослабить (ср. [9], [8]).

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 16.XII.1969

Литература

1. Р. А. Лапинскас, О максимуме стационарного нормального поля, сб. „Математика. Физика. Кибернетика" – Конференция молодых ученых Лит. ССР, Вильнюс, 1967, 24–27.
2. М. Г. Шур, О максимуме гауссовского стационарного процесса, Теория вероят. и ее примен., **X**, вып. 2 (1965), 386–389.
3. H. Cramer, On Maximum of Normal Process, Bull.Amer. Math. Soc., **68**, **5** (1962), 512–519,
4. А. А. Свешников, Прикладные методы теории случайных функций, М., „Наука" 1968, 435.
5. H. Cramer, A limit Theorem for the Maximum Values of Certain Stochastic Processes, Теор. вероят. и ее примен., **X**; вып. 1 (1965), 137–139.
6. В. А. Волконский и Ю. А. Розанов, Некоторые предельные теоремы для случайных функций. I, Теория вероят. и ее примен., **IV**, вып. 2 (1959), 186–207.
7. В. А. Волконский и Ю. А. Розанов, Некоторые предельные теоремы для случайных функций. II, Теория вероят. и ее примен., **VI**, вып. 2 (1961), 202–215.
8. Г. Крамер и М. Лидбеттер, Стационарные случайные процессы, М., „Мир", 1969, 264.
9. Ю. К. Беляев, О числе пересечений уровня гауссовским случайным процессом. II., Теория вероят. и ее примен., **XII**, вып. 3 (1967), 444–457.

APIE HOMOGENINIO NORMALINIO LAUKO MAKSIMUMĄ

R. Lapinskas

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjamas atsitiktinio lauko maksimumo augimo greitis, taip pat surandamas šio maksimumo ribinis pasiskirstymas.

ON THE MAXIMUM OF STOCHASTIC GAUSSIAN FIELD

R. Lapinskas

(*Summary*)

The rate of the maximum growth of Gaussian stochastic field has been investigated and limit distribution of the maximum has been found.