УДК 517.548:513.88:518

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

С. Б. Ремейкис

Пусть A – линейный (ограниченный или неограниченный) симметрический замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H, и пусть не существует ограниченный обратный оператор A^{-1}. Пусть $\Delta=\{\alpha\}$ – множество положительных чисел с нулевой точкой сгущения, на котором заданы функции $\delta=\delta(\alpha)$ и $\delta'=\delta'(\alpha)$, такие, что $\delta=o(\alpha)$ и $\delta'=o(\alpha)$ при $\alpha\to 0$. Далее, пусть $\{A_\delta\}$ $\big(\delta=\delta(\alpha)\big)$ – семейство операторов таких, что $A_\delta=A+\delta A$, где δA – линейный ограниченный самосопряженный оператор в H; $\|\delta A\|\leqslant\delta$. I – единичный оператор в H.

В работе [2] доказана

Теорема. *Пусть уравнение*

$$Af=g \tag{1}$$

при некотором $g\in H$ имеет решение и f^* – нормальное решение (т.е. решение с наименьшей нормой) этого уравнения. Если уравнение

$$(A_\delta+i\alpha I)f=g_\delta, \tag{2}$$

где $g_\delta\in\{g_\delta\}$ $\big(\delta=\delta(\alpha)\big)$ – некоторая система из H и такая, что $\|g_\delta-g\|\leqslant\delta$, для любых $\alpha\in\Delta$, $\delta=\delta(\alpha)$ имеет решение, и найдется такая система $\{\tilde g_{\delta'}\}$ $\big(\delta'=\delta'(\alpha)\big)$ в H, что $\|\tilde g_{\delta'}-g\|\leqslant\delta'$, *и что уравнение*

$$(A+i\alpha I)f=\tilde g_{\delta'} \tag{3}$$

имеет решение для любых $\alpha\in\Delta$, $\delta'=\delta'(\alpha)$, то решение $f_{\delta\alpha}$ уравнения (2) сходится к нормальному решению f^* уравнения (1) при $\alpha\to 0$.

2. Оказывается, что требования теоремы можно ослабить. А именно; если уравнения (1) и (2) имеют решения, то всегда найдется в H такая система $\{\tilde g_{\delta'}\}$ $(\delta=\delta(\alpha),\ \|\tilde g_{\delta'}-g\|\leqslant\delta',\ \delta'=o(\alpha)$ при $\alpha\to 0)$, что уравнение (3) обязательно имеет решение.

Пусть уравнение (1) при некотором $g\in H$ имеет решение. Тогда существует единственное нормальное решение f^* уравнения (1) ([1], [2]).

Пусть $\tilde f$ – нормальное решение уравнения

$$B^+f=g, \tag{1'}$$

где B^+ – самосопряженное расширение оператора A в H^+, H^+ – расширение пространства H : $H\subseteq H^+$. Решение $\tilde f$ единственно ([1]).

Заметим, что область определения оператора δA $D_{\delta A}=H$.

Пусть уравнение (2), где $\{A_\delta\}$ $\big(\delta=\delta(\alpha)\big)$ — семейство операторов, определенных выше, $g_\delta\in\{g_\delta\}$, имеет решение для любых $\alpha\in\Delta$ и $\delta=\delta(\alpha)$. Это решение единственно ([2], [4]).

Пусть δA^+ — линейный самосопряженный ограниченный δ ($\|\delta A\|\leqslant\delta$) оператор, определенный во всем H^+ и на всех элементах из H совпадающий с δA. (Если, например, $H^+=H\times H$, элементу $f\in H$ сопоставляется элемент $\{f, 0\}$, то оператор δA^+ можно задать равенством $\delta A^+\{f, g\}=\{\delta Af, -\delta Ag\}$, где $\{f, g\}\in H^+$. Скалярное произведение в H^+ вводится как обычно: $(\{f, g\}, \{f', g'\})=(f, f')+(g, g')$; $\{f, g\}, \{f', g'\}\in H^+$). Возьмем оператор $B_\delta^+=B^++\delta A^+$. Это сопряженный оператор в H^+. (С одной стороны, имеем $(B_\delta^+)^*=(B^++\delta A^+)^*\supseteq B^++\delta A^+=B_\delta^+$, т.е. $(B_\delta^+)^*\supseteq B_\delta^+$. Так как $(B^++\delta A^+)-\delta A^+=B^+$ потому, что область определения оператора δA^+ $D_{\delta A^+}=H^+$, то $B^+\supseteq(B^++\delta A^+)^*-\delta A^+$. Или (прибавляя к обеим частям полученного неравенства δA^+) $B^++\delta A^+\supseteq(B^++\delta A^+)^*$, т.е. $B_\delta^+\supseteq(B_\delta^+)^*$, самосопряженный с другой стороны. И, значит, $B_\delta^+=(B_\delta^+)^*$.

Пусть I^+ — единичный оператор в H^+. Уравнение

$$(B_\delta^++i\alpha I^+)f=g_\delta \tag{2'}$$

всегда имеет единственное решение в H^+ ([4]). Так как $A_\delta+i\alpha I\subseteq B_\delta^++i\alpha I^+$, то решения уравнений (2) и (2′) совпадают. Обозначим это общее решение $f_{\delta\alpha}$.

В [1] доказано, что $\|f_{\delta\alpha}-\tilde f\|\to 0$ при $\alpha\to o$ ($\delta=0(\alpha)$ при $\alpha\to 0$). Отсюда следует, что найдутся такие $\alpha_0>0$ и $\delta_0>0$, что величина $\|f_{\delta\alpha}-\tilde f\|$ будет ограничена при всех $\alpha<\alpha_0$, $\delta<\delta_0$ $\big(\alpha\in\Delta,\ \delta=\delta(\alpha)\big)$, т.е. $\|f_{\delta\alpha}-\tilde f\|\leqslant c$, где c — постоянная, независящая от α и δ. Из последнего неравенства получается, что $\|f_{\delta\alpha}\|\leqslant\|\tilde f\|+c=K$. Таким образом, $f_{\delta\alpha}$ равномерно ограничено при всех $\alpha<\alpha_0$, $\delta<\delta_0$ $\big(\alpha\in\Delta,\ \delta=\delta(\alpha)\big)$.

Подставляя $f_{\delta\alpha}$ в (2) и заменяя A_δ на $A+\delta A$, получаем:

$$(A+i\alpha I)f_{\delta\alpha}=g_\delta-\delta Af_{\delta\alpha}.$$

Далее, $\|g-(g_\delta-\delta Af_{\delta\alpha})\|\leqslant\delta+\delta K=\delta'$. Из $\delta=\delta(\alpha)$, $\delta=o(\alpha)$ следует $\delta'=\delta'(\alpha)$ и $\delta'=o(\alpha)$ при $\alpha\to 0$. Обозначим $g_\delta-\delta Af_{\delta\alpha}=\bar g_{\delta'}$; тогда уравнение (3) имеет решение $f_{\delta\alpha}$. Это решение единственно ([2]).

Таким образом, цитированную теорему можно сформулировать так.

Пусть уравнение (1) *при некотором* $g\in H$ *имеет решение и* f^* *— нормальное решение этого уравнения. Если уравнение* (2), *где* $g_\delta\in\{g_\delta\}$ $\big(\delta=\delta(\alpha)\big)$ *— некоторая система из* H *и такая, что* $\|g_\delta-g\|\leqslant\delta$, *для любых* $\alpha\in\Delta$, $\delta=\delta(\alpha)$ *имеет решение, то решение* $f_{\delta\alpha}$ *уравнения* (2) *сходится к нормальному решению* f^* *уравнения* (1) *при* $\alpha\to 0$, $\delta=o(\alpha)$ *при* $\alpha\to 0$.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 6.IV.1970

Литература

1. В. П. Кабайла, Некорректные задачи в гильбертовом пространстве с неограниченными линейными операторами, Лит. матем. сб., VII, № 3 (1967), 420–437.
2. Б. И. Кунейкайте, Решение некорректной задачи для линейного уравнения с линейным неограниченным оператором в гильбертовом пространстве, Лит. матем. сб., XI, № 2 (1971), 43–47.

3. Ф. Рисс, Б. Секефальви–Надь, Лекции по функциональному анализу, Москва, 1964.
4. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Москва, „Наука", 1966.

TIESINĖS LYGTYS SU NEAPRĖŽTAIS TIESINIAIS OPERATORIAIS

S. Remeikis

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjamos lygtys

$$Af=g,$$
$$(A_\delta+i\alpha I)\,f=g_\delta,$$
$$(A+i\alpha I)\,f=\tilde{g}_{\delta'}.$$

Čia A, A_δ — tiesiniai (aprėžti ar neaprėžti) operatoriai Hilberto erdvėje H ir

$$\|A_\delta-A\|\leqslant\delta;\ g,\ g_\delta,\ \tilde{g}_{\delta'}\in H,\ \|g-g_\delta\|\leqslant\delta;\ \|g-\tilde{g}_{\delta'}\|\leqslant\delta';\ \alpha,\ \delta,\ \delta'>0.$$

LINEARE GLEICHUNGEN MIT NICHT BESCHRÄNKTEN LINEAREN OPERATOREN

S. Remeikis

(*Zusammenfassung*)

In der Arbeit untersucht man die Gleichungen:

$$Uf=g,$$
$$(U_\delta+i\alpha I)\,f=g_\delta,$$
$$(U+i\alpha I)\,f=\tilde{g}_{\delta'},$$

wo U, U_δ lineare (beschränkte oder nicht beschränkte) Operatoren in dem Hilbertschen Raum H sind

$$\|U_\delta-U\|\leqslant\delta;\ g,\ g_\delta,\ \tilde{g}_{\delta'}\in H;\ \|g-g_\delta\|\leqslant\delta;\ \|g-\tilde{g}_{\delta'}\|\leqslant\delta';\ \alpha,\ \delta,\ \delta'>0.$$