XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971

УДК 517.916

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ш. И. Стрелиц

Известный метод Вимана—Валирона определения порядка и типа целых трансцендентных решений алгебраических дифференциальных уравнений не приводит к результату в тех случаях, когда в исследуемом уравнении встречаются выражения типа $(\ln w)^{(k)}$, где w – искомая функция. Ниже мы занимаемся именно такими уравнениями, из которых нередко удается извлечь определенную информацию о росте интегралов и в этом случае.

1. Наше исследование опирается на следующую, доказанную нами в [1], теорему.

Теорема А. *Пусть $f(z)$ – целая трансцендентная функция, $M(r)$ – ее максимум модуля: $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$, а $K(r)=\frac{rM'(r)}{M(r)}$, где $M'(r)$ – производная справа от $M(r)$. Обозначим через ζ точку на окружности $|z|=r$, в которой $|f(\zeta)|=M(r)$. В этих условиях вне некоторого множества интервалов E конечной логарифмической меры на полуоси $r>0$, т.е. множества $E\subset\int\limits_E \frac{dt}{t}<\infty$, имеют место соотношения:*

$$|D^n \ln f(\zeta)|<C_n K^{\frac{n}{2}}(r)\ln^{\frac{n(1+\alpha)}{2}}K(r);\quad r=|\zeta|\notin E,\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \dots \tag{1.1}$$

где $D=z\frac{d}{dz}$, $D^j=D(D^{j-1})$, C_n – постоянные, а α – произвольное положительное число, от которого зависит множество E : $E=E(\alpha)$.

Кроме того, справедливо равенство [2]:

$$\zeta\frac{d}{dz}\ln f(\zeta)=\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}=K(r), \tag{1'.1}$$

если через ζ обозначить соответствующим образом подобранную точку максимума функции $|f(z)|$ на окружностях $|z|=r$ в точках разрыва функции $K(r)$; таких точек не более чем счетное множество с единственной предельной точкой в бесконечности.

Отметим следующее, нужное нам в дальнейшем изложении, тождество:

$$\frac{z^n w^{(n)}}{w}=P_n(D\ln w,\ D^2\ln w,\ \dots,\ D^n\ln w), \tag{2.1}$$

где P_n – полином степени n по D.

Так как [1]

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E}} \frac{r^p K^q(r)}{M(r)}=0$$

при любых p и q, то какой бы ни был полином P^* от D и z и число $s>0$, всегда

$$\frac{P^*\left(\zeta,\ D\ln f(\zeta),\ D^2\ln f(\zeta),\ \ldots,\ D^m\ln f(\zeta)\right)}{f^s(\zeta)}\xrightarrow[\zeta\to\infty]{} 0,\ |\zeta|\notin E. \tag{3.1}$$

2. Рассмотрим алгебраическое дифференциальное уравнение

$$\tilde{F}_0(z,\ w',\ w'',\ \ldots,\ w^{(n)})=0.$$

На основании (2.1) приведем его к следующему виду:

$$F(z,\ w,\ D\ln w,\ D^2\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)=$$
$$=\sum_{j=0}^{p} F_j(z,\ D\ln w,\ D^2\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)\, w^{p-j}=0. \tag{1.2}$$

Пусть $w=w(z)$ — целое трансцендентное решение уравнения (1.2) и ζ — его точка максимума на окружности $|z|=r:|w(\zeta)|=M(r)$. Положим:

$$F_j(\zeta,\ D\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)=$$
$$=\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=0}^{n_j} P^j_{i_1 i_2\ldots i_n}(\zeta)\left(D\ln w(\zeta)\right)^{i_1}\ldots\left(D^n\ln w(\zeta)\right)^{i_n}.\ j=0,\ 1,\ \ldots,p.$$

В силу (3.1) отсюда вытекает, что

$$\frac{F_j\left(\zeta,\ D\ln w(\zeta),\ \ldots,\ D^n\ln w(\zeta)\right)}{w^j(\zeta)}\xrightarrow[\zeta\to\infty]{} 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ p,\qquad \zeta\notin E.$$

Разделив уравнение (1.2) на $w^p(\zeta)$, находим:

$$F_0(\zeta,\ D\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)=o(1),\ w=w(\zeta),\ |\zeta|\notin E. \tag{2.2}$$

Перепишем еще (2.2) в соответствии с (1'. 1) следующим образом:

$$F_0(\zeta,\ K,\ D^2\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)=P(\zeta,\ K)+$$
$$+P_0(\zeta,\ K,\ D^2\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)=0(1),$$

где в $P(\zeta,\ K)$ собраны только те слагаемые из F_0, в которых множителями являются лишь K и ζ, а в P_0 — все остальные слагаемые. Положим:

$$P(\zeta,\ K)=\sum_{j=0}^{q} Q_j(\zeta)K^{q-j} \tag{3.2}$$

и

$$P_0(\zeta,\ K,\ D^2\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)=$$
$$=\sum_{j_1+j_2+\ldots+j_n=1}^{q_0} Q_{j_1 j_2\ldots j_n}(\zeta)K^{j_1}(D^2\ln w)^{j_2}\ \ldots\ (D^n\ln w)^{j_n}, \tag{4.2}$$

причем либо $j_2+\ldots+j_n>0$, либо $Q_{j_1\ldots j_n}(z)\equiv 0$. Ниже мы ограничиваемся тем случаем, когда в (3.2) $q\geqslant 1$. Оценим P_0. Пусть $Q_{j_1\ldots j_n}(z)$ – полином степени $p_{j_1\ldots j_n}$. По (1.1), положив $|\zeta|=r$, получаем:

$$|P_0(\zeta,\ K,\ D^2\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)|<$$

$$<C'\sum r^{p_{j_1 j_2\ldots j_n}}(K\ln^{1+\alpha}K)^{j_1+\frac{2j_2+3j_3+\ldots+nj_n}{2}}, \tag{5.2}$$

где сумма берется по всем индексам $j_1, j_2, \ldots, j_n$, для которых в уравнении (4.2) $Q_{j_1 j_2\ldots j_n}(z)\not\equiv 0$, а $C'>0$ – некоторая постоянная, которая от r не зависит. Выражение справа в (5.2) можно несколько упростить. Допустим, что в упомянутой сумме имеются два члена $r^{s_1}(K\ln^{1+\alpha}K)^{m_1}$ и $r^{s_2}(K\ln^{1+\alpha}K)^{m_2}$ таких, что $s_1\leqslant s_2$ и $m_1\leqslant m_2$. В силу того, что для целой трансцендентной функции $K=K(r)\underset{r\to\infty}{\to}\infty$,

$$r^{s_1}(K\ln^{1+\alpha}K)^{m_1}+r^{s_2}(K\ln^{1+\alpha}K)^{m_2}\leqslant 2r^{s_2}(K\ln^{1+\alpha}K)^{m_2},\qquad r>r_0. \tag{6.2}$$

Проведем в (5.2) все возможные упрощения такого вида и запишем затем полученную сумму по убывающим степеням от K. Имеем:

$$|P_0(\zeta,\ K,\ D\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)|<\tilde C\sum_{j=1}^{m_0-2} r^{s_j}(K\ln^{1+\alpha}K)^{\frac{m_0-j}{2}},\quad \tilde C=\mathrm{const}$$

или, усиливая последнее неравенство,

$$|P_0(\zeta,\ K,\ D\ln w,\ \ldots,\ D^n\ln w)|<\ln^{\frac{m_0(1+\alpha)}{2}}K\sum_{j=1}^{m_0-2} r^{s_j}K^{\frac{m_0-j}{2}}, \tag{7.2}$$

где $s_j<s_{j+1}$, $j=1, 2, \ldots, m_0-3$, $r\notin E$ (в противном случае можно было бы провести дальнейшее упрощение указанного типа).

3. Соберем в сумме (4.2) все слагаемые, модуль каждого из которых не превосходит числа

$$C^* r^{s_j}K^{\frac{m_0-j}{2}}\ln^{\frac{m_0(1+\alpha)}{2}}K,\qquad r>r_0.$$

Пусть

$$\Sigma_j=\Sigma_j\, Q_{j_1 j_2\ldots j_n}(\zeta)\,K^{j_1}(D^2\ln w)^{j_2}\ \ldots\ (D^n\ln w)^{j_n}$$

и есть соответствующая сумма. Таким образом,

$$P_0=\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_{m_0-2}$$

и

$$|\Sigma_j|<C^{**}r^{s_j}K^{\frac{m_0-j}{2}}\ln^{\frac{(1+\alpha)m_0}{2}}K,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m_0-2. \tag{1.3}$$

Уравнение (2.2) перепишется теперь так:

$$\sum_{j=0}^{q} Q_j(\zeta)\,K^j+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_{m_0-2}=o(1). \tag{2.3}$$

Полагая

$$Q_j(z)=A_0^{(j)}z^{\sigma_j^*}+A_1^{(j)}z^{\sigma_j^*-1}+\ldots+A_{\sigma_j^*}^{(j)}=\Big(1+o(1)\Big)\,A_0^{(j)}z^{\sigma_j^*},$$

находим:

$$\sum_{j=0}^{q}\Big(1+o(1)\Big)\,A_0^{(j)}\zeta^{\sigma_j^*}K^j+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_{m_0-2}=o(1). \tag{3.3}$$

Допустим, что для каждого слагаемого Σ_j из (3.3) найдется член $Q_i(\zeta)K^i$ такой, что $\frac{m_0-j}{2}<i$, а $s_j\leqslant\sigma_i^*$. Тогда

$$Q_i(\zeta)K^i+\Sigma_j=\Big(1+o(1)\Big)\,A_0^{(i)}\zeta^{\sigma_i^*}K^i+\Sigma_j=$$

$$=\Big(1+o(1)\Big)\,A_0^{(i)}\zeta^{\sigma_i^*}K^i\left(1+\frac{\big(1+o(1)\big)\Sigma_j}{A_0^{(i)}\zeta^{\sigma_i^*}K^i}\right)$$

и в силу предположения $\left(\frac{m_0-j}{2}<i,\ s_j\leqslant\sigma_i^*\right)$

$$\left|\frac{\big(1+o(1)\big)\Sigma_j}{A_0^{(i)}\zeta^{\sigma_i^*}K^i}\right|<\Big(1+o(1)\Big)C^{**}r^{s_j-\sigma_i^*}K^{\frac{m_0-j}{2}-i}\ln^{\frac{m_0(1+\alpha)}{2}}K\underset{r\to\infty}{\to}0.$$

В этих условиях уравнение (3.3) приобретает сейчас следующий вид:

$$\sum_{j=0}^{q}\Big(1+o(1)\Big)\,A_0^{(j)}\zeta^{\sigma_j^*}K^j=o(1). \tag{4.3}$$

К такому же уравнению приводит и метод Вимана—Валирона в тех случаях, когда он применим. У нас это соотношение получено в более общих предположениях. Уравнения типа (4.3) хорошо исследованы (см., например, [3]), и мы этот случай оставляем в стороне.

Ниже мы рассматриваем тот случай, когда (3.3) вышеуказанными операциями не может быть сведено к (4.3), а упрощения приводят только к неравенству

$$\left|\sum_{j=0}^{q}\Big(1+o(1)\Big)\,A_0^{(j)}\zeta^{\sigma_j^*}K^j\right|<\ln^{\frac{m_0(1+\alpha)}{2}}K\sum_{j=1}^{m_0-2}r^{s_j}K^{\frac{m_0-j}{2}}. \tag{5.3}$$

В следующих пунктах мы занимаемся изучением этого неравенства.

4. Разложим полином

$$P^*(z,\ \eta)=\sum_{j=0}^{q}\Big(1+o(1)\Big)\,A_0^{(j)}z^{\sigma_j^*}\eta^j$$

на множители в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$, как и полином

$$\tilde{P}(z,\ \eta)=\sum_{j=1}^{m_0-2}z^{s_j}\eta^{m_0-j}.$$

Пусть

$$P^*(z,\ \eta)=\Big(1+o(1)\Big)\,A_0^{(q)}z^{\sigma_q^*}\prod_{i=1}^{q}\Big(\eta-\big(1+o(1)\big)\tilde{a}_iz^{\sigma_i}\Big);$$

$$\sigma_1\leqslant\sigma_2\leqslant\ldots\leqslant\sigma_q$$

и

$$\tilde{P}(z, \eta) = z^{s_1} \prod_{i=1}^{m} \left(\eta - \left(1+o(1)\right) \tilde{b}_i z^{\nu_i}\right); \ \nu_i \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_m; \ m = m_0 - 2.$$

Очевидно, при $|z| = r$

$$|P^*(z, \eta)| \geqslant \left(1+o(1)\right) |A_0^{(q)}| r^{\sigma_q^*} \prod_{i=1}^{q} \left| |\eta| - \left(1+o(1)\right) |\tilde{a}_i| r^{\sigma_i} \right| \tag{1.4}$$

и

$$|\tilde{P}(z, \eta)| \leqslant r^{s_1} \prod_{i=1}^{m} \left(|\eta| + \left(1+o(1)\right) |\tilde{b}_i| r^{\nu_i}\right). \tag{2.4}$$

Обозначим $|\tilde{a}_i| = a_i$ и $|\tilde{b}_i| = b_i$. В соответствии с (1.4) и (2.4) для (5.3) находим:

$$\prod_{i=1}^{q} \left| K - \left(1+o(1)\right) a_i r^{\sigma_i} \right| <$$

$$< C r^{s_1 - \sigma_q^*} \ln^{\frac{m_0(1+\alpha)}{2}} K \prod_{i=1}^{m} \left(\sqrt{K} + \left(1+o(1)\right) b_i r^{\nu_i}\right).$$

Положим: $\sigma = s_1 - \sigma_q^*$ и $p_0 = \frac{m_0(1+\alpha)}{2} + 1$. Пусть, далее, $r > r_0$. Из предыдущего неравенства сейчас выводим:

$$\prod_{i=1}^{q_0} \left| K - \left(1+o(1)\right) a_i r^{\sigma_i} \right| < r^{\sigma} \ln^{p_0} K \prod_{i=1}^{m} \left(\sqrt{K} + \left(1+o(1)\right) b_i r^{\nu_i}\right). \tag{3.4}$$

Покажем теперь, как можно из неравенства (3.4) извлекать сведения о росте любого положительного его решения, растущего в бесконечность вместе с r. Для этой цели упорядочим совокупность чисел

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q, 2\nu_1, 2\nu_2, \ldots, 2\nu_m$$

по их величине. Пусть этим упорядоченным множеством будет последовательность $\{\tilde{\lambda}_j\}_{j=1}^{q+m}: -\infty < \tilde{\lambda}_1 \leqslant \tilde{\lambda}_2 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{\lambda}_{q+m} < \infty$. Положим: $\lambda_j = \max(\tilde{\lambda}_j, 0)$, $j = 1, 2, \ldots, q+m$. При этом

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{q+m} < \infty. \tag{4.4}$$

Будем искать решение неравенства (3.4) $K = K_0(r)$, удовлетворяющее соотношению:

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln K_0(r)}{\ln r} = \rho \geqslant 0, \tag{5.4}$$

причем

$$0 \leqslant \lambda_s \leqslant \rho \leqslant \lambda_{s+1}; \ \lambda_s < \lambda_{s+1}. \tag{6.4}$$

Предположим, что это число ρ находится между последовательными, не равными показателями σ_l и σ_{l+1} и двумя различными соседними $2\nu_k$ и $2\nu_{k+1}$:

$$\sigma_l \leqslant \rho \leqslant \sigma_{l+1}; \ 2\nu_k \leqslant \rho \leqslant 2\nu_{k+1}. \tag{7.4}$$

Неравенство (3.4) показывает, что ρ может равняться как числу σ_l, так и числу σ_{l+1}. Поэтому будем считать, что

$$\sigma_l < \rho < \sigma_{l+1}. \tag{8.4}$$

В согласии с (5.4) должна существовать последовательность значений $\{r_n\}$, $r_n \uparrow \infty$ такая, что

$$K_0(r_n) = r_n^{\rho+\varepsilon(r_n)}, \quad \varepsilon(r_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

В силу (7.4) и (8.4) при $n > N$ с достаточно большим N

$$\left| r_n^{\rho+\varepsilon(r_n)} - \left(1+o(1)\right) a_i r_n^{\sigma_i} \right| = \left(1+o(1)\right) r_n^{\rho+\varepsilon(r_n)} \text{ при } \sigma_l \geqslant \sigma_i;$$

$$\left| r_n^{\rho+\varepsilon(r_n)} - \left(1+o(1)\right) a_i r_n^{\sigma_i} \right| = \left(1+o(1)\right) r_n^{\sigma_i} a_i; \quad \sigma_l < \sigma_i;$$

$$\left| r_n^{\frac{\rho+\varepsilon(r_n)}{2}} + \left(1+o(1)\right) b_i r_n^{\nu_i} \right| \leqslant C r_n^{\frac{\rho+|\varepsilon(r_n)|}{2}} \text{ при } \begin{cases} \nu_i \leqslant \nu_k; \\ \text{или} \\ \rho = 2\nu_{k+1}, \end{cases} \quad C = \mathrm{const}.$$

$$\left| r_n^{\frac{\rho+\varepsilon(r_n)}{2}} + \left(1+o(1)\right) b_i r_n^{\nu_i} \right| = \left(1+o(1)\right) b_i r_n^{\nu_i}; \quad \nu_{k+1} < \nu_i. \tag{9.4}$$

Подставим в неравенство (3.4) $r = r_n$ и $K = K_0(r_n)$ и воспользуемся соотношениями (9.4). Мы находим:

$$\left(1+o(1)\right) r_n^{(\rho+\varepsilon(r_n))\, l+\sigma_{l+1}+\ldots+\sigma_q} <$$

$$< C^* \rho^{\rho_0} \ln^{\rho_0} r_n \cdot r_n^{\frac{k}{2}\left(\rho+|\varepsilon(r_n)|\right)+\nu_{k+1}+\nu_{k+2}+\ldots+\nu_m+\sigma+\frac{|\varepsilon(r_n)|}{2}}, \tag{10.4}$$

$C^* = \mathrm{const}$. Отсюда немедленно следует, что необходимо

$$\rho l + \sigma_{l+1} + \sigma_{l+2} + \ldots + \sigma_q \leqslant \frac{k\rho}{2} + \nu_{k+1} + \ldots + \nu_m + \sigma.$$

Здесь возможны три случая.

I) $2l - k > 0$.

Теперь из (10.4) получаем:

$$\rho \leqslant \rho_0 = \frac{2\left(\sigma + \sum\limits_{j=k+1}^{m} \nu_j - \sum\limits_{j=l+1}^{q} \sigma_j\right)}{2l-k}.$$

Если $\rho_0 > \lambda^*_s$, то возможны решения неравенства (4.4), для которых

$$\lambda_s < \rho \leqslant \min(\rho_0, \lambda_{s+1}). \tag{11.4}$$

Функции $K = Ar^\rho$, где ρ удовлетворяет предыдущему соотношению, дают примеры таких решений. Если же $\rho_0 \leqslant \lambda_s$, то не существуют решения неравенства (3.4) с искомым порядком.

II) $2l - k < 0$.

В этом случае

$$\rho \geqslant \rho_0 = \frac{2\left(\sigma + \sum\limits_{j=k+1}^{m} \nu_j - \sum\limits_{j=l+1}^{q} \sigma_j\right)}{2l-k}. \tag{12.4}$$

* см. (6.4).

Как и выше, нетрудно убедиться, что только при $\rho_0 < \lambda_{s+1}$ существуют решения с порядком ρ:

$$\max(\lambda_s, \rho_0) \leqslant \rho < \lambda_{s+1}. \tag{13.4}$$

III) $2l-k=0$.

При этом условии необходимо

$$\sum_{j=l+1}^{q} \sigma_j \leqslant \sum_{j=k+1}^{m} \nu_j + \sigma. \tag{14.4}$$

Если последнее соотношение имеет место, то существует решение исследуемого неравенства (3.4) порядка ρ:

$$\lambda_s < \rho < \lambda_{s+1}. \tag{15.4}$$

Примерами таких решений служат функции $K = Ar^\rho$, для которых ρ удовлетворяет (15.4). Если же (14.4) не имеет места, то нет решений $K(r)$, для которых выполняется (15.4).

Указанным образом следует проверять все интервалы $(\lambda_s, \lambda_{s+1})$, $s=1, 2, \ldots$ $\big($см. (6.4)$\big)$, устанавливая множество значений, могущих быть порядками положительных решений неравенства (3.4).

Обозначим через λ_0 — наименьшее положительное число в последовательности (6.4). Надлежит проверить и те значения интервала $(0, \lambda_0)$ и луча (λ_{q+m}, ∞), которые могут оказаться порядками соответствующих решений неравенства (3.4). Остановимся несколько подробнее на случае луча (λ_{q+m}, ∞).

Если в (3.4) $m \geqslant 2q$, то существуют решения $K = K_0(r)$ бесконечного порядка. В этом можно убедиться на примере функции $K = \exp e^r$. Если же $m < 2q$, то все решения неравенства (3.4) конечного порядка. Для доказательства этого утверждения допустим, что существует решение $K = K^*(r)$ с

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln K^*(r)}{\ln r} = \infty. \tag{16.4}$$

Найдется такая последовательность $r_n \uparrow \infty$, что

$$K^*(r_n) = r_n^{N_n}, \quad N_n \to \infty.$$

При достаточно больших n $N_n > \sigma_q + 2\nu_m$, так что в силу (9.4) $qN_n \leqslant \frac{m}{2} N_n + \sigma$ или $N_n \leqslant \sigma/2q - m$, что противоречит (16.4).

Наше утверждение доказано.

Вернемся теперь к целому трансцендентному решению $w(z)$ уравнения (1.2). Допустим, что справедливо (5.4): $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln K(r)}{\ln r} = \rho$. В силу определения функции $K(r)$

$$K(r) = \frac{rM'(r)}{M(r)}.$$

Так как по теореме Адамара о трех кругах $\ln M(r)$ выпуклая функция от $\ln r$, то

$$K\left(\frac{r}{2}\right) \ln 2 \leqslant \ln M(r) - \ln M\left(\frac{r}{2}\right) < \ln M(r) \tag{17.4}$$

и

$$\ln M(r) - \ln M(1) \leqslant K(r) \ln r, \tag{18.4}$$

откуда немедленно следует, что порядок функции $K(r)$ совпадает с порядком функции $\ln M(r)$, т.е. и с порядком решения $w(z)$. Таким образом, множество порядков растущих в бесконечность решений неравенства (3.4) является также совокупностью возможных значений порядков целых трансцендентных решений уравнения (1.2).

Замечание. Неравенство (3.4) мы решали при $r \notin E$, где E — множество интервалов на полуоси $r > 0$ конечной логарифмической меры. Но всегда

$$\varlimsup_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E}} \frac{\ln K(r)}{\ln r} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln K(r)}{\ln r}$$

(см., например, [4]). Таким образом, из (17.4) и (18.4) действительно следует сформулированный выше результат, несмотря на то, что все исследование относительно функции $K(r)$ велось при $r \notin E$.

5. Проиллюстрируем сказанное на примере следующего дифференциального уравнения:

$$P_0(z) \frac{z^3 w'''}{w} + P_1(z) \left(z \left(\frac{zw'}{w}\right)'\right)^2 + P_2(z) = 0,$$

где $P_0(z)$, $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — полиномы. Неравенство (3.4) принимает теперь вид

$$\left| K^3 + \left(1 + o(1)\right) \frac{P_2(\zeta)}{P_0(\zeta)} \right| < \left| \frac{P_1(\zeta)}{P_0(\zeta)} \right| K^2 \ln^{2(1+\alpha)} K. \tag{1.5}$$

Пусть в окрестности $z = \infty$

$$\left| \frac{P_2(z)}{P_0(z)} \right| = \left(1 + o(1)\right) |z|^m a, \quad \left| \frac{P_1(z)}{P_0(z)} \right| = \left(1 + o(1)\right) b |z|^n.$$

Тогда по (1.5)

$$\left| K^3 - \left(1 + o(1)\right) ar^m \right| < \left(1 + o(1)\right) br^n K^2 \ln^{2(1+\alpha)} K.$$

а) $n \leqslant 0$. В этом случае из (2.5) вытекает асимптотическое равенство

$$K^3 - \left(1 + o(1)\right) ar^m = 0,$$

откуда немедленно следует, что порядок любого целого трансцендентного решения исследуемого уравнения равен $\frac{m}{3}$.

б) $m \geqslant 3n > 0$. Будем искать решение неравенства (2.5), для которого $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{\ln K(r)}{\ln r} = \rho$. Для некоторой последовательности $r_p \uparrow \infty$ $K(r_p) = r_p^{\rho+\varepsilon(r_p)}$. (2.5) дает нам теперь:

$$\left| K^3(r_p) - \left(1 + o(1)\right) ar_p^m \right| < \left(1 + o(1)\right) b^* r_p^{n+2(\rho+\varepsilon(r_p))} \ln^{2(1+\alpha)} r_p.$$

Предположения $\rho > \frac{m}{3}$ и $\rho < \frac{m}{3}$ приводят к противоречию с условием б). Мы приходим к заключению, что порядок любого целого трансцендентного решения равен в обсуждаемом случае $\frac{m}{3}$.

в) $n \geqslant \frac{m}{3}$. Проверка всех представляющихся здесь случаев показывает, что порядок любого трансцендентного решения рассматриваемого дифференциального уравнения удовлетворяет неравенству $\frac{m-n}{2} \leqslant \rho \leqslant n$.

Точность наших оценок зависит в известных пределах от точности неравенств в теореме А. Последнее зависит от распределения нулей исследуемых функций по аргументам. Можно указать примеры, показывающие, что в общем случае показатель степени $\frac{n}{2}$ в неравенстве (1.1) уменьшить нельзя.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
1.XII.1969

Литература

1. Ш. И. Стрелиц, Поведение аналитической функции при больших значениях ее модуля Лит. матем. сб., **III**, № 2 (1963), 123—175.
2. Ш. И. Стрелиц, О максимальных модулях аналитических функций, УМН, **X**, 4 (66) (1955), 153—160.
3. Ж. Валирон, Аналитические функции, М., 1957.
4. Ш. И. Стрелиц, К вопросу о росте целых трансцендентных решений уравнений в частных производных, Лит. матем. сб., **IV**, № 4 (1964), 541—563.

DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SVEIKŲ TRANCENDENTINIŲ SPRENDINIŲ AUGIMO KLAUSIMU

Š. Strelicas

(*Reziumė*)

Vimano—Valirono metodas algebrinių diferencialinių lygčių

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(n')}) = 0 \qquad (1)$$

sveikų sprendinių eilei ir tipui nustatyti dažnai neduoda rezultatų, kai polinome P yra reiškinių pavidalo $(\ln w)^{(k)}$. Darbe tiriamos kaip tik tokios lygtys, iš kurių pasiseka išgauti informaciją apie jų integralų augimą.

[1] darbe autorius gavęs reiškinių $\left(\zeta \frac{d}{dz}\right)^k \ln w(\zeta)$ įvertinimus maksimumo taškuose ζ, kur $\max\limits_{(z)=|\zeta|} |w(z)| = |w(\zeta)|$. Jais naudojantis šiame darbe atliekamas (1) lygties tyrimas.

ÜBER DAS ANWACHSEN GANZER TRANSZENDENTER LÖSUNGEN EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG

S. Strelitz

(*Zusammenfassung*)

Die bekannte Wiman—Valiron'sche Methode zur Berechnung von Ordnung und Typus ganzer transzendenter Lösungen einer algebraischen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

versagt oft, wenn in P Ausdrücke der Form $(\ln w)^{(k)}$ vorkommen. In dieser Arbeit werden Differentialgleichungen der soeben erwöhnten Gattung, aus denen wir bestimmte Aussagungen über Ordnung und Typus ihrer Integralen machen können, untersucht.

Die Differentialgleichung (1) wird mit Hilfe der von dem Autor in [1] für die Ausdrücke $\left(\zeta \frac{d}{dz}\right)^{(k)} \ln w(\zeta)$ in den Maximalpunkten ζ, wo $\max\limits_{|z|=r} |w(z)| = |w(\zeta)|$ ist, bewiesenen Beziehungen behandelt.